E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
2ème Année Ingénieurs
Introduction aux Processus Stochastiques
Chaînes de Markov

Devoir surveillé n^o 1 **donné le 7 février 2008**
Durée : 1h30m.

I 7p.

On lance indéfiniment un dé à 4 faces équilibré pour définir le processus $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, où X_k représente le score maximum obtenu sur les k premiers lancers du dé.

i) Justifier que $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov et donner l' ensemble des états. Calculer les probabilités de transition. En déduire le graphe et la matrice de transition P et décrire les équations d'évolution de ce processus stochastique, de l'instant $n-1$ à l'instant n .

ii) Supposons que :

$$\Pi^{(0)} = (1, 0, 0, 0)$$

Quelle est la loi de probabilité de la chaîne au premier lancer ? Quelle est la probabilité que $X_n = n$ (autrement dit : $X_1 = 1,\ X_2 = 2,\ X_3 = 3,\ X_4 = 4$) sur les 4 premiers lancers ?

(Attention : Utilisation de la propriété Markovienne pour les probabilités conditionnelles)

iii) Définir les différentes classes d' équivalence et leurs propriétés. Reconnaitre s' il y en a des états absorbants.

La chaîne est-elle irréductible ? (Justifier)

iv) S'agît-il d'une chaîne de Markov périodique ? (Justifier)

v) Quel est le système à résoudre pour trouver un régime stationnaire Π^* ? Trouver si il y en a un. Est-il unique ? (Justifier)

vi) A la 20^{me} étape (lancer) on obtient la matrice suivante :

$$P^{(n=20)} = \begin{pmatrix} 0,909\times 10^{-12} & 0,953673\times 10^{-6} & 0,317\times 10^{-2} & 0,996828788 \\ 0 & 0,953674\times 10^{-6} & 0,317\times 10^{-2} & 0,996828788 \\ 0 & 0 & 0,3171\times 10^{-2} & 0,996828788 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En comparant les valeurs des distributions de probabilité (vecteurs lignes) avec votre régime stationnaire, quelle serait à votre avis la forme de cette matrice quand $n \to \infty$?

Un régime permanent serait-il alors possible ?

S'agît-il d'une chaîne de Markov ergodique ? Justifier votre réponse.

II 7p.

Au pays des miracles s'il fait beau un jour, il est certain qu'il pleuvra ou neigera le lendemain, avec une probabilité égale qu'il pleuve ou qu'il neige.

Si le temps d'un jour est pluvieux ou neigeux, alors il reste inchangé dans 50% des cas et ne devient beau que dans 25% des cas.

Les habitants se sont plaint auprès de leur magicien qu'il ait mal reglé leur climat car ce faisant ils n'ont qu' 1 beau jour seulement sur 5. Mais lui il répond qu'il s'agît d'une impression et qu'en réalité il y a bien plus qu'un beau jour sur cinq.

Question : **Qu' en pensez-vous ?**

i) Justifier qu'on peut modéliser ce système d'après une chaîne de Markov à trois états :

$$(P,\ B,\ N) \qquad \text{(pour : Pluvieux, Beau et Neigeux)}$$

Définir le graphe, la matrice de transition P et décrire les équations d'évolution de ce processus stochastique, de l'instant $n-1$ à l'instant n .

ii) Donner la probabilité que le surlendemain d'un jour neigeux soit neigeux.

iii) Définir les différentes classes d' équivalence et leurs propriétés. Reconnaitre s' il y en a des états absorbants.

iv) S'agît-il d'une chaîne de Markov périodique ? Pourquoi ?

v) S'agît-il d'une chaîne de Markov ergodique ? Justifier votre réponse.

vi) Quel est le système à résoudre pour trouver un régime stationnaire Π^* ?

Trouver ce régime, et justifier si il est unique ou non. Serait-il permanent ? Pourquoi ?

vii) Quelle est votre conclusion concernant la question initiale du problème ?

III 6p.

Le graphe suivant représente une chaîne de Markov homogène.

i) Faire votre propre choix des probabilités de transition sur les arcs d'après les orientations données, définir la matrice de transition P et décrire les équations d'évolution de ce processus stochastique, de l'instant $n-1$ à l'instant n .

ii) Définir les différentes classes d' équivalence et leurs propriétés. Reconnaitre s' il y en a des états absorbants.

iii) S'agît-il d'une chaîne de Markov périodique ? Pourquoi ?

iv) S'agît-il d'une chaîne de Markov ergodique ? Justifier votre réponse.