

*EISTI – DEPARTEMENT MATHEMATIQUES*

**EXAMEN DE STATISTIQUE I**

*La consultation des documents et calculatrices est interdite.*

*Seul document autorisé : Deux feuilles format A4, manuscrites*

20 novembre 2007 - **DUREE 2h00**

**Consignes :**

- Penser à indiquer à votre nom sur chaque copie.
  - Pour la notation il sera tenu compte de la clarté de l'exposé, de la rigueur du raisonnement et du soin apporté à la copie.
- 

**Exercice 1** (Inégalité de B.T.). –

Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs positives de loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ . Déterminer une valeur de  $\lambda$  afin que

$$P(X \geq 2\lambda) \leq \frac{1}{10}.$$

**Exercice 2** . – (Problème de surbooking)

Un avion peut accepter 300 personnes à bord. La pratique montre que 10% des personnes ayant réservées une place ne se présente pas à l'embarquement. Soit  $X$  le nombre de personnes se présentant à l'embarquement.

- 1) Quelle est la loi de  $X$  ? Par quelle autre loi peut-on approcher la loi de  $X$  ?
- 2) La compagnie aérienne accepte 400 réservations. Quelle est la probabilité qu'il se présente plus de 300 personnes à l'embarquement ?
- 3) Combien la compagnie doit-elle accepter de réservations pour avoir une probabilité de 95% de refuser personne à l'embarquement.

**N.B. on pourra se contenter de valeur approchée dans les calculs et se servir des résultats :  $33^2=1089$  et  $18^2=324$ .**

**Exercice 3** . – (Maximum de vraisemblance)

La hauteur maximale  $X$  de la crue annuelle d'une rivière est observée très attentivement par les services techniques de la ville car une crue supérieure à 6 mètres serait catastrophique. On a modélisé  $X$  comme une variable aléatoire de loi de Rayleigh, c'est-à-dire avec la fonction de densité suivante,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{2\theta}} & x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

où  $\theta > 0$  est un paramètre inconnu (on trouvera les moments de  $X$  à la fin de l'énoncé ainsi que sa fonction de répartition). Durant une période de  $n$  années, on a observé les hauteurs de crues  $X_1, \dots, X_n$ .

**N.B. Chaque question peut être traitée indépendamment des autres.**

1) Montrer que l'estimateur

$$T_n = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n X_i^2$$

est un estimateur du maximum de vraisemblance de  $\theta$ .

- 2)  $T_n$  est-il sans biais ?
- 3) Pouvez-vous établir la convergence presque sûre de  $T_n$  ?
- 4) Déterminer le risque quadratique de  $T_n$  et conclure quant à la convergence en moyenne quadratique.
- 5) Quelle est la loi asymptotique de  $T_n$  ?
- 6)  $T_n$  est-il un estimateur efficace ?
- 7) Durant les 8 dernières années, on a observé les hauteurs de crues suivantes  
2.5 1.8 2.9 0.9 2.1 1.7 2.2 2.8
  - a) Montrer qu'à partir de ces observations l'estimation par maximum de vraisemblance de  $\theta$  est 2.42.
  - b) Une compagnie d'assurance estime qu'une catastrophe ne surviendra pas de si tôt. Ceci peut-il être justifié par les observations des 8 dernières années

Remarque :  $e^{-\frac{6^2}{2 \times 2.42}} = 6 \times 10^{-4}$ .

**N.B.**  $E(X) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \theta$ ,  $\text{var}(X) = \left(\frac{2-\pi}{2}\right) \theta^2$ ,  $\text{var}(X^2) = 4\theta^2$  et  $F(x) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2\theta}}$

### Loi Gaussienne réduite

X étant une variable gaussienne réduite, la table I donne les valeurs de u en fonction de  $P = P(X \geq u)$  et de  $Q = P(X \leq u)$ . La valeur de u se trouve à l'intersection de la ligne et de la colonne dont les chiffres d'entrée ont pour somme P. C'est ainsi que, pour  $P = 0,155 = 0,15 + 0,005$ , on a  $u = 1,0152$ . De manière analogue, pour  $Q = 0,844 = 0,84 + 0,004$ , on a  $u = 1,0110$ .

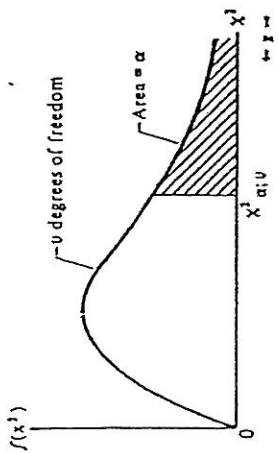
| P    | 0,000  | 0,001  | 0,002  | 0,003  | 0,004  | 0,005  | 0,006  | 0,007  | 0,008  | 0,009  | 0,010  |      |
|------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|------|
| 0,00 | =      | 3,0902 | 2,8782 | 2,7478 | 2,6521 | 2,5758 | 2,5121 | 2,4573 | 2,4089 | 2,3658 | 2,3263 | 0,99 |
| 0,01 | 2,3263 | 2,2904 | 2,2571 | 2,2262 | 2,1973 | 2,1701 | 2,1444 | 2,1201 | 2,0969 | 2,0749 | 2,0537 | 0,98 |
| 0,02 | 2,0537 | 2,0335 | 2,0141 | 1,9954 | 1,9774 | 1,9600 | 1,9431 | 1,9268 | 1,9110 | 1,8957 | 1,8808 | 0,97 |
| 0,03 | 1,8808 | 1,8663 | 1,8522 | 1,8384 | 1,8250 | 1,8119 | 1,7991 | 1,7866 | 1,7744 | 1,7624 | 1,7507 | 0,96 |
| 0,04 | 1,7507 | 1,7392 | 1,7279 | 1,7169 | 1,7060 | 1,6954 | 1,6849 | 1,6747 | 1,6646 | 1,6546 | 1,6449 | 0,95 |
| 0,05 | 1,6449 | 1,6352 | 1,6258 | 1,6164 | 1,6072 | 1,5982 | 1,5893 | 1,5805 | 1,5718 | 1,5632 | 1,5548 | 0,94 |
| 0,06 | 1,5548 | 1,5464 | 1,5382 | 1,5301 | 1,5220 | 1,5141 | 1,5064 | 1,4988 | 1,4909 | 1,4833 | 1,4758 | 0,93 |
| 0,07 | 1,4758 | 1,4684 | 1,4611 | 1,4538 | 1,4466 | 1,4395 | 1,4325 | 1,4255 | 1,4187 | 1,4118 | 1,4051 | 0,92 |
| 0,08 | 1,4051 | 1,3984 | 1,3917 | 1,3852 | 1,3787 | 1,3722 | 1,3658 | 1,3595 | 1,3532 | 1,3469 | 1,3408 | 0,91 |
| 0,09 | 1,3408 | 1,3346 | 1,3285 | 1,3225 | 1,3165 | 1,3106 | 1,3047 | 1,2988 | 1,2930 | 1,2873 | 1,2816 | 0,90 |
| 0,10 | 1,2816 | 1,2759 | 1,2702 | 1,2646 | 1,2591 | 1,2536 | 1,2481 | 1,2426 | 1,2372 | 1,2319 | 1,2265 | 0,89 |
| 0,11 | 1,2265 | 1,2212 | 1,2160 | 1,2107 | 1,2055 | 1,2004 | 1,1952 | 1,1901 | 1,1850 | 1,1800 | 1,1750 | 0,88 |
| 0,12 | 1,1750 | 1,1700 | 1,1650 | 1,1601 | 1,1552 | 1,1503 | 1,1455 | 1,1407 | 1,1359 | 1,1311 | 1,1264 | 0,87 |
| 0,13 | 1,1264 | 1,1217 | 1,1170 | 1,1123 | 1,1077 | 1,1031 | 1,0985 | 1,0939 | 1,0893 | 1,0848 | 1,0803 | 0,86 |
| 0,14 | 1,0803 | 1,0758 | 1,0714 | 1,0669 | 1,0625 | 1,0581 | 1,0537 | 1,0494 | 1,0450 | 1,0407 | 1,0364 | 0,85 |
| 0,15 | 1,0364 | 1,0322 | 1,0279 | 1,0237 | 1,0194 | 1,0152 | 1,0110 | 1,0069 | 1,0027 | 0,9986 | 0,9945 | 0,84 |
| 0,16 | 0,9945 | 0,9904 | 0,9863 | 0,9822 | 0,9782 | 0,9741 | 0,9701 | 0,9661 | 0,9621 | 0,9581 | 0,9542 | 0,83 |
| 0,17 | 0,9542 | 0,9502 | 0,9463 | 0,9424 | 0,9385 | 0,9346 | 0,9307 | 0,9269 | 0,9230 | 0,9192 | 0,9154 | 0,82 |
| 0,18 | 0,9154 | 0,9116 | 0,9078 | 0,9040 | 0,9002 | 0,8965 | 0,8927 | 0,8890 | 0,8853 | 0,8816 | 0,8779 | 0,81 |
| 0,19 | 0,8779 | 0,8742 | 0,8705 | 0,8669 | 0,8633 | 0,8596 | 0,8560 | 0,8524 | 0,8488 | 0,8452 | 0,8416 | 0,80 |
| 0,20 | 0,8416 | 0,8381 | 0,8345 | 0,8310 | 0,8274 | 0,8239 | 0,8204 | 0,8169 | 0,8134 | 0,8099 | 0,8064 | 0,79 |
| 0,21 | 0,8064 | 0,8030 | 0,7995 | 0,7961 | 0,7926 | 0,7892 | 0,7858 | 0,7824 | 0,7790 | 0,7756 | 0,7722 | 0,78 |
| 0,22 | 0,7722 | 0,7688 | 0,7655 | 0,7621 | 0,7588 | 0,7554 | 0,7521 | 0,7488 | 0,7454 | 0,7421 | 0,7388 | 0,77 |
| 0,23 | 0,7388 | 0,7356 | 0,7323 | 0,7290 | 0,7257 | 0,7225 | 0,7192 | 0,7160 | 0,7128 | 0,7095 | 0,7063 | 0,76 |
| 0,24 | 0,7063 | 0,7031 | 0,6999 | 0,6967 | 0,6935 | 0,6903 | 0,6871 | 0,6840 | 0,6808 | 0,6776 | 0,6745 | 0,75 |
| 0,25 | 0,6745 | 0,6713 | 0,6682 | 0,6651 | 0,6620 | 0,6588 | 0,6557 | 0,6526 | 0,6495 | 0,6464 | 0,6433 | 0,74 |
| 0,26 | 0,6433 | 0,6403 | 0,6372 | 0,6341 | 0,6311 | 0,6280 | 0,6250 | 0,6219 | 0,6189 | 0,6158 | 0,6128 | 0,73 |
| 0,27 | 0,6128 | 0,6098 | 0,6068 | 0,6038 | 0,6008 | 0,5978 | 0,5948 | 0,5918 | 0,5888 | 0,5858 | 0,5828 | 0,72 |
| 0,28 | 0,5828 | 0,5799 | 0,5769 | 0,5740 | 0,5710 | 0,5681 | 0,5651 | 0,5622 | 0,5592 | 0,5563 | 0,5534 | 0,71 |
| 0,29 | 0,5534 | 0,5505 | 0,5476 | 0,5446 | 0,5417 | 0,5388 | 0,5359 | 0,5330 | 0,5302 | 0,5273 | 0,5244 | 0,70 |
| 0,30 | 0,5244 | 0,5215 | 0,5187 | 0,5158 | 0,5129 | 0,5101 | 0,5072 | 0,5044 | 0,5015 | 0,4987 | 0,4959 | 0,69 |
| 0,31 | 0,4959 | 0,4930 | 0,4902 | 0,4874 | 0,4845 | 0,4817 | 0,4789 | 0,4761 | 0,4733 | 0,4705 | 0,4677 | 0,68 |
| 0,32 | 0,4677 | 0,4649 | 0,4621 | 0,4593 | 0,4565 | 0,4538 | 0,4510 | 0,4482 | 0,4454 | 0,4427 | 0,4399 | 0,67 |
| 0,33 | 0,4399 | 0,4372 | 0,4344 | 0,4316 | 0,4289 | 0,4261 | 0,4234 | 0,4207 | 0,4179 | 0,4152 | 0,4125 | 0,66 |
| 0,34 | 0,4125 | 0,4097 | 0,4070 | 0,4043 | 0,4016 | 0,3989 | 0,3961 | 0,3934 | 0,3907 | 0,3880 | 0,3853 | 0,65 |
| 0,35 | 0,3853 | 0,3826 | 0,3799 | 0,3772 | 0,3745 | 0,3719 | 0,3692 | 0,3665 | 0,3638 | 0,3611 | 0,3585 | 0,64 |
| 0,36 | 0,3585 | 0,3558 | 0,3531 | 0,3505 | 0,3478 | 0,3451 | 0,3425 | 0,3398 | 0,3372 | 0,3345 | 0,3319 | 0,63 |
| 0,37 | 0,3319 | 0,3292 | 0,3266 | 0,3239 | 0,3213 | 0,3186 | 0,3160 | 0,3134 | 0,3107 | 0,3081 | 0,3055 | 0,62 |
| 0,38 | 0,3055 | 0,3029 | 0,3002 | 0,2976 | 0,2950 | 0,2924 | 0,2898 | 0,2871 | 0,2845 | 0,2819 | 0,2793 | 0,61 |
| 0,39 | 0,2793 | 0,2767 | 0,2741 | 0,2715 | 0,2689 | 0,2663 | 0,2637 | 0,2611 | 0,2585 | 0,2559 | 0,2533 | 0,60 |
| 0,40 | 0,2533 | 0,2508 | 0,2482 | 0,2456 | 0,2430 | 0,2404 | 0,2378 | 0,2353 | 0,2327 | 0,2301 | 0,2275 | 0,59 |
| 0,41 | 0,2275 | 0,2250 | 0,2224 | 0,2198 | 0,2173 | 0,2147 | 0,2121 | 0,2096 | 0,2070 | 0,2045 | 0,2019 | 0,58 |
| 0,42 | 0,2019 | 0,1993 | 0,1968 | 0,1942 | 0,1917 | 0,1891 | 0,1866 | 0,1840 | 0,1815 | 0,1789 | 0,1764 | 0,57 |
| 0,43 | 0,1764 | 0,1738 | 0,1713 | 0,1687 | 0,1662 | 0,1637 | 0,1611 | 0,1586 | 0,1560 | 0,1535 | 0,1510 | 0,56 |
| 0,44 | 0,1510 | 0,1484 | 0,1459 | 0,1434 | 0,1408 | 0,1383 | 0,1358 | 0,1332 | 0,1307 | 0,1282 | 0,1257 | 0,55 |
| 0,45 | 0,1257 | 0,1231 | 0,1206 | 0,1181 | 0,1156 | 0,1130 | 0,1105 | 0,1080 | 0,1055 | 0,1030 | 0,1004 | 0,54 |
| 0,46 | 0,1004 | 0,0979 | 0,0954 | 0,0929 | 0,0904 | 0,0878 | 0,0853 | 0,0828 | 0,0803 | 0,0778 | 0,0753 | 0,53 |
| 0,47 | 0,0753 | 0,0728 | 0,0702 | 0,0677 | 0,0652 | 0,0627 | 0,0602 | 0,0577 | 0,0552 | 0,0527 | 0,0502 | 0,52 |
| 0,48 | 0,0502 | 0,0476 | 0,0451 | 0,0426 | 0,0401 | 0,0376 | 0,0351 | 0,0326 | 0,0301 | 0,0276 | 0,0251 | 0,51 |
| 0,49 | 0,0251 | 0,0226 | 0,0201 | 0,0175 | 0,0150 | 0,0125 | 0,0100 | 0,0075 | 0,0050 | 0,0025 | 0,0000 | 0,50 |
|      | 0,010  | 0,009  | 0,008  | 0,007  | 0,006  | 0,005  | 0,004  | 0,003  | 0,002  | 0,001  | 0,000  | Q    |

#### Grandes valeurs de u

| P | $10^{-1}$ | $10^{-2}$ | $10^{-3}$ | $10^{-4}$ | $10^{-5}$ | $10^{-6}$ |
|---|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| u | 3,7190    | 4,2649    | 4,7534    | 5,1993    | 5,6120    | 5,9878    |

(1) Les tables sont extraites de l'ouvrage Tables Statistiques publié par l'Institut de Statistique de l'Université de Paris.

Table A-2 Chi square distribution [2, 3]\*



| $\alpha$ | .995   | .99    | .98    | .975   | .95    | .90    | .80    | .75    | .70    | .50    |
|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1        | .00393 | .0157  | .01628 | .01982 | .00393 | .0138  | .0642  | .102   | .148   | .455   |
| 2        | .0100  | .0201  | .0404  | .0506  | .103   | .211   | .446   | .575   | .713   | 1.386  |
| 3        | .0717  | .115   | .185   | .216   | .352   | .584   | 1.005  | 1.213  | 1.424  | 2.366  |
| 4        | .207   | .297   | .429   | .484   | .711   | 1.064  | 1.649  | 1.923  | 2.195  | 3.357  |
| 5        | .412   | .554   | .752   | .831   | 1.145  | 1.610  | 2.343  | 2.675  | 3.000  | 4.351  |
| 6        | .676   | .872   | 1.134  | 1.237  | 1.635  | 2.204  | 3.070  | 3.455  | 3.828  | 5.348  |
| 7        | .989   | 1.239  | 1.564  | 1.690  | 2.167  | 2.833  | 3.822  | 4.235  | 4.671  | 6.346  |
| 8        | 1.344  | 1.646  | 2.032  | 2.180  | 2.733  | 3.490  | 4.594  | 5.071  | 5.527  | 7.344  |
| 9        | 1.735  | 2.088  | 2.532  | 2.700  | 3.325  | 4.168  | 5.380  | 5.899  | 6.393  | 8.343  |
| 10       | 2.156  | 2.558  | 3.059  | 3.247  | 3.940  | 4.865  | 6.179  | 6.737  | 7.267  | 9.342  |
| 11       | 2.603  | 3.053  | 3.609  | 3.816  | 4.575  | 5.578  | 6.989  | 7.584  | 8.148  | 10.341 |
| 12       | 3.074  | 3.571  | 4.178  | 4.404  | 5.226  | 6.304  | 7.807  | 8.438  | 9.034  | 11.340 |
| 13       | 3.565  | 4.107  | 4.765  | 5.009  | 5.892  | 7.042  | 8.634  | 9.299  | 9.926  | 12.340 |
| 14       | 4.075  | 4.660  | 5.368  | 5.629  | 6.571  | 7.790  | 9.467  | 10.165 | 10.821 | 13.339 |
| 15       | 4.601  | 5.229  | 5.985  | 6.262  | 7.261  | 8.547  | 10.307 | 11.036 | 11.721 | 14.339 |
| 16       | 5.142  | 5.812  | 6.614  | 6.908  | 7.962  | 9.312  | 11.152 | 11.912 | 12.624 | 15.338 |
| 17       | 5.697  | 6.408  | 7.255  | 7.564  | 8.672  | 10.085 | 12.002 | 12.792 | 13.531 | 16.338 |
| 18       | 6.265  | 7.015  | 7.906  | 8.231  | 9.390  | 10.865 | 12.857 | 13.675 | 14.440 | 17.338 |
| 19       | 6.844  | 7.633  | 8.567  | 8.907  | 10.117 | 11.651 | 13.716 | 14.562 | 15.352 | 18.338 |
| 20       | 7.434  | 8.260  | 9.237  | 9.591  | 10.851 | 12.443 | 14.578 | 15.452 | 16.266 | 19.337 |
| 21       | 8.034  | 8.897  | 9.915  | 10.283 | 11.591 | 13.240 | 15.445 | 16.344 | 17.182 | 20.337 |
| 22       | 8.643  | 9.542  | 10.600 | 10.982 | 12.338 | 14.041 | 16.314 | 17.240 | 18.101 | 21.337 |
| 23       | 9.260  | 10.196 | 11.293 | 11.688 | 13.091 | 14.848 | 17.187 | 18.137 | 19.021 | 22.337 |
| 24       | 9.886  | 10.856 | 11.992 | 12.401 | 13.848 | 15.659 | 18.062 | 19.037 | 19.943 | 23.337 |
| 25       | 10.520 | 11.524 | 12.697 | 13.120 | 14.611 | 16.473 | 18.940 | 19.939 | 20.867 | 24.337 |
| 26       | 11.160 | 12.198 | 13.409 | 13.844 | 15.379 | 17.292 | 19.820 | 20.843 | 21.792 | 25.336 |
| 27       | 11.808 | 12.879 | 14.125 | 14.573 | 16.151 | 18.114 | 20.703 | 21.749 | 22.719 | 26.336 |
| 28       | 12.461 | 13.565 | 14.847 | 15.308 | 16.928 | 18.919 | 21.588 | 22.647 | 23.647 | 27.336 |
| 29       | 13.121 | 14.256 | 15.574 | 16.047 | 17.708 | 19.768 | 22.475 | 23.567 | 24.577 | 28.336 |
| 30       | 13.787 | 14.953 | 16.306 | 16.791 | 18.493 | 20.599 | 23.364 | 24.478 | 25.508 | 29.336 |

\* Tabulation of the values of  $\alpha$  versus  $\chi^2_{1-\alpha}$  for different values of  $\nu$ .

$$\alpha = P(\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha}) = \int_{\chi^2_{1-\alpha}}^{\infty} f(\chi^2) d\chi^2$$

| $\alpha$ | .30    | .25    | .20    | .10    | .05    | .025   | .02    | .01    | .005   | .001   |
|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1        | 1.074  | 1.323  | 1.642  | 2.706  | 3.841  | 5.024  | 5.412  | 6.635  | 7.879  | 10.827 |
| 2        | 2.408  | 2.773  | 3.219  | 4.605  | 5.991  | 7.378  | 7.824  | 9.210  | 10.597 | 13.815 |
| 3        | 3.665  | 4.108  | 4.642  | 6.251  | 7.815  | 9.348  | 9.837  | 11.345 | 12.838 | 16.268 |
| 4        | 4.878  | 5.385  | 5.989  | 7.779  | 9.488  | 11.143 | 11.668 | 13.277 | 14.860 | 18.465 |
| 5        | 6.064  | 6.626  | 7.289  | 9.236  | 11.070 | 12.832 | 13.388 | 15.086 | 16.750 | 20.517 |
| 6        | 7.231  | 7.841  | 8.558  | 10.645 | 12.592 | 14.449 | 15.033 | 16.812 | 18.548 | 22.457 |
| 7        | 8.383  | 9.037  | 9.803  | 12.017 | 14.067 | 16.013 | 16.622 | 18.475 | 20.278 | 24.322 |
| 8        | 9.524  | 10.219 | 11.030 | 13.362 | 15.507 | 17.535 | 18.168 | 20.090 | 21.955 | 26.125 |
| 9        | 10.656 | 11.389 | 12.242 | 14.684 | 16.919 | 19.023 | 19.679 | 21.666 | 23.589 | 27.877 |
| 10       | 11.781 | 12.549 | 13.442 | 15.987 | 18.307 | 20.483 | 21.161 | 23.209 | 25.188 | 29.588 |
| 11       | 12.899 | 13.701 | 14.631 | 17.275 | 19.675 | 21.920 | 22.618 | 24.725 | 26.757 | 31.264 |
| 12       | 14.011 | 14.845 | 15.812 | 18.549 | 21.026 | 23.337 | 24.054 | 26.217 | 28.300 | 32.909 |
| 13       | 15.119 | 15.984 | 16.985 | 19.812 | 22.362 | 24.736 | 25.472 | 27.688 | 29.819 | 34.528 |
| 14       | 16.222 | 17.117 | 18.151 | 21.064 | 23.685 | 26.119 | 26.873 | 29.141 | 31.319 | 36.123 |
| 15       | 17.322 | 18.245 | 19.311 | 22.307 | 24.996 | 27.488 | 28.259 | 30.578 | 32.801 | 37.697 |
| 16       | 18.418 | 19.369 | 20.465 | 23.542 | 26.296 | 28.845 | 29.633 | 32.000 | 34.267 | 39.252 |
| 17       | 19.511 | 20.489 | 21.615 | 24.769 | 27.587 | 30.191 | 30.995 | 33.409 | 35.718 | 40.790 |
| 18       | 20.601 | 21.605 | 22.760 | 25.989 | 28.869 | 31.526 | 32.346 | 34.805 | 37.156 | 42.312 |
| 19       | 21.689 | 22.718 | 23.900 | 27.204 | 30.144 | 32.852 | 33.687 | 36.191 | 38.582 | 43.820 |
| 20       | 22.775 | 23.828 | 25.038 | 28.412 | 31.410 | 34.170 | 35.020 | 37.566 | 39.997 | 45.315 |
| 21       | 23.858 | 24.935 | 26.171 | 29.615 | 32.671 | 35.479 | 36.343 | 38.932 | 41.401 | 46.797 |
| 22       | 24.939 | 26.039 | 27.301 | 30.813 | 33.924 | 36.781 | 37.659 | 40.289 | 42.796 | 48.268 |
| 23       | 26.018 | 27.141 | 28.429 | 32.007 | 35.172 | 38.076 | 38.968 | 41.638 | 44.181 | 49.728 |
| 24       | 27.096 | 28.241 | 29.551 | 33.196 | 36.415 | 39.364 | 40.720 | 42.980 | 45.558 | 51.179 |
| 25       | 28.172 | 29.339 | 30.675 | 34.382 | 37.652 | 40.646 | 41.566 | 44.314 | 46.928 | 52.620 |
| 26       | 29.246 | 30.434 | 31.795 | 35.563 | 38.885 | 41.923 | 42.856 | 45.642 | 48.290 | 54.052 |
| 27       | 30.319 | 31.528 | 32.912 | 36.741 | 40.113 | 43.194 | 44.140 | 46.963 | 49.645 | 55.476 |
| 28       | 31.391 | 32.620 | 34.027 | 37.916 | 41.337 | 44.461 | 45.419 | 48.278 | 50.993 | 56.893 |
| 29       | 32.461 | 33.711 | 35.139 | 39.087 | 42.557 | 45.722 | 46.693 | 49.588 | 52.336 | 58.302 |
| 30       | 33.530 | 34.800 | 36.250 | 40.256 | 43.773 | 46.979 | 47.962 | 50.892 | 53.672 | 59.703 |

\* Tabulation of the values of  $\alpha$  versus  $\chi^2_{1-\alpha}$  for different values of  $\nu$ .

EISTI – DEPARTEMENT MATHÉMATIQUES

EXAMEN DE STATISTIQUE I

*La consultation des documents et calculatrices est interdite.  
Seul document autorisé : Deux feuilles format A4, manuscrites*

21 avril 2008 - DUREE 2h00

**Consignes :**

- Penser à indiquer à votre nom sur chaque copie.
  - Pour la notation il sera tenu compte de la clarté de l'exposé, de la rigueur du raisonnement et du soin apporté à la copie.
- 

**Exercice 1 . – (Inégalité de B.T.)**

Lors d'un examen un candidat doit répondre à deux questions type QCM. Pour chacune des deux questions, quatre réponses sont proposées dont une seule est exacte. Le candidat répond en choisissant au hasard une réponse pour chaque question. On définit alors les variables aléatoires indépendantes de même loi  $X_1$  et  $X_2$  telles que

$X_i=1$  si la réponse à la  $i$ ème question est juste

$X_i=0$  si la réponse à la  $i$ ème question est fausse

- 1) Le nombre de bonnes réponses est donné par la variable aléatoire  $Y$  définie par

$$Y = X_1 + X_2$$

Quelle est la loi de  $Y$  (support et fonction de masse) ? Calculer son espérance et sa variance.

- 2) L'examen est noté sur 6. On attribue 3 points à chaque bonne réponse et on retire 1 point par réponse fausse. Soit  $Z$  la variable aléatoire représentant la note du candidat.
- a) Montrer que  $Z = 4Y - 2$ .
  - b) En déduire l'espérance et la variance de  $Z$
  - c) Trouver une majoration de la probabilité pour que le candidat ait une note supérieure strictement à la moyenne.

**Exercice 2 . – (Problème de stock)**

A l'entrée d'une station de métro, un marchand de journaux remarque qu'en moyenne, entre 8h et 9h, une personne sur 10 achète le journal.

- 1) Sachant qu'il passe 400 personnes entre 8h et 9h, indiquer la loi de probabilité du nombre  $X$  de journaux vendus pendant cette période.
- 2) Calculer une valeur approchée de la probabilité pour que le marchand vende moins de 30 journaux.
- 3) Combien faudrait-il qu'il commande de journaux pour être certain à 95% de ne pas tomber en rupture de stock ?

**Exercice 3 . - (Estimateur)**

Soit  $X_1, \dots, X_n$  un échantillon de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de même loi que  $X$  dont la fonction de densité  $f_\theta$  définie par

$$f_\theta(x) = \begin{cases} (\theta - 2)x & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ \theta x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{sin on} \end{cases}$$

- 1) Calculer l'espérance de la moyenne  $\bar{X}_n$  et en déduire l'expression de  $T$  un estimateur sans biais de  $\theta$ .
- 2) Etudier la convergence en probabilité de l'estimateur  $T$ .
- 3) Calculer le risque quadratique
- 4) Quelle est la loi asymptotique de  $T$  (convergence en loi) ?
- 5) On considère maintenant l'estimateur  $Q$  défini par

$$Q = \frac{3}{2}X + 1$$

Quel est le meilleur estimateur entre  $Q$  et  $T$  ?

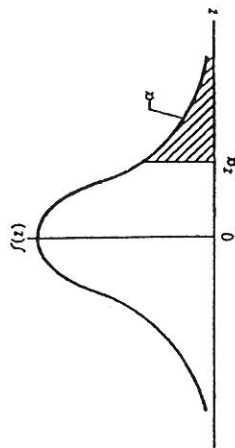


Table A-1 Normal distribution [1]:

| $z_\alpha$ | .00   | .01   | .02   | .03   | .04   | .05   | .06   | .07   | .08   | .09   |
|------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0.0        | .5000 | .4960 | .4920 | .4880 | .4840 | .4801 | .4761 | .4721 | .4681 | .4641 |
| 0.1        | .4602 | .4562 | .4522 | .4483 | .4443 | .4404 | .4364 | .4325 | .4286 | .4247 |
| 0.2        | .4207 | .4168 | .4129 | .4090 | .4052 | .4013 | .3974 | .3936 | .3897 | .3859 |
| 0.3        | .3821 | .3783 | .3745 | .3707 | .3669 | .3632 | .3594 | .3557 | .3520 | .3483 |
| 0.4        | .3446 | .3409 | .3372 | .3336 | .3300 | .3264 | .3228 | .3192 | .3156 | .3121 |
| 0.5        | .3085 | .3050 | .3015 | .2981 | .2946 | .2912 | .2877 | .2843 | .2810 | .2776 |
| 0.6        | .2743 | .2709 | .2676 | .2643 | .2611 | .2578 | .2546 | .2514 | .2483 | .2451 |
| 0.7        | .2420 | .2389 | .2358 | .2327 | .2296 | .2266 | .2236 | .2206 | .2177 | .2148 |
| 0.8        | .2119 | .2090 | .2061 | .2033 | .2005 | .1977 | .1949 | .1922 | .1894 | .1867 |
| 0.9        | .1841 | .1814 | .1788 | .1762 | .1736 | .1711 | .1685 | .1660 | .1635 | .1611 |
| 1.0        | .1587 | .1562 | .1539 | .1515 | .1492 | .1469 | .1446 | .1423 | .1401 | .1379 |
| 1.1        | .1357 | .1335 | .1314 | .1292 | .1271 | .1251 | .1230 | .1210 | .1190 | .1170 |
| 1.2        | .1151 | .1131 | .1112 | .1093 | .1075 | .1056 | .1038 | .1020 | .1003 | .0985 |
| 1.3        | .0968 | .0951 | .0934 | .0918 | .0901 | .0885 | .0869 | .0853 | .0838 | .0823 |
| 1.4        | .0808 | .0793 | .0778 | .0764 | .0749 | .0735 | .0721 | .0708 | .0694 | .0681 |

\* Tabulation of the values of  $\alpha$  versus  $z_\alpha$  for the standardized normal curve.

$$\alpha = P(z > z_\alpha) = \int_{z_\alpha}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz$$

$\infty$  = area under the standardized normal curve from  $z = z_\alpha$  to  $z = \infty$ .

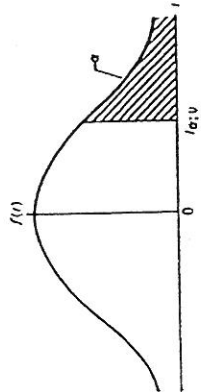
Table A-1 (cont.)

| $z_\alpha$ | .00    | .01    | .02    | .03    | .04    | .05    | .06    | .07    | .08    | .09    |
|------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1.5        | .0668  | .0655  | .0643  | .0630  | .0618  | .0606  | .0594  | .0582  | .0571  | .0559  |
| 1.6        | .0548  | .0537  | .0526  | .0516  | .0505  | .0495  | .0485  | .0475  | .0465  | .0455  |
| 1.7        | .0446  | .0436  | .0427  | .0418  | .0409  | .0401  | .0392  | .0384  | .0375  | .0367  |
| 1.8        | .0359  | .0351  | .0344  | .0336  | .0329  | .0322  | .0314  | .0307  | .0301  | .0294  |
| 1.9        | .0287  | .0281  | .0274  | .0268  | .0262  | .0256  | .0250  | .0244  | .0239  | .0233  |
| 2.0        | .0228  | .0222  | .0217  | .0212  | .0207  | .0202  | .0197  | .0192  | .0188  | .0183  |
| 2.1        | .0179  | .0174  | .0170  | .0166  | .0162  | .0158  | .0154  | .0150  | .0146  | .0143  |
| 2.2        | .0139  | .0136  | .0132  | .0129  | .0125  | .0122  | .0119  | .0116  | .0113  | .0110  |
| 2.3        | .0107  | .0104  | .0102  | .00990 | .00964 | .00939 | .00914 | .00889 | .00866 | .00842 |
| 2.4        | .00820 | .00798 | .00776 | .00755 | .00734 | .00714 | .00693 | .00676 | .00657 | .00639 |
| 2.5        | .00621 | .00604 | .00587 | .00570 | .00554 | .00539 | .00523 | .00508 | .00494 | .00480 |
| 2.6        | .00466 | .00453 | .00440 | .00427 | .00415 | .00402 | .00391 | .00379 | .00368 | .00357 |
| 2.7        | .00347 | .00336 | .00326 | .00317 | .00307 | .00298 | .00289 | .00280 | .00272 | .00264 |
| 2.8        | .00256 | .00248 | .00240 | .00233 | .00226 | .00219 | .00212 | .00205 | .00199 | .00193 |
| 2.9        | .00187 | .00181 | .00175 | .00169 | .00164 | .00159 | .00154 | .00149 | .00144 | .00139 |

| $z_\alpha$ | .0     | .1     | .2     | .3      | .4       | .5      | .6      | .7       | .8       | .9       |
|------------|--------|--------|--------|---------|----------|---------|---------|----------|----------|----------|
| 3          | .00135 | .00988 | .00687 | .00483  | .00337   | .00233  | .00159  | .00108   | .00723   | .00481   |
| 4          | .00317 | .00207 | .00133 | .000854 | .000541* | .000340 | .000211 | .000130  | .0000793 | .0000479 |
| 5          | .00287 | .00170 | .00096 | .000579 | .000333  | .000190 | .000107 | .0000599 | .0000332 | .0000182 |
| 6          | .00987 | .00530 | .00282 | .00149  | .000777  | .000402 | .000206 | .000104  | .0000523 | .0000260 |

\*.00541 means .00000541.

Table A-3  $f$  distribution [2, 4]\*



| $\alpha$ | .40  | .30  | .20  | .10  | .050 | .025 | .010 | .005 | .001 | .0005 |
|----------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-------|
| 1        | .375 | .377 | .376 | .378 | .379 | .380 | .381 | .382 | .383 | .384  |
| 2        | .289 | .291 | .290 | .292 | .293 | .294 | .295 | .296 | .297 | .298  |
| 3        | .271 | .273 | .272 | .274 | .275 | .276 | .277 | .278 | .279 | .280  |
| 5        | .267 | .269 | .268 | .270 | .271 | .272 | .273 | .274 | .275 | .276  |
| 6        | .265 | .267 | .266 | .268 | .269 | .270 | .271 | .272 | .273 | .274  |
| 7        | .263 | .265 | .264 | .266 | .267 | .268 | .269 | .270 | .271 | .272  |
| 8        | .262 | .264 | .263 | .265 | .266 | .267 | .268 | .269 | .270 | .271  |
| 9        | .261 | .263 | .262 | .264 | .265 | .266 | .267 | .268 | .269 | .270  |
| 10       | .260 | .262 | .261 | .263 | .264 | .265 | .266 | .267 | .268 | .269  |
| 11       | .259 | .261 | .260 | .262 | .263 | .264 | .265 | .266 | .267 | .268  |
| 12       | .259 | .260 | .260 | .261 | .262 | .263 | .264 | .265 | .266 | .267  |
| 13       | .259 | .259 | .259 | .260 | .261 | .262 | .263 | .264 | .265 | .266  |
| 14       | .258 | .258 | .258 | .259 | .260 | .261 | .262 | .263 | .264 | .265  |
| 15       | .258 | .258 | .258 | .258 | .259 | .260 | .261 | .262 | .263 | .264  |
| 16       | .258 | .258 | .258 | .258 | .258 | .259 | .260 | .261 | .262 | .263  |
| 17       | .257 | .257 | .257 | .257 | .258 | .259 | .260 | .261 | .262 | .263  |
| 18       | .257 | .257 | .257 | .257 | .257 | .258 | .259 | .260 | .261 | .262  |
| 19       | .257 | .257 | .257 | .257 | .257 | .257 | .258 | .259 | .260 | .261  |
| 20       | .257 | .257 | .257 | .257 | .257 | .257 | .257 | .258 | .259 | .260  |
| 21       | .257 | .257 | .257 | .257 | .257 | .257 | .257 | .257 | .258 | .259  |
| 22       | .256 | .256 | .256 | .256 | .256 | .257 | .258 | .259 | .260 | .261  |
| 23       | .256 | .256 | .256 | .256 | .256 | .256 | .257 | .258 | .259 | .260  |
| 24       | .256 | .256 | .256 | .256 | .256 | .256 | .256 | .257 | .258 | .259  |
| 25       | .256 | .256 | .256 | .256 | .256 | .256 | .256 | .256 | .257 | .258  |
| 26       | .256 | .256 | .256 | .256 | .256 | .256 | .256 | .256 | .256 | .257  |
| 27       | .256 | .256 | .256 | .256 | .256 | .256 | .256 | .256 | .256 | .256  |
| 28       | .256 | .256 | .256 | .256 | .256 | .256 | .256 | .256 | .256 | .256  |
| 29       | .256 | .256 | .256 | .256 | .256 | .256 | .256 | .256 | .256 | .256  |
| 30       | .256 | .256 | .256 | .256 | .256 | .256 | .256 | .256 | .256 | .256  |
| 40       | .255 | .255 | .255 | .255 | .255 | .255 | .255 | .255 | .255 | .255  |
| 50       | .255 | .255 | .255 | .255 | .255 | .255 | .255 | .255 | .255 | .255  |
| 100      | .254 | .254 | .254 | .254 | .254 | .254 | .254 | .254 | .254 | .254  |
| 200      | .254 | .254 | .254 | .254 | .254 | .254 | .254 | .254 | .254 | .254  |
| 500      | .253 | .253 | .253 | .253 | .253 | .253 | .253 | .253 | .253 | .253  |
| $\infty$ | .253 | .254 | .254 | .254 | .254 | .254 | .254 | .254 | .254 | .254  |

\* Evaluation of the values of  $\alpha$  versus  $f_{\alpha, \nu}$  for different values of  $\nu$ .

$$\alpha = P(U > f_{\alpha, \nu}) = \int_{f_{\alpha, \nu}}^{\infty} f(u) du$$

APPENDIX

Table A-4  $F$  distribution [4]

Tabulation of the values of  $F_{\alpha, \nu_1, \nu_2}$  versus  $\nu_1$  and  $\nu_2$ \*

|          | Degree of freedom for the numerator ( $\nu_1$ ) |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |          |      |  |
|----------|---|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|----------|------|--|
|          | 1   | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   | 15   | 20   | 30   | 50   | 100  | 200  | 500  | $\infty$ |      |  |
| 1        | 39.9  | 49.5 | 53.6 | 55.8 | 57.2 | 58.2 | 58.9 | 59.4 | 59.9 | 60.2 | 61.2 | 61.7 | 62.3 | 62.7 | 63.0 | 63.2 | 63.3 | 63.3     | 63.3 |  |
| 2        | 8.33  | 9.00 | 9.16 | 9.24 | 9.29 | 9.33 | 9.35 | 9.37 | 9.38 | 9.39 | 9.42 | 9.44 | 9.46 | 9.47 | 9.48 | 9.49 | 9.49 | 9.49     | 9.49 |  |
| 3        | 5.54  | 5.46 | 5.39 | 5.34 | 5.31 | 5.28 | 5.25 | 5.24 | 5.23 | 5.20 | 5.18 | 5.17 | 5.15 | 5.14 | 5.14 | 5.14 | 5.14 | 5.14     | 5.13 |  |
| 4        | 4.54  | 4.32 | 4.19 | 4.11 | 4.05 | 4.01 | 3.98 | 3.95 | 3.94 | 3.92 | 3.87 | 3.84 | 3.82 | 3.80 | 3.78 | 3.77 | 3.76 | 3.76     | 3.76 |  |
| 5        | 4.06  | 3.78 | 3.63 | 3.52 | 3.45 | 3.40 | 3.37 | 3.34 | 3.32 | 3.30 | 3.24 | 3.21 | 3.17 | 3.15 | 3.13 | 3.12 | 3.11 | 3.11     | 3.10 |  |
| 6        | 3.78  | 3.46 | 3.29 | 3.18 | 3.11 | 3.05 | 3.01 | 2.98 | 2.96 | 2.94 | 2.87 | 2.84 | 2.80 | 2.77 | 2.75 | 2.73 | 2.73 | 2.73     | 2.72 |  |
| 7        | 3.59  | 3.26 | 3.07 | 2.96 | 2.88 | 2.83 | 2.78 | 2.75 | 2.72 | 2.70 | 2.63 | 2.59 | 2.56 | 2.52 | 2.50 | 2.48 | 2.48 | 2.48     | 2.47 |  |
| 8        | 3.46  | 3.11 | 2.92 | 2.81 | 2.73 | 2.67 | 2.62 | 2.59 | 2.56 | 2.54 | 2.46 | 2.42 | 2.38 | 2.35 | 2.32 | 2.31 | 2.30 | 2.30     | 2.29 |  |
| 9        | 3.36  | 3.01 | 2.81 | 2.69 | 2.61 | 2.55 | 2.51 | 2.47 | 2.44 | 2.42 | 2.34 | 2.30 | 2.25 | 2.22 | 2.19 | 2.17 | 2.17 | 2.17     | 2.16 |  |
| 10       | 3.28  | 2.92 | 2.73 | 2.61 | 2.52 | 2.46 | 2.41 | 2.38 | 2.35 | 2.32 | 2.24 | 2.20 | 2.16 | 2.12 | 2.09 | 2.07 | 2.06 | 2.06     | 2.06 |  |
| 11       | 3.23  | 2.86 | 2.66 | 2.54 | 2.45 | 2.39 | 2.34 | 2.30 | 2.27 | 2.25 | 2.17 | 2.12 | 2.08 | 2.04 | 2.00 | 1.99 | 1.98 | 1.98     | 1.97 |  |
| 12       | 3.18  | 2.81 | 2.61 | 2.48 | 2.39 | 2.33 | 2.28 | 2.24 | 2.21 | 2.19 | 2.10 | 2.06 | 2.01 | 1.97 | 1.94 | 1.92 | 1.91 | 1.91     | 1.90 |  |
| 13       | 3.14  | 2.76 | 2.56 | 2.43 | 2.35 | 2.28 | 2.23 | 2.20 | 2.16 | 2.14 | 2.05 | 2.01 | 1.96 | 1.92 | 1.88 | 1.86 | 1.85 | 1.85     | 1.85 |  |
| 14       | 3.10  | 2.73 | 2.52 | 2.39 | 2.31 | 2.24 | 2.19 | 2.15 | 2.12 | 2.10 | 2.01 | 1.96 | 1.91 | 1.87 | 1.83 | 1.82 | 1.80 | 1.80     | 1.80 |  |
| 15       | 3.07  | 2.70 | 2.49 | 2.36 | 2.27 | 2.21 | 2.16 | 2.12 | 2.09 | 2.06 | 1.97 | 1.92 | 1.87 | 1.83 | 1.79 | 1.77 | 1.76 | 1.76     | 1.76 |  |
| 16       | 3.05  | 2.67 | 2.46 | 2.33 | 2.24 | 2.18 | 2.13 | 2.09 | 2.06 | 2.03 | 1.94 | 1.89 | 1.84 | 1.79 | 1.76 | 1.74 | 1.73 | 1.73     | 1.72 |  |
| 17       | 3.03  | 2.64 | 2.44 | 2.31 | 2.22 | 2.15 | 2.10 | 2.06 | 2.03 | 2.00 | 1.91 | 1.86 | 1.81 | 1.76 | 1.73 | 1.71 | 1.69 | 1.69     | 1.69 |  |
| 18       | 3.01  | 2.62 | 2.42 | 2.29 | 2.20 | 2.13 | 2.08 | 2.04 | 2.00 | 1.98 | 1.89 | 1.84 | 1.78 | 1.74 | 1.70 | 1.68 | 1.67 | 1.66     | 1.66 |  |
| 19       | 2.99  | 2.61 | 2.40 | 2.27 | 2.18 | 2.11 | 2.06 | 2.02 | 1.98 | 1.96 | 1.86 | 1.81 | 1.76 | 1.71 | 1.67 | 1.65 | 1.64 | 1.64     | 1.63 |  |
| 20       | 2.97  | 2.59 | 2.38 | 2.25 | 2.16 | 2.09 | 2.04 | 2.00 | 1.96 | 1.94 | 1.84 | 1.79 | 1.74 | 1.69 | 1.65 | 1.63 | 1.62 | 1.62     | 1.61 |  |
| 22       | 2.95  | 2.56 | 2.35 | 2.22 | 2.13 | 2.06 | 2.01 | 1.97 | 1.93 | 1.90 | 1.81 | 1.76 | 1.70 | 1.65 | 1.61 | 1.59 | 1.58 | 1.57     | 1.57 |  |
| 24       | 2.93  | 2.54 | 2.33 | 2.19 | 2.10 | 2.04 | 1.98 | 1.94 | 1.91 | 1.88 | 1.78 | 1.73 | 1.67 | 1.62 | 1.58 | 1.56 | 1.54 | 1.53     | 1.53 |  |
| 26       | 2.91  | 2.52 | 2.31 | 2.17 | 2.08 | 2.01 | 1.96 | 1.92 | 1.88 | 1.86 | 1.76 | 1.71 | 1.65 | 1.59 | 1.55 | 1.53 | 1.51 | 1.50     | 1.50 |  |
| 28       | 2.89  | 2.50 | 2.29 | 2.16 | 2.06 | 2.00 | 1.94 | 1.90 | 1.87 | 1.84 | 1.74 | 1.69 | 1.63 | 1.57 | 1.53 | 1.50 | 1.49 | 1.48     | 1.48 |  |
| 30       | 2.88  | 2.49 | 2.28 | 2.14 | 2.05 | 1.98 | 1.93 | 1.88 | 1.85 | 1.82 | 1.72 | 1.67 | 1.61 | 1.55 | 1.51 | 1.48 | 1.47 | 1.46     | 1.46 |  |
| 40       | 2.84  | 2.44 | 2.23 | 2.09 | 2.00 | 1.93 | 1.87 | 1.83 | 1.79 | 1.76 | 1.66 | 1.61 | 1.54 | 1.48 | 1.43 | 1.41 | 1.39 | 1.38     | 1.38 |  |
| 50       | 2.81  | 2.41 | 2.20 | 2.06 | 1.97 | 1.90 | 1.84 | 1.80 | 1.76 | 1.73 | 1.63 | 1.57 | 1.50 | 1.44 | 1.39 | 1.36 | 1.34 | 1.33     | 1.33 |  |
| 60       | 2.79  | 2.39 | 2.18 | 2.04 | 1.95 | 1.87 | 1.82 | 1.77 | 1.74 | 1.71 | 1.60 | 1.54 | 1.48 | 1.41 | 1.36 | 1.33 | 1.31 | 1.29     | 1.29 |  |
| 80       | 2.77  | 2.37 | 2.15 | 2.02 | 1.92 | 1.85 | 1.79 | 1.75 | 1.71 | 1.68 | 1.57 | 1.51 | 1.44 | 1.38 | 1.32 | 1.28 | 1.26 | 1.24     | 1.24 |  |
| 100      | 2.76  | 2.36 | 2.14 | 2.00 | 1.91 | 1.83 | 1.78 | 1.73 | 1.70 | 1.66 | 1.56 | 1.49 | 1.42 | 1.35 | 1.29 | 1.26 | 1.23 | 1.21     | 1.21 |  |
| 200      | 2.73  | 2.33 | 2.11 | 1.97 | 1.88 | 1.80 | 1.75 | 1.70 | 1.66 | 1.63 | 1.52 | 1.46 | 1.38 | 1.31 | 1.24 | 1.20 | 1.17 | 1.14     | 1.14 |  |
| 500      | 2.72  | 2.31 | 2.10 | 1.96 | 1.86 | 1.79 | 1.73 | 1.68 | 1.64 | 1.61 | 1.50 | 1.44 | 1.36 | 1.28 | 1.21 | 1.16 | 1.12 | 1.09     | 1.09 |  |
| $\infty$ | 2.71  | 2.30 | 2.08 | 1.94 | 1.85 | 1.77 | 1.72 | 1.67 | 1.63 | 1.60 | 1.49 | 1.42 | 1.34 | 1.26 | 1.18 | 1.13 | 1.08 | 1.00     | 1.00 |  |

\*  $F_{\alpha, \nu_1, \nu_2}$  and  $F_{1-\alpha, \nu_2, \nu_1}$  have been used interchangeably in the text.