

DÉPARTEMENT MATHÉMATIQUES

EXAMEN DE STATISTIQUE II
22 avril 2008 Durée 2h00 heures

Consignes

- Toutes vos réponses doivent être justifiées
- **La consultation des documents et calculatrices est interdite.**
Seul document autorisé : Deux feuilles format A4, manuscrites recto-verso.
- L'utilisation de la grille fournie n'est pas obligatoire mais elle peut faciliter votre travail.

Exercice 1 .- Une entreprise fabrique des pièces cylindriques. Un fournisseur lui livre des anneaux métalliques dont le diamètre doit être conforme au diamètre des cylindres. Soit X la variable aléatoire associée au diamètre des anneaux. On suppose que X suit une loi normale. Le fournisseur affirme que le diamètre des ses cylindres est égal à 12cm.

Pour contrôler cette affirmation on prélève au hasard et avec remise un échantillon de 64 pièces dans la livraison et on trouve $\bar{x} = 12,3$ et un écart-type égal à 0,04. On prend un risque $\alpha = 0,10$

1. (a) Quel type de test doit-on faire pour vérifier les dires du fournisseur?
(b) Quelles sont les hypothèses H_0 et H_1 de ce test.
(c) Représenter graphiquement ce test et dessiner les risques α et β .
(d) Quelle est la loi de la v.a. \bar{X} sous l'hypothèse H_0 ?
(e) Calculer la region critique.
(f) Énoncer la règle de décision permettant d'accepter si la livraison est conforme.
(g) Peut-on accepter que la livraison contrôlée est conforme?
(h) Peut-on améliorer ce test et comment?
2. L'entreprise prétend que le diamètre des cylindres est égal à 13cm.
(a) Construire ce nouveau test.
(b) Représenter graphiquement ce test et dessiner les risques α et β .
(c) Calculer la puissance de ce test avec $\alpha = 0,10$.
3. Lequel de ces tests donne des résultats meilleurs . Justifier votre réponse.

Exercice 2 .- Un réacteur biochimique est utilisé afin de fabriquer un produit.

Pour des raisons aussi bien d'efficacité industrielle qu'écologiques on voudrait comprendre:

- le phénomène de concentration du substrat, CSUB
- pouvoir prédire
- agir pour améliorer le procédé.

On pense lui associer les mesures de quatre variables qui sont dans l'ordre :

- X_1 : concentration de la biomasse (BIOM);
- X_2 : taux de production de cellules (CEL);
- X_3 : taux de la consommation du substrat (TSUB);
- X_4 : taux de variation du flux en sortie (FLUX).

On cherche d'abord à déterminer s'il y a une relation linéaire entre la concentration du substrat d'une part et les autres variables d'autre part.

Vous trouverez en annexe le fichier de compte rendu `reacteur.crd`.

Le risque est $\alpha = 5\%$.

1. Étudier le fichier `reacteur.crd` afin de:

- (a) Dire si les variables utilisées peuvent bien expliquer ce phénomène. Justifier votre réponse.
- (b) Construire le meilleur modèle, en utilisant la méthode pas à pas.
- (c) Qu'en pensez vous de la qualité du modèle retenu?
- (d) Pouvez vous proposer une amélioration?
- (e) Est-ce que toutes les hypothèses fondamentales pour la validité de cette régression sont vérifiées?
- (f) Existe-t-il de problèmes de colinéarité? Justifier votre réponse.

2. On prend au hasard un modèle par exemple: $Y = a_4 X_4 + a_1 X_1 + a_0 + \epsilon$

- (a) Il paraît que si on fait un dosage du type FLUX=200, BIOM=100, la concentration du SUBSTRAT (CSUB) serait égale à 220. Pouvez-vous confirmer?
- (b) Faites un intervalle de confiance pour le coefficient du FLUX avec $\alpha = 10\%$
- (c) Construire et répondre au test: " la variable BIOM joue un rôle significatif dans le modèle considéré, avec $\alpha = 10\%$ ".

ANALYSE STATISTIQUE DU TABLEAU DES DONNÉES

Nombre d'observations utilisées 20
 Nombre de variables utilisées 5

Matrice des corrélations

	CSUB	BIOM	CEL	TSUB	FLUX
CSUB	1.0000	0.8294	0.8048	0.2782	0.3232
BIOM	0.8294	1.0000	0.7861	0.5663	0.3766
CEL	0.8048	0.7861	1.0000	0.2371	0.3670
TSUB	0.2782	0.5663	0.2371	1.0000	0.7123
FLUX	0.3232	0.3766	0.3670	0.7123	1.0000

Reacteur : Analyse n° 1

REGRESSION MULTIPLE

Nombre d'observations utilisées 20
 Nombre de variables utilisées 2
 Variable à expliquer CSUB
 1e variable explicative BIOM

MESURES GLOBALES DE LA QUALITÉ DE LA RÉGRESSION

Coefficient de corrélation multiple R 0.8294
 Carré du coef de corrélation multiple R² .. 0.6879
 Valeur du test F de signification de R² ... 39.6783 à 1 et 18 ddl
 Variances : résiduelle 448.2386
 Expliquée 988.0739
 Totale 1436.3125

COEFFICIENTS DE LA RÉGRESSION

Var	Coef	Intervalle	Erreur standard	Test t	18 ddl
BIOM	0.5909	[0.394 0.788]	0.0938	6.2991	
Terme constant	81.136364				

Reacteur : Analyse n° 2

REGRESSION MULTIPLE

Nombre d'observations utilisées 20
 Nombre de variables utilisées 2
 Variable à expliquer CSUB
 1e variable explicative CEL

MESURES GLOBALES DE LA QUALITÉ DE LA RÉGRESSION

Coefficient de corrélation multiple R 0.8048
 Carré du coef de corrélation multiple R² ... 0.6477
 Valeur du test F de signification de R² ... 33.0972 à 1 et 18 ddl
 Variances : résiduelle 505.9693
 Expliquée 930.3432
 Totale 1436.3125

COEFFICIENTS DE LA RÉGRESSION

Var	Coef	Intervalle	Erreur standard	Test t	18 ddl
CEL	0.5055	[0.321 0.690]	0.0879	5.7530	
Terme constant	101.408747				

Reacteur : Analyse n° 3

REGRESSION MULTIPLE

Nombre d'observations utilisées 20
 Nombre de variables utilisées 2
 Variable à expliquer CSUB
 1e variable explicative TSUB

MESURES GLOBALES DE LA QUALITÉ DE LA RÉGRESSION

Coefficient de corrélation multiple R 0.2782
 Carré du coef de corrélation multiple R² .. 0.0774
 Valeur du test F de signification de R² ... 1.5099 à 1 et 18 ddl
 Variances : résiduelle 1325.1551
 Expliquée 111.1574
 Totale 1436.3125

COEFFICIENTS DE LA RÉGRESSION

Var	Coef	Intervalle	Erreur standard	Test t	18 ddl
TSUB	0.2593	[-0.184 0.703]	0.2110	1.2288	
Terme constant	140.842593				

Reacteur : Analyse n° 4

REGRESSION MULTIPLE

Nombre d'observations utilisées 20
 Nombre de variables utilisées 2
 Variable à expliquer CSUB
 1e variable explicative FLUX

MESURES GLOBALES DE LA QUALITÉ DE LA RÉGRESSION

Coefficient de corrélation multiple R 0.3232
 Carré du coef de corrélation multiple R² ... 0.1045
 Valeur du test F de signification de R² ... 2.1000 à 1 et 18 ddl
 Variances : résiduelle 1286.2500
 Expliquée 150.0625
 Totale 1436.3125

COEFFICIENTS DE LA RÉGRESSION

Var	Coef	Intervalle	Erreur standard	Test t	18 ddl
FLUX	0.2414	[-0.109 0.591]	0.1666	1.4491	
Terme constant	143.017241				

Reacteur : Analyse n° 5

REGRESSION MULTIPLE

Nombre d'observations utilisées 20
 Nombre de variables utilisées 3
 Variable à expliquer CSUB
 1e variable explicative BIOM
 2e variable explicative CEL

MESURES GLOBALES DE LA QUALITÉ DE LA RÉGRESSION

Coefficient de corrélation multiple R 0.8655
 Carré du coef de corrélation multiple R² .. 0.7490

Valeur du test F de signification de R² ... 25.3690 à 2 et 17 ddl
 Variances : résiduelle 360.4673
 Expliquée 1075.8452
 Totale 1436.3125

COEFFICIENTS DE LA RÉGRESSION

Var	Coef	Intervalle	Erreur standard	Test t	17 ddl	Proba
BIOM	0.3669	[0.071 0.662]	0.1401	2.6195		
CEL	0.2512	[-0.009 0.512]	0.1235	2.0345		
Terme constant 78.291295						

Reacteur : Analyse n° 6

REGRESSION MULTIPLE

Nombre d'observations utilisées 20
 Nombre de variables utilisées 3
 Variable à expliquer CSUB
 1e variable explicative BIOM
 2e variable explicative TSUB

MESURES GLOBALES DE LA QUALITÉ DE LA RÉGRESSION

Coefficient de corrélation multiple R 0.8613
 Carré du coef de corrélation multiple R² ... 0.7419
 Valeur du test F de signification de R² ... 24.4326 à 2 et 17 ddl
 Variances : résiduelle 370.7165
 Expliquée 1065.5960
 Totale 1436.3125

COEFFICIENTS DE LA RÉGRESSION

Var	Coef	Intervalle	Erreur standard	Test t	17 ddl	Proba
BIOM	0.7046	[0.480 0.929]	0.1065	6.6157		
TSUB	-0.2627	[-0.557 0.031]	0.1393	1.8855		
Terme constant 110.608921						

Reacteur : Analyse n° 7

REGRESSION MULTIPLE

Nombre d'observations utilisées 20
 Nombre de variables utilisées 3
 Variable à expliquer CSUB
 1e variable explicative BIOM
 2e variable explicative FLUX

MESURES GLOBALES DE LA QUALITÉ DE LA RÉGRESSION

Coefficient de corrélation multiple R 0.8295
 Carré du coef de corrélation multiple R² ... 0.6881
 Valeur du test F de signification de R² ... 18.7489 à 2 et 17 ddl
 Variances : résiduelle 448.0414
 Expliquée 988.2711
 Totale 1436.3125

COEFFICIENTS DE LA RÉGRESSION

Var	Coef	Intervalle	Erreur standard	Test t	17 ddl
BIOM	0.5875	[0.368 0.807]	0.1042	5.6395	

FLUX 0.0094 [-0.221 0.240] 0.1092 0.0865
 Terme constant 79.897842
 Reacteur : Analyse n° 8

REGRESSION MULTIPLE

Nombre d'observations utilisées 20
 Nombre de variables utilisées 3
 Variable à expliquer CSUB
 1e variable explicative CEL
 2e variable explicative TSUB

MESURES GLOBALES DE LA QUALITÉ DE LA RÉGRESSION

Coefficient de corrélation multiple R 0.8098
 Carré du coef de corrélation multiple R² ... 0.6558
 Valeur du test F de signification de R² ... 16.1961 à 2 et 17 ddl
 Variances : résiduelle 494.3560
 Expliquée 941.9565
 Totale 1436.3125

COEFFICIENTS DE LA RÉGRESSION

Var	Coef	Intervalle	Erreur standard	Test t	17 ddl	Proba
CEL	0.4917	[0.298 0.686]	0.0920	5.3451		
TSUB	0.0863	[-0.202 0.374]	0.1365	0.6319		
Terme constant 87.240082						

Reacteur : Analyse n° 9

REGRESSION MULTIPLE

Nombre d'observations utilisées 20
 Nombre de variables utilisées 3
 Variable à expliquer CSUB
 1e variable explicative CEL
 2e variable explicative FLUX

MESURES GLOBALES DE LA QUALITÉ DE LA RÉGRESSION

Coefficient de corrélation multiple R 0.8054
 Carré du coef de corrélation multiple R² ... 0.6486
 Valeur du test F de signification de R² ... 15.6908 à 2 et 17 ddl
 Variances : résiduelle 504.6814
 Expliquée 931.6311
 Totale 1436.3125

COEFFICIENTS DE LA RÉGRESSION

Var	Coef	Intervalle	Erreur standard	Test t	17 ddl
CEL	0.4980	[0.293 0.703]	0.0971	5.1310	
FLUX	0.0240	[-0.219 0.268]	0.1154	0.2083	
Terme constant 97.966507					

Reacteur : Analyse n° 10

REGRESSION MULTIPLE

Nombre d'observations utilisées 20
 Nombre de variables utilisées 3

MESURES GLOBALES DE LA QUALITÉ DE LA RÉGRESSION
 Coefficient de corrélation multiple R 0.8657
 Carré du coef de corrélation multiple R² .. 0.7494
 Valeur du test F de signification de R² ... 15.9486 à 3 et 16 ddl
 Variances : résiduelle 359.9459
 Expliquée 1076.3666
 Totale 1436.3125

COEFFICIENTS DE LA RÉGRESSION

Var	Coef	Intervalle	Erreur standard	Test t	ddl
BIOM	0.3703	[0.061 0.680]	0.1460	2.5365	
CEL	0.2536	[-0.018 0.525]	0.1282	1.9789	
FLUX	-0.0155	[-0.231 0.200]	0.1017	0.1522	
Terme constant	80.293186				

Reacteur : Analyse n° 13

REGRESSION MULTIPLE
 Nombre d'observations utilisées 20
 Nombre de variables utilisées 4
 Variable à expliquer CSUB
 1e variable explicative BIOM
 2e variable explicative TSUB
 3e variable explicative FLUX

MESURES GLOBALES DE LA QUALITÉ DE LA RÉGRESSION
 Coefficient de corrélation multiple R 0.8880
 Carré du coef de corrélation multiple R² .. 0.7886
 Valeur du test F de signification de R² ... 19.8941 à 3 et 16 ddl
 Variances : résiduelle 303.6504
 Expliquée 1132.6621
 Totale 1436.3125

COEFFICIENTS DE LA RÉGRESSION

Var	Coef	Intervalle	Erreur standard	Test t	ddl
BIOM	0.7133	[0.502 0.924]	0.0995	7.1709	
TSUB	-0.4737	[-0.838 -0.110]	0.1717	2.7583	
FLUX	0.2301	[-0.029 0.490]	0.1224	1.8799	
Terme constant	104.107535				

Reacteur : Analyse n° 14

REGRESSION MULTIPLE
 Nombre d'observations utilisées 20
 Nombre de variables utilisées 4
 Variable à expliquer CSUB
 1e variable explicative CEL
 2e variable explicative TSUB
 3e variable explicative FLUX

MESURES GLOBALES DE LA QUALITÉ DE LA RÉGRESSION
 Coefficient de corrélation multiple R 0.8111
 Carré du coef de corrélation multiple R² .. 0.6578
 Valeur du test F de signification de R² ... 10.2527 à 3 et 16 ddl

Variable à expliquer CSUB
 1e variable explicative TSUB
 2e variable explicative FLUX

MESURES GLOBALES DE LA QUALITÉ DE LA RÉGRESSION
 Coefficient de corrélation multiple R 0.3304
 Carré du coef de corrélation multiple R² .. 0.1091
 Valeur du test F de signification de R² ... 1.0414 à 2 et 17 ddl
 Variances : résiduelle 1279.5430
 Expliquée 156.7695
 Totale 1436.3125

COEFFICIENTS DE LA RÉGRESSION

Var	Coef	Intervalle	Erreur standard	Test t	ddl
TSUB	0.0907	[-0.551 0.732]	0.3039	0.2985	
FLUX	0.1896	[-0.324 0.703]	0.2436	0.7785	
Terme constant	135.791991				

Reacteur : Analyse n° 11

REGRESSION MULTIPLE
 Nombre d'observations utilisées 20
 Nombre de variables utilisées 4
 Variable à expliquer CSUB
 1e variable explicative BIOM
 2e variable explicative CEL
 3e variable explicative TSUB

MESURES GLOBALES DE LA QUALITÉ DE LA RÉGRESSION
 Coefficient de corrélation multiple R 0.8773
 Carré du coef de corrélation multiple R² .. 0.7697
 Valeur du test F de signification de R² ... 17.8291 à 3 et 16 ddl
 Variances : résiduelle 330.7221
 Expliquée 1105.5904
 Totale 1436.3125

COEFFICIENTS DE LA RÉGRESSION

Var	Coef	Intervalle	Erreur standard	Test t	ddl
BIOM	0.5024	[0.124 0.881]	0.1786	2.8136	
CEL	0.1858	[-0.097 0.469]	0.1336	1.3910	
TSUB	-0.1783	[-0.493 0.137]	0.1486	1.1996	
Terme constant	99.032908				

Reacteur : Analyse n° 12

REGRESSION MULTIPLE
 Nombre d'observations utilisées 20
 Nombre de variables utilisées 4
 Variable à expliquer CSUB
 1e variable explicative BIOM
 2e variable explicative CEL
 3e variable explicative FLUX

Variances : résiduelle 491.4869
 Expliquée 944.8256
 Totale 1436.3125

COEFFICIENTS DE LA RÉGRESSION

Var	Coef	Intervalle de confiance à 0.95	Erreur standard	Test t	ddl
CEL	0.5005	[0.291 0.710]	0.0988	5.0650	
TSUB	0.1273	[-0.285 0.539]	0.1943	0.6554	
FLUX	-0.0497	[-0.394 0.295]	0.1626	0.3056	
Terme constant	87.607432				
Écart-type des estimations =	31.53654				

Reacteur : Analyse n° 15

RÉGRESSION MULTIPLE

Nombre d'observations utilisées 20
 Nombre de variables utilisées 5
 Variable à expliquer CSUB
 1e variable explicative BIOM
 2e variable explicative CEL
 3e variable explicative TSUB
 4e variable explicative FLUX

MESURES GLOBALES DE LA QUALITÉ DE LA RÉGRESSION

Coefficient de corrélation multiple R 0.8897
 Carré du coef de corrélation multiple R² 0.7915
 Valeur du test F de signification de R² 14.2373 à 4 et 15 ddl
 Variances : résiduelle 299.4426
 Expliquée 1136.8699
 Totale 1436.3125

COEFFICIENTS DE LA RÉGRESSION

Var	Coef	Intervalle de confiance à 0.95	Erreur standard	Test t	ddl
BIOM	0.6322	[0.198 1.067]	0.2038	3.1016	
CEL	0.0731	[-0.266 0.412]	0.1592	0.4591	
TSUB	-0.4042	[-0.899 0.091]	0.2322	1.7409	
FLUX	0.1906	[-0.134 0.515]	0.1523	1.2518	
Terme constant	100.671296				

STATISTICAL DESIGN AND ANALYSIS OF ENGINEERING EXPERIMENTS

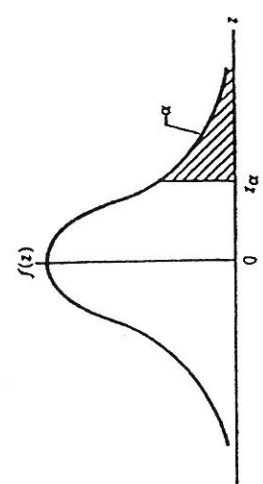


Table A-1 Normal distribution [1]*

z_α	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641
0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
0.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681

* Tabulation of the values of α versus z_α for the standardized normal curve.

$$\alpha = P(z > z_\alpha) = \int_{z_\alpha}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$$

= area under the standardized normal curve from $z = z_\alpha$ to $z = \infty$.

APPENDIX

Table A-1 (cont.)

z_α	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
2.3	.0107	.0104	.0102	.00990	.00964	.00939	.00914	.00889	.00866	.00842
2.4	.00820	.00798	.00776	.00755	.00734	.00714	.00695	.00676	.00657	.00639
2.5	.00621	.00604	.00587	.00570	.00554	.00539	.00523	.00508	.00494	.00480
2.6	.00466	.00453	.00440	.00427	.00415	.00402	.00391	.00379	.00368	.00357
2.7	.00347	.00336	.00326	.00317	.00307	.00298	.00289	.00280	.00272	.00264
2.8	.00256	.00248	.00240	.00233	.00226	.00219	.00212	.00205	.00199	.00193
2.9	.00187	.00181	.00175	.00169	.00164	.00159	.00154	.00149	.00144	.00139

z_α	.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9
3	.00135	.03988	.03687	.03483	.03337	.03233	.03159	.03108	.03073	.030481
4	.03317	.02207	.01333	.00854	.00541*	.00340	.00211	.00130	.000793	.000479
5	.00287	.00170	.00096	.000579	.000333	.000190	.000107	.0000599	.0000332	.0000182
6	.000987	.000530	.000282	.000149	.0000777	.0000402	.0000206	.0000104	.00000523	.00000260

*.03541 means .000003541.

Table A-3 *t* distribution (2, 4)*

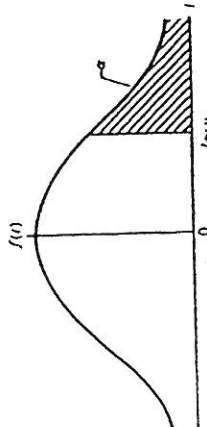


Table with columns for alpha (0.40 to 0.005) and rows for degrees of freedom (1 to infinity). It provides the values of the t-distribution function f(t) for various alpha values and degrees of freedom.

* $\alpha = P(t > t_{\alpha}) = \int_{t_{\alpha}}^{\infty} f(t) dt$

APPENDIX

Table A-4 F distribution (4)

Tabulation of the values of $F_{\alpha, 10, \nu_1, \nu_2}$ versus ν_1 and ν_2 *

Table with columns for degrees of freedom for the numerator (nu_1) from 1 to infinity and rows for degrees of freedom for the denominator (nu_2) from 1 to infinity. It provides the values of the F-distribution function for various alpha values (0.40 to 0.005) and degrees of freedom.

* F_{α, ν_1, ν_2} and $F_{1-\alpha, \nu_2, \nu_1}$ have been used interchangeably in the text.

STATISTICAL DESIGN AND ANALYSIS OF ENGINEERING EXPERIMENTS

APPENDIX

Table A.5 F distribution

Tabulation of the values of $F_{\alpha; \nu_1, \nu_2}$ versus ν_1 and ν_2^*

Degrees of freedom for the numerator (ν_1)	Degrees of freedom for the denominator (ν_2)																	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244	245	246	246	247	247	247
2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4
3	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.76	8.74	8.73	8.71	8.70	8.69	8.68	8.67
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.94	5.91	5.82	5.87	5.86	5.84	5.83	5.82
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.70	4.68	4.66	4.64	4.62	4.60	4.59	4.58
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.03	4.00	3.98	3.96	3.94	3.92	3.91	3.90
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.60	3.57	3.55	3.53	3.51	3.49	3.48	3.47
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.31	3.28	3.26	3.24	3.22	3.20	3.19	3.17
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.10	3.07	3.05	3.03	3.01	2.99	2.97	2.96
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.94	2.91	2.89	2.86	2.85	2.83	2.81	2.80
11	4.84	2.98	3.30	3.36	3.20	3.01	2.95	2.90	2.85	2.82	2.82	2.79	2.76	2.74	2.72	2.70	2.69	2.67
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.72	2.69	2.66	2.64	2.62	2.60	2.58	2.57
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.63	2.60	2.58	2.55	2.53	2.51	2.50	2.48
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.57	2.53	2.51	2.48	2.46	2.44	2.43	2.41
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.51	2.48	2.45	2.42	2.40	2.38	2.37	2.35
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.46	2.42	2.40	2.37	2.35	2.33	2.32	2.30
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.41	2.38	2.36	2.33	2.31	2.29	2.27	2.26
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.37	2.34	2.31	2.29	2.27	2.25	2.23	2.22
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.34	2.31	2.28	2.26	2.23	2.21	2.20	2.18
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.31	2.28	2.25	2.23	2.20	2.18	2.17	2.15
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.28	2.25	2.22	2.20	2.18	2.16	2.14	2.12
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.26	2.23	2.20	2.17	2.15	2.13	2.11	2.10
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.23	2.20	2.18	2.15	2.13	2.11	2.09	2.07
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.21	2.18	2.15	2.13	2.11	2.09	2.07	2.05
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.20	2.16	2.14	2.11	2.09	2.07	2.05	2.04
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.18	2.15	2.12	2.09	2.07	2.05	2.03	2.02
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.17	2.13	2.10	2.08	2.06	2.04	2.02	2.00
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.15	2.12	2.09	2.06	2.04	2.02	2.00	1.99
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.14	2.10	2.08	2.05	2.03	2.01	1.99	1.97
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.13	2.09	2.06	2.04	2.02	1.99	1.98	1.96
32	4.15	3.29	2.90	2.67	2.51	2.40	2.31	2.24	2.19	2.14	2.10	2.07	2.04	2.01	1.99	1.97	1.95	1.94
34	4.13	3.28	2.88	2.65	2.49	2.38	2.29	2.23	2.17	2.12	2.08	2.05	2.02	1.99	1.97	1.95	1.93	1.92
36	4.11	3.26	2.87	2.63	2.48	2.36	2.28	2.21	2.15	2.11	2.07	2.03	2.00	1.98	1.95	1.93	1.92	1.90
38	4.10	3.24	2.85	2.62	2.46	2.35	2.26	2.19	2.14	2.09	2.05	2.02	1.99	1.96	1.94	1.92	1.90	1.88
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.04	2.00	1.97	1.95	1.92	1.90	1.89	1.87

* $F_{\alpha; \nu_1, \nu_2}$ and $F_{1-\alpha; \nu_2, \nu_1}$ have been used interchangeably in the text.

Degrees of freedom for the numerator (ν_1)	Degrees of freedom for the denominator (ν_2)																	
	19	20	22	24	26	28	30	35	40	45	50	60	80	100	200	300	∞	
1	248	248	249	249	249	250	250	251	251	251	252	252	252	253	254	254	254	
2	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	
3	8.67	8.66	8.65	8.64	8.63	8.62	8.62	8.60	8.59	8.58	8.57	8.56	8.55	8.54	8.53	8.53	8.53	
4	5.81	5.80	5.79	5.77	5.76	5.75	5.75	5.73	5.72	5.71	5.70	5.69	5.67	5.66	5.65	5.64	5.63	
5	4.57	4.56	4.54	4.53	4.52	4.50	4.50	4.48	4.46	4.45	4.44	4.43	4.41	4.41	4.40	4.37	4.37	
6	3.88	3.87	3.88	3.84	3.83	3.82	3.81	3.79	3.77	3.76	3.75	3.74	3.72	3.71	3.69	3.63	3.67	
7	3.46	3.44	3.43	3.41	3.40	3.39	3.38	3.36	3.34	3.33	3.32	3.30	3.20	3.29	2.25	3.24	3.23	
8	3.16	3.15	3.13	3.12	3.10	3.09	3.08	3.06	3.04	3.03	3.02	3.01	2.99	2.97	2.95	2.94	2.93	
9	2.95	2.94	2.92	2.90	2.89	2.87	2.86	2.84	2.83	2.81	2.80	2.79	2.77	2.76	2.73	2.72	2.71	
10	2.78	2.77	2.75	2.74	2.72	2.71	2.70	2.68	2.66	2.65	2.64	2.62	2.60	2.59	2.55	2.55	2.54	
11	2.66	2.65	2.63	2.61	2.59	2.58	2.57	2.55	2.53	2.52	2.51	2.49	2.47	2.46	2.43	2.42	2.40	
12	2.56	2.54	2.52	2.51	2.49	2.48	2.47	2.44	2.43	2.41	2.40	2.38	2.36	2.35	2.32	2.31	2.30	
13	2.47	2.46	2.44	2.42	2.41	2.39	2.38	2.36	2.34	2.33	2.31	2.30	2.27	2.26	2.23	2.22	2.21	
14	2.40	2.39	2.37	2.35	2.33	2.32	2.31	2.28	2.27	2.26	2.24	2.22	2.20	2.19	2.16	2.14	2.13	
15	2.34	2.33	2.31	2.29	2.27	2.26	2.25	2.22	2.20	2.19	2.18	2.16	2.14	2.12	2.10	2.08	2.07	
16	2.29	2.28	2.25	2.24	2.22	2.21	2.19	2.17	2.15	2.14	2.12	2.11	2.08	2.07	2.04	2.02	2.01	
17	2.24	2.23	2.21	2.19	2.17	2.16	2.15	2.12	2.10	2.09	2.08	2.06	2.03	2.02	1.99	1.97	1.96	
18	2.20	2.19	2.17	2.15	2.13	2.12	2.11	2.08	2.06	2.05	2.04	2.02	1.99	1.98	1.95	1.93	1.92	
19	2.17	2.16	2.13	2.11	2.10	2.08	2.07	2.05	2.03	2.01	2.00	1.98	1.96	1.94	1.91	1.89	1.88	
20	2.14	2.12	2.10	2.08	2.07	2.05	2.04	2.01	1.99	1.98	1.97	1.95	1.92	1.91	1.88	1.86	1.84	
21	2.11	2.10	2.07	2.05	2.04	2.02	2.01	1.98	1.96	1.95	1.94	1.92	1.89	1.88	1.84	1.82	1.81	
22	2.08	2.07	2.03	2.03	2.01	2.00	1.98	1.96	1.94	1.92	1.91	1.89	1.86	1.85	1.82	1.80	1.78	
23	2.06	2.05	2.02	2.00	1.99	1.97	1.96	1.93	1.91	1.90	1.88	1.85	1.84	1.82	1.79	1.77	1.76	
24	2.04	2.03	2.00	1.98	1.97	1.95	1.94	1.91	1.89	1.88	1.86	1.84	1.82	1.80	1.77	1.75	1.73	
25	2.02	2.01	1.98	1.96	1.95	1.93	1.92	1.89	1.87	1.85	1.84	1.82	1.80	1.78	1.75	1.73	1.71	
26	2.00	1.99	1.97	1.95	1.93	1.91	1.90	1.87	1.85	1.84	1.82	1.80	1.78	1.76	1.73	1.71	1.69	
27	1.99	1.97	1.95	1.93	1.91	1.90	1.88	1.86	1.84	1.82	1.81	1.79	1.76	1.74	1.71	1.69	1.67	
28	1.97	1.96	1.93	1.91	1.90	1.88	1.87	1.84	1.82	1.80	1.79	1.77	1.74	1.73	1.60	1.61	1.65	
29	1.96	1.94	1.92	1.90	1.88	1.87	1.85	1.83	1.81	1.79	1.77	1.75	1.73	1.71	1.67	1.65	1.64	
30	1.95	1.93	1.91	1.89	1.87	1.85	1.84	1.81	1.79	1.77	1.76	1.74	1.71	1.70	1.68	1.64	1.62	
32	1.92	1.91	1.88	1.86	1.85	1.83	1.82	1.79	1.77	1.75	1.74	1.71	1.69	1.67	1.63	1.61	1.59	
34	1.90	1.89	1.86	1.84	1.82	1.80	1.80	1.77	1.75	1.73	1.71	1.69	1.66	1.65	1.61	1.59	1.57	
36	1.88	1.87	1.85	1.82	1.81	1.79	1.78	1.75	1.73	1.71	1.69	1.67	1.64	1.62	1.59	1.55	1.55	
38	1.87	1.85	1.83	1.81	1.79	1.77	1.76	1.73	1.71	1.69	1.68	1.65	1.62	1				