E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs

MATHEMATIQUES POUR L' INGENIEUR

Devoir surveillé n^0 2 (Analyse)
donné le 6 février 2007
(Durée 2h.)

I (6 *Pts.*)

Evaluer l'intégrale suivante par application de deux méthodes différentes :
(a.) Application du th. des Résidus.
(b.) Application d'une des formules intégrales de Cauchy.

$$I = \oint_C \frac{(3z^2+2)}{(z^2+9)(z-1)^2}$$

où C est un cercle de rayon $|z| = 2$.

II (7 *Pts.*)

On étudie le problème de l'évolution dynamique d'un système physique dont l'état (en fonction du temps) est décrit par la fonction f, qui vérifie l'équation integrale suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) g_2(t-u) du = g_1(t) \qquad (D.0)$$

En supposant que $f,\ g_1,\ g_2 \in L^2$ avec

$$g_1 = \frac{1}{t^2+36}; \qquad g_2 = \frac{1}{t^2+9}$$

(et que leurs transformées de Fourier existent dans l'espace dual L^{2*}),
résoudre ce problème en réalisant les étapes suivantes.

a)

Calculer la transformée de Fourier en cosinus de $g_1(t)$, $\mathcal{F}_c[g_1](\alpha)$ en utilisant les 4 étapes de la méthode des fonctions analytiques (Contour de Jordan attention $\alpha > 0$)

$\tilde{a}$)

D'après le résultat du a) donner directement (par analogie) la transformée de Fourier en cosinus de $g_2(t)$, $\mathcal{F}_c[g_2](\alpha)$

b) Appliquer la transformée de Fourier en cosinus aux 2 membres de $(D.0)$ en utilisant aussi le théorème de la convolution correspondant :

$$(RAPPEL: \qquad \mathcal{F}_c[h_1 * h_2](\alpha) = 2\mathcal{F}_c[h_1]\mathcal{F}_c[h_2])$$

et trouver la transformée de Fourier en cosinus de la fonction inconnue f : $\mathcal{F}_c[f](\alpha)$

c) Appliquer le théorème de la transformée de Fourier inverse en cosinus et donner la solution $f(t)$ du problème $(D.0)$

III (7 *Pts.*)

On étudie le problème de l'évolution dynamique d'un système physique dont l'état est décrit par la fonction f (fonction du temps), qui vérifie l'équation différentielle suivante :

$$(\mathcal{P}) \qquad \frac{d^2 f(t)}{dt^2} + 9f(t) = 8\sin t$$

en supposant que :

$$\frac{df}{dt}_{|t=0} = 0; \qquad f(t=0) = 1$$

Résoudre ce problème en 2 étapes :

a) Par application de la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation $(\mathcal{P})$ trouver $L(p)$.

b) Par application de la transformée de *Laplace inverse* et des propriétés des fonctions analytiques (*contour de Bromwitch* et 4 étapes) trouver la solution f de l'équation différentielle.

E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs

MATHEMATIQUES POUR L' INGENIEUR

Devoir surveillé n^o 2 **(Analyse)**
donné le 8 février 2008
(Durée 2h)

I (5 *Pts.*)

Résoudre le problème d'optimisation suivant par la **méthode de substitution** et la méthode des **multiplicateurs de Lagrange** :

$$Opt\{G(x_1, x_2, x_3) = -2x_1 - 8x_1^2 - 4x_2^2 + x_2 - x_3^2$$
$$\text{sous la contrainte :} \qquad \{x_1 - x_3^2 = -2\}$$

II (6 *Pts.*)

- **A)**
  Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $x = \{x_1, \ \ldots x_n\} \quad \in \ (\mathbb{R}^{+*})^n$
  Montrer que :
  $$\frac{n}{1/x_1 + 1/x_2 \ldots \ + 1/x_n} \leq \sqrt[n]{x_1 \ \ldots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots x_n}{n}$$
  Indication : Utiliser la concavité de la fonction $x \ \mapsto f(x) = \ln(x)$

- **B)**
  Soit la fonction :
  $$f : [-2, -1] \ \rightarrow \ \mathbb{R}$$
  $$x \ \mapsto \ f(x) = \frac{x^2}{4} - 2$$

  i) Faire la représentation graphique de f.

  ii) Est ce que f est continue ? (Justifier)

  iii) Utiliser un critère de votre choix pour étudier la convexité (ou concavité) de f et de $-f$.

  iv) Est-ce que l'image par f de l'intervalle $[-2, -1]$ est connexe ?. Justifier votre réponse directement par le i)) et en utilisant un théorème du cours. (Donner une démonstration de ce-dernier).

  v) Trouver (si il y en a) **un point fixe** de f sur l'intervalle $[-2, -1]$.

  vi) Soit $(\mathbb{R}, d)$ l'espace métrique des nombres réels muni de la distance habituelle $d(x, y) = |x - y|$. est-ce que cet espace est de Hilbert ou de Banach ou tous les deux ? (Justifier)

  vii) Est-ce que f est contractante sur l'intervalle $[-2, -1]$. Si, oui vérifier que toutes les conditions d'un théorème du cours sont vérifiées pour que le point fixe de la question **v)** existe et est unique.

III (5 *Pts.*)

On étudie le problème de l'évolution dynamique d'un système physique dont l'état (en fonction du temps) est décrit par la fonction g, qui vérifie l'équation integrale suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)h_1(t-u)du = h_2(t) \qquad (D.0)$$

En supposant que $g,\ h_1,\ h_2 \in L^2$ avec

$$h_1 = \frac{1}{t^2+1}; \qquad h_2 = \frac{1}{t^2+2}$$

(et que leurs transformées de Fourier existent dans l'espace dual L^{2*}),
résoudre ce problème en réalisant les étapes suivantes.

$a)$
Calculer la transformée de Fourier en cosinus de $h_1(t)$, $\mathcal{F}_c[h_1](\alpha)$ en utilisant les 4 étapes de la méthode des fonctions analytiques (Contour de Jordan attention $\alpha > 0$)

$\tilde{a})$
D'après le résultat du $a)$ donner directement (par analogie) la transformée de Fourier en cosinus de $h_2(t)$, $\mathcal{F}_c[h_2](\alpha)$

$b)$ Appliquer la transformée de Fourier en cosinus aux 2 membres de $(D.0)$ en utilisant aussi le théorème de la convolution correspondant :

$$(RAPPEL: \qquad \mathcal{F}_c[f_1 * f_2](\alpha) = 2\mathcal{F}_c[f_1]\mathcal{F}_c[f_2])$$

et trouver la transformée de Fourier en cosinus de la fonction inconnue g : $\mathcal{F}_c[g](\alpha)$

$c)$ Appliquer le théorème de la transformée de Fourier inverse en cosinus et donner la solution $g(t)$ du problème $(D.0)$

IV (4 *Pts.*)

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$(\mathcal{P}) \qquad \frac{d^2f(t)}{dt^2} + f(t) = \exp(-t)$$

en supposant que :

$$\frac{df}{dt}_{|t=0} = -\frac{1}{2}; \qquad f(t=0) = \frac{3}{2}$$

Résoudre ce problème en 2 étapes :

a) Par application de la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation $(\mathcal{P})$ trouver $L(p)$.

b) Par application de la transformée de *Laplace inverse* et des propriétés des fonctions analytiques (**Contour De Bromwitch** en 4 étapes) trouver la solution f de l' équation différentielle.

E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs

MATHEMATIQUES POUR L' INGENIEUR

Devoir surveillé n^o $2a$ (Analyse) - Rattrapage
donné le 24 avril 2008
(Durée 2h)

I (5 *Pts.*)

Résoudre le problème d'optimisation suivant par la **méthode de substitution** et la méthode des **multiplicateurs de Lagrange** :

$$Opt\{G(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 4x_2^2 + x_2 - 8x_3^2 - 2x_3$$
$$\text{sous la contrainte :} \qquad \{x_3 - x_1^2 = -2\}$$

II (6 *Pts.*)

- **A)**
  Soit x_1 et x_2 deux nombres réels tels que $x_1 > 1$ et $x_2 > 1$.
  Montrer que :
  $$\ln(\frac{x_1 + x_2}{2}) \geq \sqrt{\ln(x_1)\ln(x_2)}$$
  Indication : Utiliser la concavité de la fonction $x \mapsto f(x) = \ln(\ln(x))$
- **B)**
  Soit la fonction :
  $$\begin{array}{rcl} f : [1, 2] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = \dfrac{x+2}{x+1} \end{array}$$

  $f(7) = 9/8$

  i) Faire la représentation graphique de f.
  ii) Est ce que f est continue ? (Justifier)
  iii) Utiliser un critère de votre choix pour étudier la convexité (ou concavité) de f et de $-f$.
  iv) Est-ce que l'image par f de l'intervalle $[1, 2]$ est connexe ?. Justifier votre réponse directement par le i)) et en utilisant un théorème du cours. (Donner une démonstration de ce-dernier).
  v) Trouver (si il y en a) **un point fixe** de f sur l'intervalle $[1, 2]$.
  vi) Soit $(\mathbb{R}, d)$ l'espace métrique des nombres réels muni de la distance habituelle $d(x, y) = |x - y|$. est-ce que cet espace est de Hilbert ou de Banach ou tous les deux ? (Justifier)
  vii) Est-ce que f est contractante sur l'intervalle $[1, 2]$? Si, oui vérifier que toutes les conditions d'un théorème du cours sont vérifiées pour que le point fixe de la question v) existe et est unique.

III (5 *Pts.*)

On étudie le problème de l'évolution dynamique d'un système physique dont l'état (en fonction du temps) est décrit par la fonction g, qui vérifie l'équation integrale suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)h_1(t-u)du = h_2(t) \qquad (D.0)$$

En supposant que $g,\ h_1,\ h_2 \in L^2$ avec

$$h_1 = \frac{1}{2t^2+3}; \qquad h_2 = \frac{1}{3t^2+1}$$

(et que leurs transformées de Fourier existent dans l'espace dual L^{2*}),
résoudre ce problème en réalisant les étapes suivantes.

a)

Calculer la transformée de Fourier en cosinus de $h_1(t)$, $\mathcal{F}_c[h_1](\alpha)$ en utilisant les 4 étapes de la méthode des fonctions analytiques (Contour de Jordan attention $\alpha > 0$)

ã)

D'après le résultat du a) donner directement (par analogie) la transformée de Fourier en cosinus de $h_2(t)$, $\mathcal{F}_c[h_2](\alpha)$

b) Appliquer la transformée de Fourier en cosinus aux 2 membres de $(D.0)$ en utilisant aussi le théorème de la convolution correspondant :

$$(RAPPEL: \qquad \mathcal{F}_c[f_1 * f_2](\alpha) = 2\mathcal{F}_c[f_1]\mathcal{F}_c[f_2])$$

et trouver la transformée de Fourier en cosinus de la fonction inconnue g : $\mathcal{F}_c[g](\alpha)$

c) Appliquer le théorème de la transformée de Fourier inverse en cosinus et donner la solution $g(t)$ du problème $(D.0)$

IV (4 *Pts.*)

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$(\mathcal{P}) \qquad \frac{d^2 f(t)}{dt^2} + 3f(t) = 5\cos t \qquad \frac{p}{p^2+\omega^2}$$

en supposant que :

$$\frac{df}{dt}_{|t=0} = 0; \qquad f(t=0) = 1$$

Résoudre ce problème en 2 étapes :

a) Par application de la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation $(\mathcal{P})$ trouver $L(p)$.

b) Par application de la transformée de *Laplace inverse* et des propriétés des fonctions analytiques (**Contour De Bromwich** en 4 étapes) trouver la solution f de l' équation différentielle.

(p7, D)

19,5/20

Examen d'Analyse

C.2

1. $I = \oint_{\mathcal{C}} \frac{(3z^2+2)}{(z^2+9)(z-1)^2}\,dz$

$\mathcal{C}$ cercle de rayon $|z| = 2$.

le pôle $P_1 = 1$ est dans le contour, ordre 2

le pôle $P_2 = 3i$ n'est pas dans le contour, ordre 1

le pôle $P_3 = -3i$ n'est pas dans le contour, ordre 1

(a) application du théorème des résidus

on a $\oint_{\mathcal{C}} f(z)dz = 2\pi i \sum_{\text{pôles}} \text{Res} f$

ici $f(z) = \frac{3z^2+2}{(z^2+9)(z-1)^2}$

$\text{Res} f|_{P_1} = \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz}\left[(z-1)^2 f(z)\right]$

$= \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz}\left(\frac{3z^2+2}{z^2+9}\right)$

$= \lim_{z\to 1}\left(\frac{50z}{(z^2+9)^2}\right)$

$= \frac{50}{100} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

seuls les pôles à l'intérieur du contour comptent, donc on

$\oint_{\mathcal{C}} f(z)dz = 2\pi i\,(1/2) = \pi i$

$I = \pi i$

(b) application d'une des formules intégrales de Cauchy

cette formule donne $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$.

ici $I = \oint_{\mathcal{C}} \frac{(3z^2+2)}{(z^2+9)(z-1)^2}\,dz$

donc $\begin{cases} f(z) = \frac{(3z^2+2)}{(z^2+9)} \\ z_0 = 1 \\ n = 1. \end{cases}$

donc $f'(1) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} \frac{3z^2+2}{(z^2+9)(z-1)^2}\,dz$.

$f(z) = \frac{3z^2+2}{(z^2+9)}$; $f'(z) = \frac{6z(z^2+9)-(3z^2+2)2z}{(z^2+9)^2}$

$= \frac{6z^3+54z-6z^3-4z}{(z^2+9)^2}$

$= \frac{50z}{(z^2+9)^2}$

C,3

donc $f'(1) = \frac{50}{100} = 1/2 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{3z^2+2}{(z^2+9)(z-1)^2} dz$

donc $\oint_{\mathcal{C}} \frac{(3z^2+2)}{(z^2+9)(z-1)^2} dz = \frac{2\pi i}{2} = \pi i$

II $\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) g_2(t-u) du = g_1(t)$ (D.O).

$g_1 = \frac{1}{t^2+36}$ $g_2 = \frac{1}{t^2+9}$

a) $F_c[g_1](\alpha) = \int_0^{\infty} g_1(x) \cos(\alpha x) dx$.

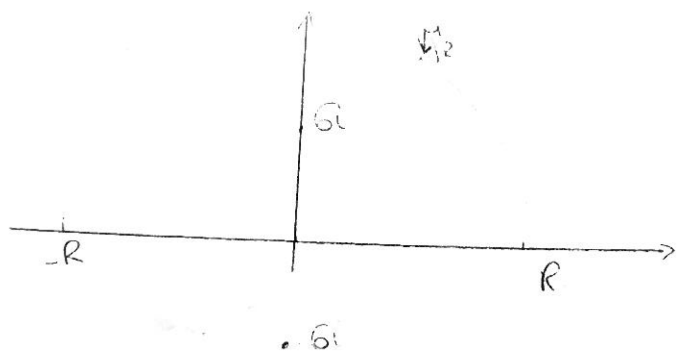
$= \frac{1}{2} Re\left(\int_{-\infty}^{+\infty} g_1(x) e^{i\alpha x} dx \right)$

$= \frac{1}{2} Re \left(\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x^2+36} dx}_{I_1} \right)$.

calculons I_1

$I_R = \int_{\mathcal{C}_R} \frac{e^{i\alpha z}}{z^2+36} dz$

$\mathcal{C}_R = [-R, R] \cup \Gamma_R$.



$\alpha > 0$, on prend le 1/2 cercle supérieur donc seul le pôle $P_1 = 6i$ est dans le contour ainsi défini.

$I_R = \int_{-R}^{R} \frac{e^{i\alpha x}}{x^2+36} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{e^{i\alpha z}}{z^2+36} dz$.

or $I_R = \oint_{\mathcal{C}_R} \frac{e^{iz\alpha}}{z^2+36} dz = 2\pi i \sum_{\substack{\text{pôles} \\ \text{de } \mathcal{C}_R}} Res\left(\frac{e^{i\alpha z}}{z^2+36} \right)$.

$Res\left(\frac{e^{i\alpha z}}{z^2+36} \right)_{6i} = \lim_{z \to 6i} \left(\frac{e^{i\alpha z}(z-6i)}{(z+6i)(z-6i)} \right)$.

$= \frac{e^{-6\alpha}}{12i}$

donc $I_R = 2\pi i \left(\frac{e^{-6\alpha}}{12i} \right) = \frac{\pi e^{-6\alpha}}{6}$.

$\lim_{R \to \infty} I_R = \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{i\alpha x}}{x^2+36} dx + \lim_{R \to \infty} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{i\alpha z}}{z^2+36} dz$.

on vérifie les conditions du lemme de Jordan:

$\left| \frac{e^{i\alpha z}}{z^2+36} \right| = \frac{|e^{i\alpha(Re(z)+i\,Im(z))}|}{|R^2 e^{i2\theta} + 36|}$ $z = Re(z) + i\,Im(z) = Re^{i\theta}$.

$= \frac{|e^{-Im(z)\alpha}|}{R^2 |\cos(2\theta) + i\sin(2\theta) + 36/R^2|}$

$= \frac{|e^{-Im(z)\alpha}|}{R^2 \sqrt{(\cos 2\theta + 36/R^2)^2 + \sin^2 2\theta}}$

$= \frac{|e^{-Im(z)\alpha}|}{R^2 \sqrt{\cos^2 2\theta + \frac{1296}{R^4} + \frac{72\cos 2\theta}{R^2} + \sin^2 2\theta}}$

$= \frac{|e^{-Im(z)\alpha}|}{R^2 \sqrt{1 + \frac{1296}{R^4} + \frac{72 \cos 2\theta}{R^2}}}$

$\leq \frac{\mu}{R^2}$.

les conditions du lemme de Jordan sont vérifiées donc

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{i\alpha z}}{z^2+36}\,dz = 0$$

$$\Rightarrow I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x^2+36}\,dx$$

$$= \lim_{R\to\infty} I_R$$

$$= \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{i\alpha x}}{x^2+36}\,dx$$

$$= \frac{\pi}{6} e^{-6\alpha}.$$

1

donc

$$F_c[g_1](\alpha) = \frac{1}{2} I_1 = \frac{\pi}{12} e^{-6\alpha}$$

ã) par analogie $F_c[g_2](\alpha) = \frac{\pi}{6} e^{-3\alpha}$ 1

b) (D.O) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) g_2(t-u)\,du = g_1(t)$.

$(\Leftrightarrow)$ $(f * g_2)(t) = g_1(t)$.

on applique la tranformeé de Fourier en cosinus aux 2 membres de l'équation.

$$F_c[(f*g_2)(t)] = F_c[g_1(t)]$$

$(\Leftrightarrow)$ $2 F_c[f] F_c[g_2] = F_c[g_1]$.

Soit $I = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\, I_1 = \frac{1}{2} \times \frac{\pi e^{-6\alpha}}{6} = \frac{\pi e^{-6\alpha}}{12}$ 0,5

ã) Par analogie, on a :

$$F_c[g_2](\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{x^2+9}\,dx = \frac{\pi e^{-3\alpha}}{2 \times 3} = \frac{\pi e^{-3\alpha}}{6}$$ 1

b) Appliquons la transformée de Fourier en cosinus aux 2 membres (D.O) :

$$g_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, g_2(t-u)\,du$$

$(\Leftrightarrow)$ $g_1(t) = (f * g_2)(t)$

$(\Leftrightarrow)$ $F_c[g_1] = F_c[f * g_2]$

$(\Leftrightarrow)$ $F_c[g_1] = 2 F_c[f] \times F_c[g_2]$

$(\Leftrightarrow)$ $F_c[f] = \frac{1}{2} \frac{F_c[g_1]}{F_c[g_2]}$

d'où d'après les questions précédentes, on a :

$$F_c[f] = \frac{1}{2} \frac{\pi e^{-6\alpha}}{12} \times \frac{6}{\pi e^{-3\alpha}} = \frac{1}{2} \frac{e^{-3\alpha}}{2} = \frac{e^{-3\alpha}}{4}$$ 1,5

Appliquons à présent la transformée de Fourier inverse en cosinus

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} F_c[f] \cos \alpha x\,d\alpha$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-3\alpha}}{2} \cos \alpha x\,d\alpha \quad \text{or} \quad \cos \alpha x = \frac{e^{i\alpha x} + e^{-i\alpha x}}{2}$$

$$= \frac{2}{\pi} \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-3\alpha} \left[\frac{e^{i\alpha x} + e^{-i\alpha x}}{2}\right] d\alpha$$

$$= \frac{1}{\pi} \times \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left(e^{-3\alpha + i\alpha x} + e^{-3\alpha - i\alpha x}\right) d\alpha$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \left[e^{-\alpha[3-ix]} + e^{-\alpha[3+ix]}\right] d\alpha$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \left(e^{-\alpha(3-ix)} + e^{-\alpha(3+ix)} \right) d\alpha .$$ C,6

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{+\infty} e^{-\alpha(3-ix)} d\alpha + \int_0^{+\infty} e^{-\alpha(3+ix)} d\alpha \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\lim_{X \to +\infty} \left[\frac{e^{-\alpha(3-ix)}}{-(3-ix)} \right]_0^X + \lim_{X\to+\infty} \left[\frac{e^{-\alpha(3+ix)}}{-(3+ix)} \right]_0^X \right]$$

or $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{e^{-X(3+ix)}}{-(3+ix)} \to 0$ car $Re(3+ix) > 0$

(et idem pour la limite de la 2e fonction).

$$= \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{1}{-(3-ix)} + \left(-\frac{1}{-(3+ix)} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{(3-ix)} + \frac{1}{(3+ix)} \right) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{3+ix+3-ix}{(3-ix)(3+ix)} \right] = \frac{6}{2\pi(9+x^2)} = \frac{\ldots}{\pi(}$$

Soit $f(t) = \frac{3}{\pi(9+t^2)}$

III) Soit (P) $\frac{d^2f(t)}{dt^2} + 9f(t) = 8\sin t$

Conditions Initiales:

$\left.\frac{df}{dt}\right|_{t=0} = 0$

$f(t=0) = 1$.

a) Appliquons la transformée de Laplace

$\mathcal{L}\left(\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right) = p^2 L(f(t)) - p f(0^+) - f'(0^+)$ on pose $\mathcal{L}(f(t)) =$

$= p^2 Y - p$

D'où $p^2Y - p + 9Y = \mathcal{L}(8\sin t) = 8\mathcal{L}(\sin t) = 8 \times \frac{1}{p^2+1}$.

$L(\sin(t)) = \mathcal{L}\left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right) = \frac{1}{2i}\left[\mathcal{L}(e^{it}) - \mathcal{L}(e^{-it})\right] = \frac{1}{2i}\left(\int_0^{+\infty} e^{-pt+it} dt - \int_0^{+\infty} e^{\ldots}\right.$

$= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i} - \frac{1}{p+i}\right) = \frac{1}{2i} \times \frac{2i}{p^2+1} = \frac{1}{p^2+1}$

D'où: $p^2Y - p + 9Y = \frac{8}{p^2+1}$

ORTIZ Lisa ING1

06/04/2007

IV) (P) $\frac{d^2f(t)}{dt^2} + 9f(t) = 8\sin(t)$.

$\left.\frac{df}{dt}\right|_0 = 0 \quad f(t=0) = 1$.

$$\boxed{L(f'] = pL(f) - f(0)}$$

a). on applique la transformée de Laplace aux 2 membres :

$\mathcal{L}[f''] = p\left[\mathcal{L}[f'] - f'(0)\right]$

$= p\left(p\left[\mathcal{L}[f] - f(0)\right) - f'(0)\right]$

$= p^2 \mathcal{L}[f] - pf(0) \cdot f'(0)$.

$= p^2 \mathcal{L}[p] - p$

$\mathcal{L}[\sin(t)) = \mathcal{L}\left[\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right] = \frac{1}{2i}\mathcal{L}[e^{it}] - \frac{1}{2i}\mathcal{L}[e^{-it}]$.

$= \frac{1}{2i}\int_0^\infty e^{-pt}e^{it} dt - \frac{1}{2i}\int_0^\infty e^{-pt}e^{-it} dt$

$= \frac{1}{2i}\int_0^\infty e^{t(i-p)} dt - \frac{1}{2i}\int_0^\infty e^{-t(i+p)} dt$

$= \frac{1}{2i}\left(\left[\frac{e^{t(i-p)}}{i-p}\right]_0^\infty + \left[\frac{e^{-t(i+p)}}{i+p}\right]_0^\infty\right)$.

$= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i} - -\frac{1}{i+p}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{i+p-p+i}{p^2+1}\right) = \frac{1}{p^2+1}$.

donc on a avec $\mathcal{L}[f] = L(p)$:

$p^2 L(p) - p + 9L(p) = \frac{8}{p^2+1}$

$(p^2+9)L(p) = \frac{8}{p^2+1} + p = \frac{8 + (p^2+1)p}{p^2+1}$

$L(p) = \frac{8}{(p^2+1)(p^2+9)} + \frac{p}{p^2+9} = \frac{8 + p^3 + p}{(p^2+1)(p^2+9)}$