

# **SIGNAUX & SYSTEMES**

## 0. Préambule

Signaux & systèmes ≡	. <i>Traitement du Signal (TS)</i> ≡	. Conditionnement ( <i>Mise en forme, Prétraitement, Amplification, Filtrage...</i> )
		. Caractérisation ( <i>Transformations fréquentielles</i> )
		. Détection - Estimation ( <i>Moyenne quadratique...</i> )
		. Optimisation ( <i>Filtrage optimal, Débruitage...</i> )
		. Modélisation - Identification ( <i>Prédiction linéaire, modèles Markoviens...</i> )
		. Codage - Décodage ( <i>Modulation, Démodulation, Brouillage...</i> )
		. Synthèse de signal ( <i>Génération de signaux analytiques, aléatoires, bruit ...</i> )
		. Reconnaissance - Décision - Compréhension - Interprétation ( <i>RDF - Reconnaissances Des Formes, Classification...</i> )
	. <i>Automatique</i> ≡	. Commande des systèmes ( <i>Commande linéaire, adaptative, optimale...</i> )
		. Asservissement (système bouclé) - Performances - Correction ( <i>Régulation, Suivi (Poursuite) automatique de trajectoires...</i> )

Le signal, support de l'information, est à la base de la communication entre les hommes et avec leur environnement. La théorie du signal a pour objectif la modélisation mathématique des signaux et leurs traitements malgré leur très grande diversité. Elle s'appuie essentiellement sur l'analyse fonctionnelle, l'algèbre linéaire et le calcul des probabilités.

L'automatique s'intéresse aux systèmes et à leur contrôle, leur commande. La modélisation mathématique intervient aussi constamment pour caractériser les systèmes, prévoir leur réponse à différentes commandes et évaluer leur performances en termes de rapidité, stabilité et précision. On peut classer les systèmes par leur niveau de complexité, traduit par le nombre des variables nécessaires pour décrire leur état. On peut opérer à une autre classification des systèmes selon le type du signal utilisé pour leur commande.

*Exemples :*

- *TS (Filtrage)* : Si on mesure la température au cours des dernières décennies, il n'est pas évident pour autant d'en déduire un réchauffement de la planète dû à l'homme au vu des valeurs croissantes de la température.

En effet, la terre est soumise depuis des millénaires à des fluctuations climatiques naturelles qu'il est nécessaire de gommer (→ filtrage) pour mettre en évidence les fluctuations artificielles dues à l'homme.

En Traitement du Signal, c'est le signal qui nous intéresse en premier lieu, qui constitue notre objectif (caractérisation, filtrage ...)

- *Automatique (Asservissement)* : Régulation de la température d'une salle :

- analogique : la température est mesurée en permanence.

- numérique : la température est mesurée à intervalles de temps réguliers.

En Automatique, c'est le système qui est au cœur des préoccupations. On cherche alors à le caractériser, le synthétiser, le corriger ... pour qu'il fournisse une réponse (un signal) satisfaisant certaines contraintes (en régulation: sortie ≡ entrée, en poursuite ...).

## Plan du cours

1. **Représentations Temporelles des Signaux & des Systèmes à Temps Continu & à Temps Discret.**
2. **Tutorial Mathcad.**
3. **Représentations Fréquentielles des Signaux & des Systèmes à Temps Continu.**
4. **Représentations Fréquentielles des Signaux & des Systèmes à Temps Discret.**
4. **Annexe.** *Voir Annexe*
5. **Echantillonnage - Interpolation - Quantification.**
6. **Transformée de Fourier Discrète (TFD) et Rapide (TFR).**
7. **Filtrage linéaire. Analyse & Synthèse des filtres numériques.**
8. **Annexe.** *Voir Annexe*
9. **Annexe.** *Voir Annexe*

## Annexe

4. **Annexe.** **Représentation d'Etat des Systèmes.**
8. **Annexe.** **Signaux Aléatoires.**
9. **Annexe.** **Filtrage multicadence.**

## Bibliographie

- |      |   |  |                      |
|------|---|--|----------------------|
| [1]  | <b>F. de Coulon</b>                               | « Théorie et traitement des signaux »              | <i>Dunod</i>         |
| [2]  | <b>P. Duvaut</b>                                  | « Traitement du signal »                           | <i>Hermès</i>        |
| [3]  | <b>M. Kunt</b>                                    | « Traitement numérique des signaux »               | <i>Dunod</i>         |
| [4]  | <b>J. Max</b>                                     | « Méthodes et techniques de traitement du signal » | <i>Masson</i>        |
| [5]  | <b>A.V. Oppenheim</b>                             | « Applications of digital signal processing »      | <i>Prentice-Hall</i> |
| [6]  | <b>A.V. Oppenheim / R.W. Schafer</b>              | « Digital signal processing »                      | <i>Prentice-Hall</i> |
| [7]  | <b>A.V. Oppenheim / A.S. Willsky</b>              | « Digital signal processing »                      | <i>Prentice-Hall</i> |
| [8]  | <b>A.V. Oppenheim / A.S. Willsky / Y.T. Young</b> | « Signals and systems »                            | <i>Prentice-Hall</i> |
| [9]  | <b>A. Papoulis</b>                                | « Signal analysis »                                | <i>McGraw-Hill</i>   |
| [10] | <b>M. Rivoire / J.L. Ferrier</b>                  | « Automatique »                                    | <i>Eyrolles</i>      |
| [11] | <b>Y. Thomas</b>                                  | « Signaux & systèmes linéaires »                   | <i>Masson</i>        |
| [12] | <b>J. Salomon</b>                                 | Polycopié de Cours Traitement numérique du signal  | <i>UPD</i>           |

# 1. Représentations Temporelles des Signaux & des Systèmes à TC & à TD

## I. SIGNAUX

### 1. Représentations Temporelles des Signaux

Il existe de très nombreux types de signaux.

L'exemple le plus général de signal peut être écrit sous la forme :  $x = f[v ; w]$

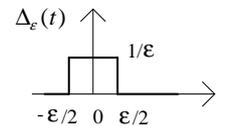
où :

- $x$  : vecteur de dim.  $n$
- $v$  : vecteur de dim.  $m$
- $f$  : distribution
- $w$  : vecteur de dim.  $p$ ; indique que le signal peut être aléatoire en faisant apparaître une dépendance statistique ( $\equiv$  en fonction du tirage, de l'épreuve).

Une distribution généralise la notion de fonction.

Exemple de distribution : l'impulsion de Dirac :

$$\begin{cases} \delta(t) = \infty & \text{si } t = 0 \\ \delta(t) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



$\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Delta_\epsilon(t)$  avec comme fonction  $\Delta_\epsilon(t)$  possible :

$\delta(t)$  n'est pas une fonction car  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$ , alors que l'intégrale d'une fonction presque nulle partout est nulle.

On va se limiter au cas où :

- $x$  : scalaire ( $\equiv$  réel)
- $v$  : scalaire, et ce sera généralement le temps  $t$
- $f$  : appelée fonction ( parfois abusivement notamment pour  $\delta(t)$  )
- $w$  : fixé  $\rightarrow$  signal déterministe ( $\equiv$  non aléatoire)

Exemples de signaux monodimensionnels ( $\equiv 1D$ ) : Température, compte bancaire, ligne d'image, ...

Exemples de signaux complexes ( $\equiv 2D$ ) : Image, champ de forces (amplitude et direction) ...

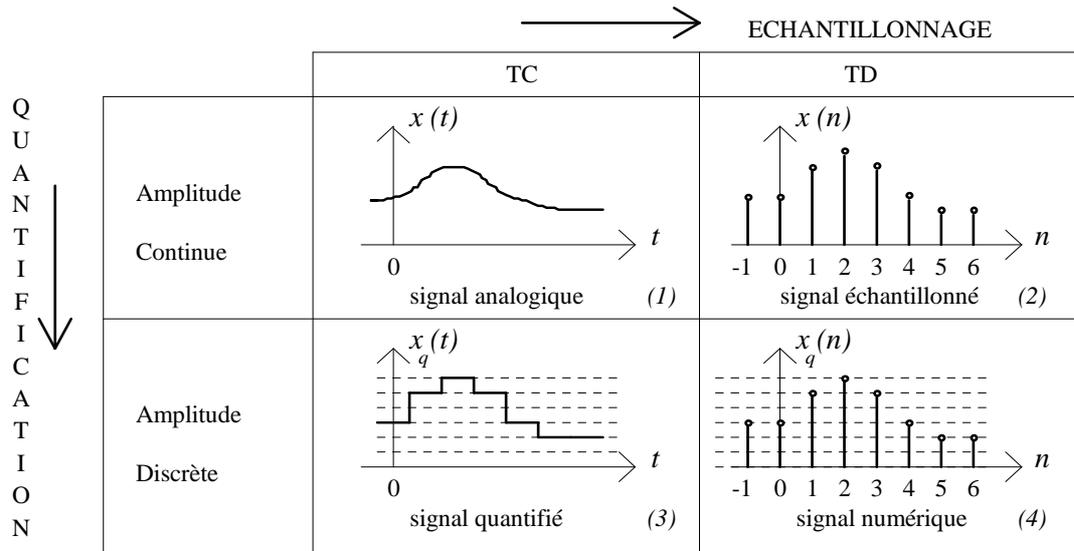
### 2. Signal à Temps Continu, à Temps Discret - Signal quantifié ou non

Un signal s'écrit donc :  $x(t) = f(t)$  :

- . si  $t$  varie continuellement, au moins par morceaux (on dira abusivement mais plus simplement  $t$  réel),  $x(t)$  est un signal à Temps Continu (TC).
- . si  $t$  est discret ( $t$  ne peut prendre qu'un nombre fini  $\equiv$  limité de valeurs (ou un infini dénombrable)), noté généralement  $nT$  avec  $n$  entier et  $T$  réel (dans le cas par exemple de l'échantillonnage périodique à la période  $T$ ),  $x(nT)$  noté aussi  $x(n)$  ou encore  $x_n$ , est un signal à Temps Discret (TD).  
(Un signal à TD est souvent appelé plus simplement mais abusivement signal discret).

Qu'il soit à TC ou à TD, le signal  $x$  peut être :

- . à valeurs réelles:  $x$  est un réel (l'amplitude de  $x$  varie continuellement).
- . à valeurs discrètes:  $x$  est un nombre codé sur  $m$  bits et peut ainsi avoir  $2^m$  valeurs possibles (l'amplitude de  $x$  est discrète).



- Exemples :
- (1) : Vitesse d'un mobile.
  - (2) : Taille d'un être humain évaluée régulièrement (chaque année par exemple)
  - (3) : Compte bancaire (arrondi au centime près).
  - (4) : Population humaine évaluée régulièrement, ou encore niveau de gris des pixels d'une ligne (1D) d'image (2D) (l'échantillonnage est alors spatial et non temporel).

Un signal à TD peut être à TD par nature :

Ex. : les notes d'un élève dans une matière (ou dans plusieurs, donnant alors un signal vectoriel  $\equiv$  à plusieurs dimensions) tous les mois.

Il peut aussi s'obtenir à partir d'un signal à TC par échantillonnage le plus souvent périodique, de période  $T$

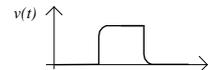
Ex. : température mesurée à intervalles de temps réguliers et non en permanence.

On note alors généralement ces signaux par  $x(nT)$  plutôt que  $x(n)$  pour faire apparaître explicitement la période d'échantillonnage  $T$ . Pour alléger les écritures, on notera souvent  $x(nT)$  par  $x_n$ .

En ce qui concerne les signaux à TD, on pourra noter de préférence (mais on ne le fera pas systématiquement, le contexte étant souvent assez explicite) une séquence d'échantillons par  $\{x(n)\}$  plutôt que  $x(n)$  qui désigne un échantillon particulier (d'indice  $n$ ) du signal  $x$ , en même temps que la séquence elle-même (idem pour les signaux à TC).

### 3. Classification des signaux

- *Signaux physiques* : ils ne présentent que très rarement des discontinuités (physique quantique).  
 Exemple : *Signal carré de tension électrique* :



- *Signaux mathématiques* : un modèle mathématique d'un signal (économique, démographique, ou purement mathématique) présente souvent des discontinuités.

Exemple : *Montant d'un compte bancaire* :



- *Signal stable* ( $L^1$ ) :  $x(t)$  est un signal stable si :  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty$

- *Signal à énergie finie* ( $L^2$ ) :  $x(t)$  est un signal à énergie finie si :  $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt < \infty$

- *Signal à puissance finie* :  $x(t)$  est un signal  $T$ -périodique à puissance finie si :  $\frac{1}{T} \int_T x^2(t) dt < \infty$

- *Signal à support borné* :  $x(t)$  est un signal à support borné si :  $x(t)$  est nul en dehors d'une partie bornée de  $\mathbf{R}$

4. Signaux usuels

SIGNAL	TC	TD
<p><b>Echelon ou indice unité</b> (fonction de Heavyside)</p> <p>noté <math>\Gamma</math> ou <math>u</math> ou <math>\Phi</math> ou encore <math>Y</math> ou même 1</p> <p>Ce signal permet de simuler un brusque changement de régime de fonctionnement (mise en route, ...)</p>	$\Gamma(t) = 1 \text{ si } t > 0$ $= 0 \text{ si } t < 0$ <p>(non défini pour <math>t = 0</math>)</p>	$\Gamma(n) = 1 \text{ si } n \geq 0$ $= 0 \text{ sinon}$
<p><b>Fenêtre ou porte ou impulsion</b></p> <p>noté <math>\Pi_T</math> de largeur <math>T</math></p>	$\Pi_T(t) = 1 \text{ si } -T/2 < t < T/2$ $= 0 \text{ sinon}$	$\Pi_T(nT_e) = 1 \text{ si } -T/2 \leq nT_e \leq T/2$ $= 0 \text{ sinon}$
<p><b>Impulsion de Dirac ou percussion</b></p> <p>noté <math>\delta</math></p> <p>(à TD, on l'appelle souvent symbole de Kronecker)</p> <p>Ce signal simule une brève perturbation (parasite, ...) (et aussi une « claque » pour un système)</p>	$\delta(t) = \infty \text{ si } t = 0$ $\delta(t) = 0 \text{ sinon}$ $\delta(t) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} \Pi_T(t) \text{ d'où la propriété:}$ $\forall \varepsilon \neq 0 : \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t) dt = 1$ <p>(1 représente l'aire (le poids) de <math>\delta(t)</math> et non pas l'ordonnée)</p> <p>(ex : <math>t_0 &gt; 0</math>)</p> $\forall \varepsilon \neq 0 : \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \delta(t-t_0) dt = 1$ $\delta(t) = \frac{d\Gamma(t)}{dt}$ $\Gamma(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$ <p><math>\delta(t)</math> est paire</p>	$\delta(n) = 1 \text{ si } n = 0$ $\delta(n) = 0 \text{ sinon}$ <p><math>\delta(n)</math> et <math>\delta(n-k)</math> sont respectivement notés aussi : <math>\delta(n,0)</math> et <math>\delta(n,k)</math> mais ces dernières notations sont déconseillées</p> $\forall k \text{ entier : } \sum_{n=-k}^k \delta(n) = 1$ <p>(ex : <math>k = 2</math>)</p> $\forall k \text{ entier : } \sum_{n=n_0-k}^{n_0+k} \delta(n-n_0) = 1$ $\delta(n) = \Gamma(n) - \Gamma(n-1)$ $\Gamma(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k)$ <p><math>\delta(n)</math> est paire</p>

On en déduit les propriétés :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(0)\delta(t)dt = f(0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)dt = f(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = f(\tau)$$

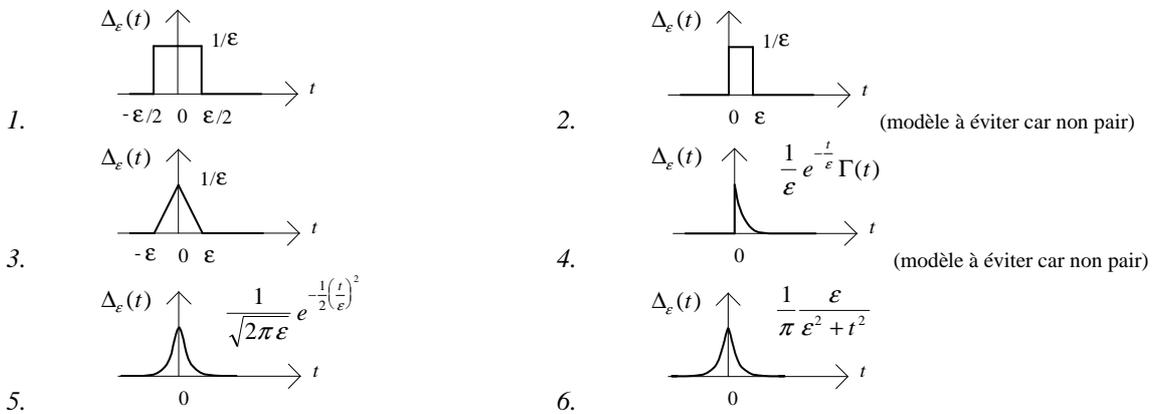
L'impulsion de Dirac à TC  $\delta(t)$  peut être vue comme la limite de nombreuses fonctions  $\Delta_\epsilon(t)$  lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ , pourvu qu'elle vérifie les 2 propriétés :

$$\int_{-\zeta}^{\zeta} \delta(t)dt = 1 \quad \forall \zeta \neq 0$$

et :

$$\begin{cases} \delta(t) = \infty & \text{si } t = 0 \\ \delta(t) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

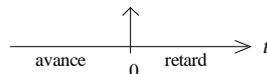
$\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Delta_\epsilon(t)$  avec par exemple, les fonctions possibles  $\Delta_\epsilon(t)$  suivantes :



### 5. Définitions sur les signaux

- *Signal déterministe* : Signal certain, prévisible ( $\neq$  *signal aléatoire*  $\equiv$  lié au hasard, qui possède une dépendance statistique  $\equiv$  à l'épreuve).

- *Signal causal* : Signal dont on ne connaît pas le futur. Cela se traduit par un signal nul au temps négatif ( $t < 0$ ) : le signal a un début, conventionnellement pris en 0, et il est réalisé pour  $t > 0$ . Ainsi, s'il était non nul à  $t < 0$ , le signal peut être interprété comme existant avant le début ! Ou bien comme se réalisant pour le temps renversé ( $t < 0$ ) (temps se déroulant dans le sens inverse) ( $\rightarrow$  non causalité) (pour un signal causal, on ne peut que se déplacer dans le passé ou le présent, contrairement à un signal non causal pour lequel on peut accéder à son futur).



Exemple de signal non causal : Un enregistrement

(en effet, le « rembobinage » d'un signal enregistré permet de revenir en arrière, comme pour un signal causal, mais surtout son « bobinage avant » permet d'aller dans le futur, ce qui est impossible pour un signal causal).

De même, un signal anticausal n'existe que pour le temps  $\leq 0$

Exemple de signal causal : Un signal radio reçu au vol

- *Signal stationnaire (ou encore à Temps Invariant (TI))* :

- C'est un signal invariant si on change l'origine des temps.

Exemple : une sinusoïde est un signal stationnaire, mais si on lui ajoute un offset (décalage vertical) au cours du temps, le signal n'est plus stationnaire (sa moyenne varie au cours du temps). Le signal parole est un autre exemple de signal non stationnaire.

- S'il est aléatoire, cela se traduit en particulier par le fait que ses propriétés statistiques (moyenne, variance ...) ne changent pas au cours du temps ( $\equiv$  sont indépendantes de l'origine des temps,  $\equiv$  n'évoluent pas au cours du temps).

Ex. : les résultats du lancé d'un dé à 6 faces est un signal stationnaire (si le dé n'est pas modifié au cours des épreuves !).

Le résultat est toujours compris entre 1 et 6 et la moyenne statistique - espérance mathématique - reste inchangée :

$$\text{moyenne} = \sum_i x_i p_i = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} + \frac{6}{6} = \frac{21}{6} \quad x_i, p_i : \text{résultat}(x_i) \text{ et probabilité}(p_i) \text{ d'une épreuve.}$$

- *Signal analytique* : Signal décrit par une équation permettant de le calculer, et ce de façon non récurrente.

- *Energie d'un signal (cas complexe)*: (TC)  $E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$  (TD)  $E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$  ( $E \geq 0$ )

[unité: le Joule] (cas scalaire): (TC)  $E = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt$  (TD)  $E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(n)$

Pour un signal à énergie infinie (signal périodique par exemple) on préfère utiliser la *puissance* (moyenne) pour le caractériser :

- *Puissance (moyenne) d'un signal* : (TC)  $P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2 dt$  (TD)  $P = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k+1} \sum_{n=-k}^k |x(n)|^2$

[unité: le Watt] (cas scalaire): (TC)  $P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x^2(t) dt$  (TD)  $P = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k+1} \sum_{n=-k}^k x^2(n)$

[unité: le déciBel (dB)]  $P_{dB} = 10 \log(|P|) = 10 \log(P)$  ( $P \geq 0$ )

Ex  $x(n) = \Gamma(n) \rightarrow$  l'énergie diverge ( $E = \infty$ ) mais la puissance moyenne du signal reste finie:  $P = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k+1} \sum_{n=-k}^k |x(n)|^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k+1} \sum_{n=0}^k 1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k+1} (k+1) = \frac{1}{2}$

- *Rapport Signal/Bruit (SNR)* :  
 .  $s(t)$  signal utile et  $b(t)$  bruit, sont 2 signaux (TC) causaux, scalaires, de durée  $T$   
 .  $s_n$  signal utile et  $b_n$  bruit, sont 2 signaux (TD) causaux, scalaires, de  $N$  échantillons

. *SNR instantané* :  $\frac{\text{puissance instantanée du signal}}{\text{puissance instantanée du bruit}}$  : (TC)  $SNR_i = \frac{P_x}{P_b} = \frac{x^2(t)}{b^2(t)} \Big|_{t=\tau}$  (TD)  $SNR_i = \frac{P_x}{P_b} = \frac{x_n^2}{b_n^2} \Big|_{n=k}$

. *SNR moyen* :  $\frac{\text{puissance moyenne du signal}}{\text{puissance moyenne du bruit}}$  : (TC)  $SNR = \frac{P_x}{P_b} = \frac{\int_0^T x^2(t) dt}{\int_0^T b^2(t) dt}$  (TD)  $SNR = \frac{P_x}{P_b} = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} x_n^2}{\sum_{n=0}^{N-1} b_n^2}$

[unité: le déciBel (dB)] (TC)  $SNR_{dB} = 10 \log \left( \frac{\int_0^T x^2(t) dt}{\int_0^T b^2(t) dt} \right) = 10 \log \left( \frac{P_x}{P_b} \right) = P_{x,dB} - P_{b,dB}$  (TD)  $SNR_{dB} = 10 \log \left( \frac{\sum_{n=0}^{N-1} x_n^2}{\sum_{n=0}^{N-1} b_n^2} \right) = 10 \log \left( \frac{P_x}{P_b} \right) = P_{x,dB} - P_{b,dB}$

Dans le cas de bruit aléatoire non ergodique, il faut prendre sa moyenne statistique (espérance) plutôt que sa moyenne temporelle (1 seule réalisation du bruit ne suffit pas).

- *Produit de convolution*: Soit les 2 signaux à TC  $x(t)$ ,  $y(t)$  (resp. à TD  $x(n)$ ,  $y(n)$ ). Leur produit de convolution

est défini par : (TC)  $x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau$  (TD)  $x(n) * y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) y(n - k)$

Dans le cas discret, la convolution (causale par exemple) peut s'écrire comme un produit scalaire de 2 vecteurs :

$x(n) * y(n) = \sum_{k=0}^N x(k) y(n - k) \equiv \sum_{k=0}^N x_k y_{n-k} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$  avec :  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = [x_0 \ x_1 \ \dots \ x_N]^T$  et :  $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_n \\ y_{n-1} \\ \vdots \\ y_{n-N} \end{bmatrix} = [y_n \ y_{n-1} \ \dots \ y_{n-N}]^T$

- Propriétés* :
- Le produit de convolution est commutatif :  $x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$
  - Le produit de convolution est aussi associatif et distributif par rapport à l'addition.
  - On fera apparaître, en Représentation Fréquentielle, le produit de convolution comme un produit de transformées fréquentielles (produit de polynômes).
  - La convolution discrète  $w_n = x_n * y_n = \sum_k x_k y_{n-k}$  est un algorithme *pyramidal* ( $\equiv$  il met en oeuvre une récurrence à partir de 2 signaux (ici  $x_n$  et  $y_n$ ) pour autoriser le calcul du signal résultat (ici  $w_n$ )).

- *Déconvolution*: A partir de l'expression du signal  $s(t)$  à TC (resp.  $s(n)$  à TD) comme produit de convolution :

$s(t) = x(t) * y(t)$  (resp.  $s(n) = x(n) * y(n)$ ), on peut extraire le signal  $x(t)$  par exemple (resp.  $x(n)$ ) par déconvolution, notée par l'opérateur  $\otimes$  : (TC)  $x(t) = s(t) \otimes y(t)$  (TD)  $x(n) = s(n) \otimes y(n)$

*Propriété* : On fera apparaître, en Représentation Fréquentielle, la déconvolution comme une division de polynômes.

- *Produit scalaire* : Soit les 2 signaux à TC  $x(t), y(t) \in L^2(I)$  ( $\equiv$  ensemble des fonctions de carré sommable sur  $I = [t_1, t_2]$ ), le produit scalaire associé est : (TC)  $\langle x, y \rangle = \int_I x(t)y^*(t)dt$  où  $y^*(t)$  est le conjugué du complexe  $y(t)$

On a :  $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$

Dans le cas réel :  $\langle x, y \rangle = \int_I x(t)y(t)dt$

- *Fonction de corrélation*

- *Fonction d'intercorrélation* : Elle permet la comparaison de 2 signaux :  
soit les 2 signaux à TC  $x(t), y(t)$  (resp. à TD  $x(n), y(n)$ ).

La fonction de corrélation à TC  $\varphi_{xy}(t)$  (resp. à TD  $\varphi_{xy}(n)$ ) traduit la ressemblance de 2 signaux :

$$(TC) \varphi_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t+\tau)d\tau \qquad (TD) \varphi_{xy}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(n+k)$$

Cas de signaux complexes (\*  $\equiv$  conjugué) : (TC)  $\varphi_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y^*(t+\tau)d\tau$  (TD)  $\varphi_{xy}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y^*(n+k)$

Il faut bien sûr que l'un au moins des 2 signaux  $x$  ou  $y$  soit à énergie finie pour que ce calcul soit possible. Puisque  $\varphi_{xy}(t)$  (resp.  $\varphi_{xy}(n)$ ) est une mesure de la similitude entre  $x(t)$  et  $y(t)$  (resp. entre  $x(k)$  et  $y(k)$ ), elle atteint son maximum pour une valeur de  $t$  (resp. de  $k$ ) lorsque la similitude est la plus grande.

En pratique, ces formules ne sont utilisables ( $\equiv$  programmables) que si les 2 signaux  $x$  et  $y$  sont à durée limitée. Par exemple, dans le cas discret, si  $N$  et  $M$  sont les durées respectives de  $x(k)$  et  $y(k)$ , alors la durée de  $\varphi_{xy}(n)$  est  $N + M - 1$ .

Si l'un des signaux  $x$  ou  $y$  n'est pas à durée limitée, il faut alors le fenêtrer pour limiter sa durée (d'observation, de calcul). Pour des signaux à énergie infinie, les formules de définition précédentes ne convergent pas.

Dans le cas discret par exemple, pour des signaux périodiques de période  $N$ , la fonction d'intercorrélation est définie par :

$$\varphi_{xy}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=m}^{m+N-1} x(k)y(n+k) \quad \text{avec } m \text{ entier quelconque.}$$

*Propriétés de la fonction d'intercorrélation*

. Elle est anticommutative (!Elle n'est pas paire): (TC)  $\varphi_{xy}(t) = \varphi_{yx}(-t)$  (TD)  $\varphi_{xy}(n) = \varphi_{yx}(-n)$

. La fonction de corrélation peut s'écrire à l'aide d'une convolution :

$$(TC) \varphi_{xy}(t) = x(-t) * y(t) \quad (TD) \varphi_{xy}(n) = x(-n) * y(n)$$

. On fera apparaître, en Représentation Fréquentielle, la fonction de corrélation comme un produit de transformées fréquentielles (produit de polynômes).

On en déduit la fonction d'autocorrélation  $\varphi_{xx}(t)$  (TC) (resp.  $\varphi_{xx}(n)$  (TD)) :

- *Fonction d'autocorrélation*

Elle traduit la vitesse de variation du signal  $x(t)$  (resp.  $x(n)$ ) :

$$(TC) \varphi_{xx}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)x(t+\tau)d\tau \qquad (TD) \varphi_{xx}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)x(n+k)$$

Cas de signaux complexes (\*  $\equiv$  conjugué) : (TC)  $\varphi_{xx}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)x^*(t+\tau)d\tau$  (TD)  $\varphi_{xx}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)x^*(n+k)$

*Propriétés* : . La fonction d'autocorrélation  $\varphi_{xx}(t)$  est maximale pour  $t = 0$  (TC)

(resp.  $\varphi_{xx}(n)$  maximale pour  $n = 0$  (TD)).

. La fonction d'autocorrélation est paire : (TC)  $\varphi_{xx}(-t) = \varphi_{xx}(t)$  (TD)  $\varphi_{xx}(-n) = \varphi_{xx}(n)$

. La fonction d'autocorrélation peut s'écrire à l'aide d'une convolution :

$$(TC) \varphi_{xx}(t) = x(-t) * x(t) \qquad (TD) \varphi_{xx}(n) = x(-n) * x(n)$$

## II. SYSTEMES

### 1. Systèmes

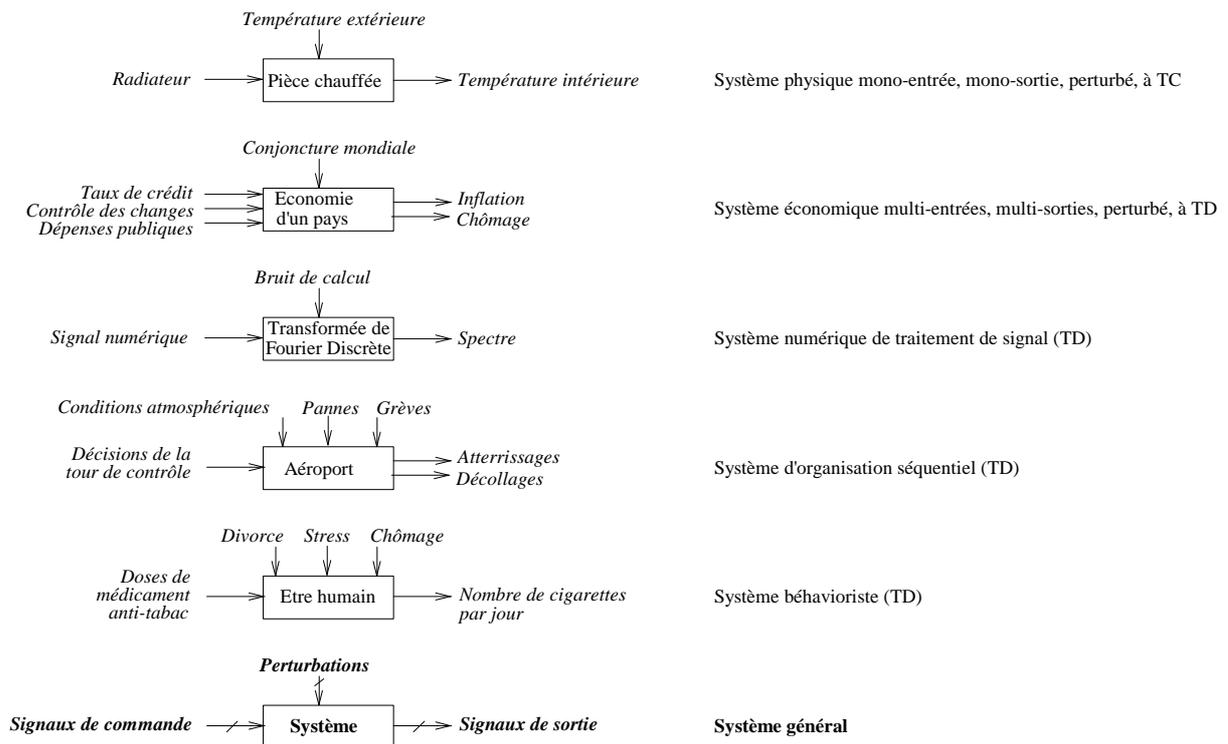
Un système est une « entité » possédant éventuellement une (ou plusieurs) entrées et éventuellement une (ou plusieurs) sorties.

$$x \longrightarrow \boxed{\Phi} \longrightarrow y = \Phi(x)$$

Notation : un système  $\Phi$  excité par un signal d'entrée  $x$  répond par un signal de sortie :  $y = \Phi(x)$ .

### 2. Types de systèmes

Les quelques exemples suivants permettent d'illustrer la notion de système :



Les signaux de perturbations sont des entrées particulières du système dans le sens où on ne peut agir sur elles, contrairement aux entrées de commande.

L'étude d'un système consiste à rechercher un modèle mathématique du système, c'est-à-dire ses relations d'entrée-sortie. Ces relations peuvent être :

- algébriques : *systèmes statiques*
- des équations différentielles (TC) ou des équations aux différences (TD) : *systèmes dynamiques*
- algorithmiques (cas de la Transformée de Fourier Discrète) : *approche procédurale*
- descriptives (de type « si....alors... ») : *approches règles d'évolution de système expert et connexionniste (réseaux de neurones), logique floue ...*

**3. Définitions sur les systèmes**

- *Système Linéaire (SL) :*

Un système  $\Phi$  est linéaire s'il vérifie les 2 conditions suivantes :

$$\Phi(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot \Phi(x) \quad (\lambda \text{ réel si on se restreint à } x \text{ réel, sinon } \lambda \text{ vecteur si } x \text{ vecteur})$$

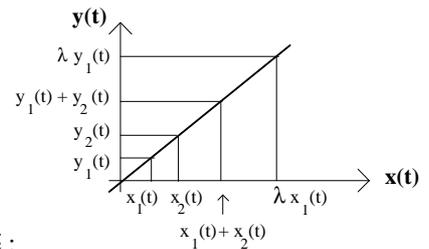
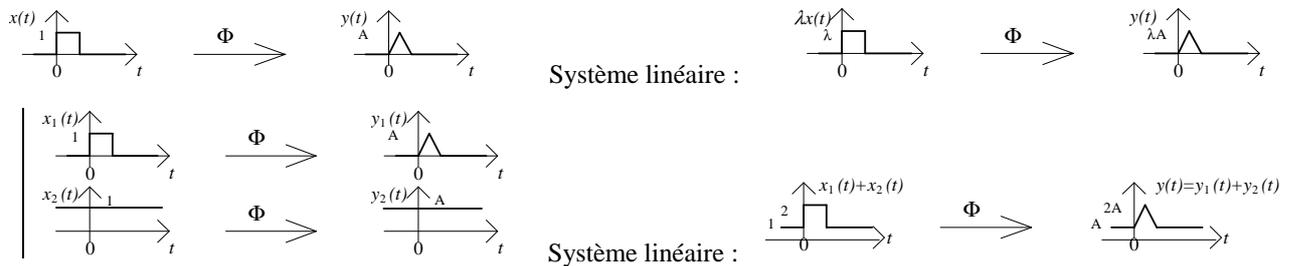
(Multiplier par un coefficient à l'entrée ou à la sortie du système revient au même)

et  $\Phi(x_1 + x_2) = \Phi(x_1) + \Phi(x_2)$  ( $x_1, x_2$  : signaux d'entrée)  
 (La réponse du système à la somme des entrées est égale à la somme des réponses à ces entrées)

ou la relation de combinaison linéaire, plus condensée mais moins pratique :  $\Phi(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2) = \lambda_1 \cdot \Phi(x_1) + \lambda_2 \cdot \Phi(x_2)$

**Un système linéaire est tel que les effets sont proportionnels aux causes, et la réponse à une somme d'entrées est identique à la somme de chacune des réponses à ces mêmes entrées.**

Avec un système linéaire, les transformées linéaires de Laplace, Fourier, z ... peuvent donc s'appliquer.



Pour un système linéaire, à tout instant on a donc la caractéristique de linéarité :

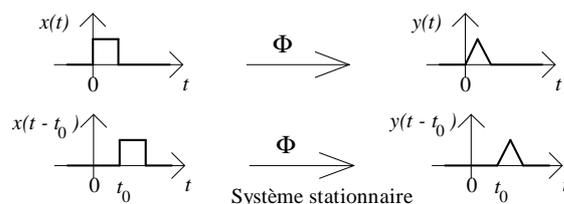
- *Système stationnaire (ou encore à Temps Invariant (TI) ou enfin non dynamique) :*

Système dont la réponse est invariante par décalage du temps (i.e. de l'origine des temps) : système qui n'est pas en évolution (une même entrée appliquée à 2 instants différents provoque une même réponse décalée d'autant).

**Un système stationnaire n'évolue pas dans le temps. L'origine des temps n'a pas d'importance.**

**Un système stationnaire est tel que les mêmes causes (entrées) produisent les mêmes effets (sorties) à des instants différents.**

$$TC: \text{ si } \Phi[x(t)] = y(t) \rightarrow \Phi[x(t - t_0)] = y(t - t_0)$$



$$TD: \text{ si } \Phi[x(n)] = y(n) \rightarrow \Phi[x(n - k)] = y(n - k)$$

*Pour un système stationnaire, il revient au même de traiter une entrée puis décaler le résultat que de décaler l'entrée puis la traiter.*

**Un système non stationnaire est un système en évolution.**

- Réponse Impulsionnelle (RI) (ou Percussionnelle (RP) ) d'un système :

C'est la réponse, notée  $h(t)$  (TC), ou  $h(n)$  (TD) à l'entrée  $\delta(t)$  (TC) ou  $\delta(n)$  (TD).

On a, si les Conditions Initiales (CI) sont nulles :

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{\Phi} \longrightarrow h(t) \quad (\text{TC}) \qquad \delta(n) \longrightarrow \boxed{\Phi} \longrightarrow h(n) \quad (\text{TD})$$

On notera même le système par sa RI (les flèches sont implicites) : (CI nulles)

$$x(t) \text{ --- } \boxed{h(t)} \text{ --- } y(t) \quad (\text{TC}) \qquad x(n) \text{ --- } \boxed{h(n)} \text{ --- } y(n) \quad (\text{TD})$$

**La RI caractérise complètement un Système Linéaire à Temps Invariant (SLTI) (hors CI) :**

la seule connaissance de  $h$  permet de prédire la réponse du SLTI à n'importe quelle entrée  $x$  :

*(Si l'Homme était un système linéaire et stationnaire (alors qu'il n'est généralement ni l'un ni l'autre, sauf sur une plage de fonctionnement très réduite !), la réponse à la seule question - l'impulsion de Dirac - permettrait de déduire la réponse à n'importe quelle question).*

Si un système n'est pas linéaire, il ne peut être caractérisé par sa RI.

On a la relation fondamentale de convolution entre entrée et sortie pour les SL :

(le produit de convolution est linéaire, commutatif, associatif, distributif par rapport à l'addition)

$$\text{SL :} \qquad y(t) = h(t, \tau) * x(t) \quad (\text{TC}) \qquad y(n) = h(n, k) * x(n) \quad (\text{TD})$$

$$\text{SLTI :} \qquad y(t) = h(t) * x(t) \quad (\text{TC}) \qquad y(n) = h(n) * x(n) \quad (\text{TD})$$

Si un système linéaire n'est pas à Temps Invariant, la RI dépend de l'origine des temps ( $\tau$  à TC) (resp.  $k$  à TD):

→ RI d'un SL non stationnaire : - à TC :  $h(t, \tau)$  - à TD :  $h(n, k)$

- Cas essentiel des SLTI :

$$\left| \begin{array}{l} y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)x(\tau)d\tau \quad (\text{TC}) \\ y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n - k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n - k)x(k) \quad (\text{TD}) \end{array} \right.$$

SLTI à TC : il est régi par une équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$\rightarrow \sum_{i=0}^k a_i y^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^m b_i x^{(i)}(t) \quad [k > m \text{ pour les systèmes physiques } (\equiv \text{ passe-bas})]$$

Cette équation différentielle linéaire à coefficients constants et décrivant un SLTI n'est autre que l'équation de convolution.

SLTI à TD : il est régi par une équation aux différences linéaire à coefficients constants :

$$\rightarrow \sum_{i=0}^k a_i y(n - i) = \sum_{i=0}^m b_i x(n - i)$$

Démonstration de la relation fondamentale de convolution des SLTI :

SLTI	$y(t) = h(t) * x(t)$ (TC)	$y(n) = h(n) * x(n)$ (TD)
	TC	TD
Définition	$\delta(t) \xrightarrow{h(t)} h(t)$ si les Conditions Initiales (C.I.) sont nulles	$\delta(n) \xrightarrow{h(n)} h(n)$ si C.I. nulles
Stationnarité	$\delta(t-\tau) \xrightarrow{h(t)} h(t-\tau)$	$\delta(n-k) \xrightarrow{h(n)} h(n-k)$
Linéarité	$x(\tau)\delta(t-\tau) \xrightarrow{h(t)} x(\tau)h(t-\tau)$	$x(k)\delta(n-k) \xrightarrow{h(n)} x(k)h(n-k)$
Linéarité	$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \xrightarrow{h(t)} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) \xrightarrow{h(n)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$
	Or : $\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-\tau)d\tau$ $= x(t)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau)d\tau = x(t).1 = x(t)$ d'où : (aire de $\delta = 1$ )	or : $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n)\delta(n-k)$ $= x(n)\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n-k) = x(n).\mathbf{1}(n) = x(n)$ d'où : ( $\mathbf{1}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n-k)$ )
	$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = y(t)$ $x(t) \xrightarrow{h(t)} = x(t) * h(t)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = y(n)$ $x(n) \xrightarrow{h(n)} = x(n) * h(n)$

- Système récursif

La sortie à un instant donné dépend de la sortie à d'autres instants

- la seule connaissance de l'entrée ne suffit pas à connaître la sortie (notion de mémoire)
- état initial de la sortie à connaître.

- Système causal

Système qui, à un instant donné, ne nécessite ni la connaissance du futur de l'entrée ni celle du futur de la sortie pour fournir sa réponse à cet instant. Il est caractérisé, s'il est linéaire stationnaire, par une RI causale (RI nulle à  $t < 0$ ) si bien sûr les CI sont nulles.

(TD) : à l'instant  $n$  fixé, la sortie  $y_n$  d'un système causal ne dépend que des valeurs passées ou présentes ( $k \leq n$ ) de l'entrée  $x_k$ , et des valeurs passées ( $k \leq n - 1$ ) de la sortie  $y_k$ .

De même, un système linéaire stationnaire non causal possède une RI non causale.

→ Dans la relation d'entrée-sortie du système, la sortie à un instant donné ne dépend que du passé et du présent (et non pas du futur) de l'entrée et de la sortie. (Le futur étant défini à partir d'une échelle de temps  $t$  dans le sens  $\rightarrow$ ).

Pour un système **causal**, le temps s'écoule de la gauche vers la droite lors d'un balayage de traitement ( $t \rightarrow$ ).

Pour un système **non causal**, le temps s'écoule de la droite vers la gauche lors d'un balayage de traitement ( $t \leftarrow$ ) : si on déroulait le temps dans le sens causal ( $t \rightarrow$ ) un système non causal répondrait avant d'être excité !

Exemple de filtrage causal :



$x(k)$  est le niveau de gris ( $0 \leq x(k) \leq 255$ ) du pixel d'index  $k$  dans la ligne d'une image Noir & Blanc.

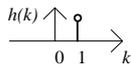
Pour appliquer un filtre *causal*, il faut balayer une ligne d'image de la gauche vers la droite ( $t \rightarrow$ ) : (le sens de balayage n'a réellement d'importance que dans le cas d'un filtrage récursif)

Filtrage causal non récursif : Exemple:  $y(k) = x(k) - x(k-1)$  (dérivateur discret)

Dans le cas d'un filtrage non récursif, on n'est pas obligé de balayer une ligne de la gauche vers la droite, on pourrait tout aussi bien balayer de la droite vers la gauche.

Filtrage causal récursif : Exemple:  $y(k) = x(k) - y(k-1)$  (dérivateur discret récursif)

Dans le cas d'un filtrage récursif, il est impératif de balayer une ligne de la gauche vers la droite, et non de droite à gauche, car le filtre fait référence à un pixel **déjà traité**, (qui doit donc  $\in$  au passé).

Autre façon de le voir: Ex.:  $y(k) = x(k-1)$  RI  $h(k) = \delta(k-1)$   Pour fournir la réponse  $t$  s'écoule  $\rightarrow$ .

Un système causal peut travailler en temps réel ( $\equiv$  on line) (sous réserve de puissance de calcul suffisante).

Un système non causal ne peut agir qu'en temps différé ( $\equiv$  off line) sauf si l'entrée est connue d'avance.

Pour un système **non causal** (plus exactement **anticausal** ( $\equiv$  système de RI nulle à  $t > 0$ ), **le temps s'écoule à l'envers, du futur vers le passé** lors d'un balayage de traitement ( $t \leftarrow$ ). (Si on fait dérouler le temps du passé vers le futur ( $t \rightarrow$ ) (déconseillé), un système non causal répond avant d'être excité ! Ex. :  $y(k) = x(k+1)$ )

Exemple de filtrage anticausal:



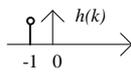
Pour appliquer un filtre *anticausal*, il faut balayer une ligne d'image *de la droite vers la gauche* ( $t \leftarrow$ ) :

*Filtrage anticausal non récursif* : Exemple:  $y(k) = x(k) - x(k+1)$  (dérivateur discret)

Dans le cas d'un filtrage non récursif, on n'est pas obligé de balayer une ligne *de la droite vers la gauche*, on pourrait tout aussi bien balayer de la gauche vers la droite.

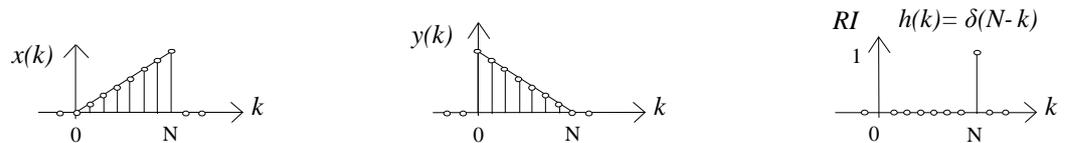
*Filtrage anticausal récursif* : Exemple:  $y(k) = x(k) - y(k+1)$  (dérivateur discret récursif)

Dans le cas d'un filtrage récursif, il est impératif de balayer une ligne *de la droite vers la gauche*, et non de gauche à droite, car le filtre fait référence à un pixel **déjà traité** (qui  $\in$  au passé si on prend une échelle de temps  $\leftarrow$ ) mais qu'on peut dangereusement faire apparaître comme futur avec un sens de déroulement du temps  $\leftarrow$ ).

Autre façon de le voir: Ex.:  $y(k) = x(k+1)$  RI  $h(k) = \delta(k+1)$   Pour fournir la réponse  $t$  s'écoule  $\leftarrow$ .

Exemple de filtrage anticausal : - Renversement (+ translation) du temps ( $\equiv$  ex. défilement à l'envers d'un son) :

Entrée :  $x(k)$  de longueur  $N$   $k \in [0, N]$  Sortie :  $y(k) = x(N-k)$  (système non stationnaire)



RI causale bien que le système soit non causal car le système est non stationnaire

Pour calculer  $y(k)$ , il faut connaître le futur de  $x$  ( $\equiv$  instant d'indice supérieur à  $k$ ).

Exemple de filtrage non causal :

*Filtrage non causal non récursif* : Exemple:  $y(k) = x(k-1) - x(k+1)$  (dérivateur discret à 2 pas)

On peut balayer le signal d'entrée dans le sens que l'on veut. On peut même décomposer le filtrage en 2 parties : causale (balayage  $\rightarrow$ ) :  $y^+(k) = x(k-1)$  et anticausale (balayage  $\leftarrow$ ) :  $y^-(k) = x(k+1)$  et écrire que :  $y(k) = y^-(k) + y^+(k)$ .

*Filtrage non causal récursif* : Exemple:  $y(k) = x(k) + y(k-1) + y(k+1)$

Cet exemple montre un filtrage qui n'a aucun sens, car on ne peut en même temps faire référence, pour un pixel déjà traité, au passé et à l'avenir (ambiguïté) !

- *Système réalisable* : Système causal (un système non causal a tout de même une existence physique).

- *Système instantané*

Système dont la sortie à un instant donné ne dépend que de l'entrée à cet instant. Dans tout autre cas, il est dit à mémoire.

- *Système stable*

- Système qui à une entrée bornée (en amplitude ou plutôt en **énergie**) répond par une sortie bornée (stabilité au sens large encore appelée stabilité non asymptotique au sens de Lyapunov).

- Système qui, perturbé (la perturbation étant modélisée par une impulsion de Dirac), revient à son état initial après disparition de la perturbation (stabilité au sens strict encore appelée stabilité asymptotique au sens de Lyapunov). Cette définition se traduit par le fait qu'initialement au repos, un système stable a sa RI qui tend vers 0 lorsque le temps  $t$  s'écoule ( $\equiv t \rightarrow +\infty$  pour un système causal,  $t \rightarrow -\infty$  pour un système non causal).

- *Système multivariable* ( $\neq$  *monovariante*) : Système comportant plusieurs entrées et sorties.

On s'intéressera essentiellement aux Systèmes Linéaires à Temps Invariant (SLTI) ( $\equiv$  Stationnaires (SLS)).

#### 4. Représentation d'Etat

Une autre Représentation temporelle, mieux adaptée à l'étude des systèmes multivariables, sera présentée dans un prochain chapitre.

#### 5. Modélisation des systèmes

La modélisation des systèmes a pour objectif d'établir des relations d'entrées-sorties des systèmes.

#### SYSTEMES DEMOGRAPHIQUES

*Elevage d'animaux à TD*      *Entrée : croisement / mortalité  $u(k)$*  - *Sortie : nombres de couples  $y(k)$*

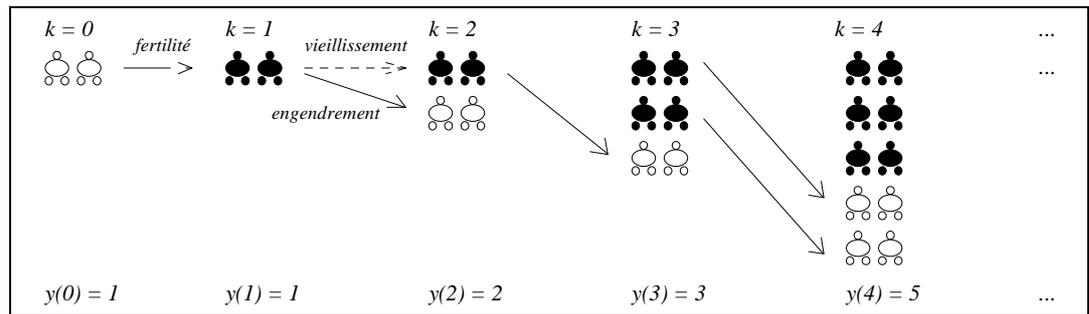
On observe un élevage d'animaux qui obéit aux lois suivantes : chaque mois un couple, s'il est fertile, engendre (après une gestation d'1 mois) 1 couple nouveau-né, et cela indéfiniment. Un couple nouveau-né devient fertile au bout d'1 mois et le reste constamment.

La mortalité et le croisement sont supposés ne concerner que les nouveaux-nés.

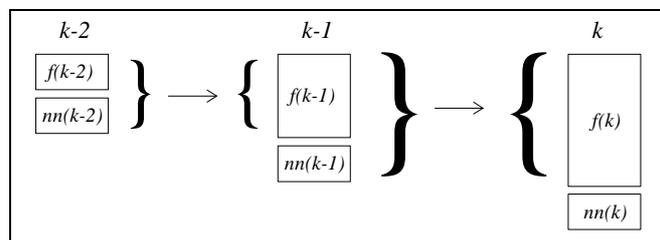
Un nombre de couples  $u(k) < 0$  traduit la mortalité (ou la vente !) des couples nouveaux-nés.  $u(k) > 0$  indique un croisement (immigration, introduction d'une population extérieure de couples nouveaux-nés). L'élevage débute au mois numéro 0.

On cherche à déterminer le nombre de couples  $y(k)$  le  $k$ -ième mois, présents dans l'élevage.

*Exemple : avec  $u(k) = \delta(k)$  :*



Soient :  $f(k)$  les couples fertiles et  $nn(k)$  les couples nouveau-nés, au mois  $k$  :



On a : 
$$\begin{cases} y(k) = y(k-1) + nn(k) \\ nn(k) = f(k-1) + u(k) \\ f(k) = y(k-1) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y(k) = y(k-1) + y(k-2) + u(k) \\ \text{avec } y(k < 0) = 0 \end{cases} \quad (\text{variante de suite de Fibonacci})$$

**SYSTEMES ECONOMIQUES**

Caisse d'épargne à TD

Entrée : investissement  $u(k)$  - Sortie : capital fructifié  $y(k)$

On considère une caisse d'épargne dans laquelle le client dépose chaque mois une somme d'argent  $u(k)$  (s'il s'agit d'un retrait,  $u(k)$  est négatif) placée au taux d'intérêt mensuel  $I$ ; le calcul des intérêts est le suivant : le  $i^{\text{ième}}$  mois, l'intérêt est calculé sur l'argent (capital et intérêt) en dépôt à la fin du  $(i-1)^{\text{ième}}$  mois. Chaque mois, le client dispose donc d'une somme d'argent  $y(k)$  qui représente la totalité de ses dépôts antérieurs augmentée des intérêts acquis.

Equation de fonctionnement de la caisse d'épargne :

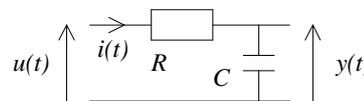
$$y(k) = y(k - 1) + I y(k - 1) + u(k) \rightarrow \begin{cases} y(k) = (1 + I)y(k - 1) + u(k) \\ \text{Condition Initiale (CI) } y(-1) \quad u(k) \text{ causal} \end{cases}$$

**SYSTEMES PHYSIQUES**

**Systèmes électriques**

Circuit RC intégrateur à TC

Entrée : tension  $u(t)$  - Sortie : tension  $y(t)$

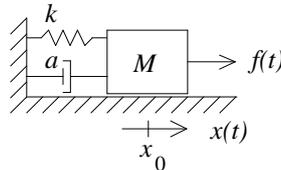


Lois de Kirschhoff :  $\begin{cases} u(t) - y(t) = Ri(t) \\ i(t) = C \frac{dy(t)}{dt} \end{cases} \rightarrow \boxed{RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t)} \quad (\text{CI } y_0)$

**Systèmes mécaniques**

Intégrateur mécanique à TC

Entrée : force  $f(t)$  - Sortie : position  $x(t)$  par rapport à  $x_0$



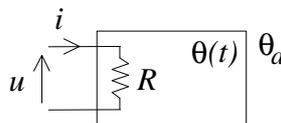
- $k$  : coeff. de frottement élastique
- $a$  : coeff. de frottement visqueux
- $x_0$  : position d'équilibre

Relation Fondamentale de la Dynamique :  $\sum \text{forces} = M\gamma \rightarrow \boxed{f(t) - kx(t) - a\dot{x}(t) = M\ddot{x}(t)}$

**Systèmes thermiques**

Four électrique à TC

Entrée: puissance électrique fournie  $p(t)$  - Sortie: température dans le four  $\theta(t)$



- $p(t) = u(t) i(t)$  : puissance électrique fournie
- $p_d(t)$  : puissance dissipée en pertes
- $p_u(t)$  : puissance utile
- $\theta_a$  : température ambiante, extérieure : Cte
- $m$  : masse du four
- $C$  : chaleur massique du four
- $C_c$  : capacité calorifique du four  $C_c = mC$
- $K$  : Cte de rayonnement du four

Pendant  $dt$ , le four reçoit l'énergie :  $dw = pdt = dw_1 + dw_2$  ( $p$  est  $\approx$  Cte pendant  $dt$ )  
 avec :  $dw_1$  : énergie absorbée pour l'accroissement de  $\theta(t)$  :  $dw_1 = p_u dt = mCd\theta = C_c d\theta$   
 $dw_2$  : pertes en dissipation d'énergie :  $dw_2 = p_d dt = K(\theta - \theta_a)dt$   
 Bilan énergétique: conservation de l'énergie:  $dw = pdt = dw_1 + dw_2 = C_c d\theta + K(\theta - \theta_a)dt$

d'où :  $\boxed{p(t) = C_c \frac{d\theta(t)}{dt} + K[\theta(t) - \theta_a]}$

## TD 1. Représentations Temporelles des Signaux & des Systèmes à TC & à TD

### 1. Décalage dans le temps - Avance - Retard - Renversement du temps [Voir TP]

A. Signal échantillonné  $x$  : signal à TD ( $k \in \mathbf{Z}$ )

$$x : k \rightarrow x(k) = \begin{cases} 0 & \text{pour } k < -1 \\ \frac{1}{2^k} & \text{pour } k \geq -1 \end{cases}$$

B. Signal analogique  $y$  : signal à TC ( $t \in \mathbf{R}$ )

$$y : t \rightarrow y(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < -1 \\ 4 & \text{pour } -1 \leq t < 0 \\ -4t + 4 & \text{pour } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{pour } t \geq 1 \end{cases}$$

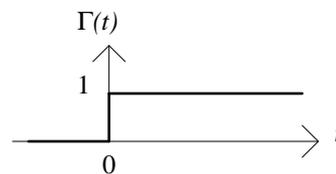
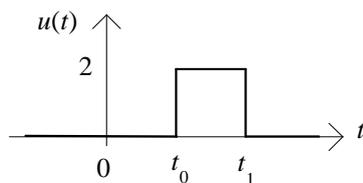
1. Dessiner les graphes de  $x$  et de  $y$ .

2. Expliciter les valeurs des signaux et les dessiner :

- retardés :	$x(k - 2)$	et	$y(t - 2)$
- avancés :	$x(k + 2)$	et	$y(t + 2)$
- renversés dans le temps :	$x(-k)$	et	$y(-t)$
- renversés-décalés :	$x(-k + 2)$	et	$y(-t + 2)$
- opposés :	$-x(k)$	et	$-y(t)$
- avec offset :	$x(k) + 2$	et	$y(t) - 2$
- amplifiés :	$2x(k)$	et	$-2y(t)$

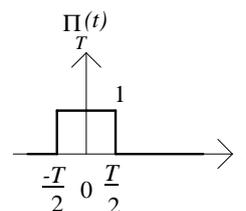
### 2. Décomposition d'un signal

- Exprimer analytiquement le signal  $u(t)$  de la figure comme une impulsion, puis l'exprimer à l'aide d'une somme d'échelons retardés (on posera  $T = t_1 - t_0$  et  $t_2 = \frac{t_0 + t_1}{2}$ ).



Rappels :

. Echelon :



. Impulsion :

### 3. Stationnarité - Linéarité - Causalité

On donne les relations d'entrée-sortie de systèmes analogiques ou numériques. Ils partent tous du repos [u : entrée ; y : sortie].

- Pour chaque système, préciser s'il est :

- Stationnaire (≡ à Temps Invariant)
- Linéaire
- Causal
- Récursif
- Stable

- 1)  $y(k) = ku(k)$
- 2)  $y(k) = u(k-1) + u(k+1)$
- 3)  $y(k+1) = 2y(k) - 3u(k+1)$
- 4)  $y(k) = 5[u(k)]^2$

Annexe

- 5)  $y(k) = \alpha(k)y(k-1) - 4y(k-2)y(k-3) + u(k-1)$
- 6)  $y(k) = u(k) + y(k-1)$  et  $y(k-1) = -u(k) + y(k)$  Comparer ces 2 filtres.
- 7)  $y(n) = \text{médian}[u(k-1), u(k), u(k+1)]$  (Médian non récursif).  
(Un filtre médian récursif causal serait par exemple :  $y(k) = \text{médian}[y(k-2), u(k-1), u(k)]$ ).
- 8)  $y(k) = u(k)y(k-1)$
- 9)  $y(k) = (k+1)u(k)$
- 10)  $y(k+1) = ry(k)[1 - y(k)]$  Ce système a un comportement chaotique\* si  $r > 3,57$ .  
(Ce système est purement récursif : c'est un Système Dynamique Discret, du 1er ordre).
- 11)  $y'(t) = 3u(t) - 5y(t)$
- 12)  $y''(t) = -3y(t)y'(t) + y(t) + 2$
- 13)  $y'(t) = u(t) + \sin[y(t)]$
- 14)  $y'(t) = 3u(t) - \alpha(t)y(t+1)$
- 15)  $y(k) = [u(k+1) + u(k-1)] / 2$  Nom de ce filtre ?
- 16)  $y(k) = [u(k) + y(k-1)] / 2$  Nom de ce filtre ?
- 17)  $y(t) = u(t) + y(t - \tau)$  ( $\tau > 0$ )

\* Un système *chaotique* est, entre autre propriété, caractérisé par une forte dépendance aux Conditions Initiales : une très faible variation des Conditions Initiales entraîne une très forte variation de la sortie.

- Rappels : - Stationnarité (TD) : si  $u(k) \rightarrow y(k)$  alors  $u(k-p) \rightarrow y(k-p)$
- Linéarité (TD) : si  $u(k) \rightarrow y(k)$  alors  $\lambda u(k) \rightarrow \lambda y(k)$   
et si  $u1(k) \rightarrow y1(k)$  et  $u2(k) \rightarrow y2(k)$  alors  $u1(k) + u2(k) \rightarrow y1(k) + y2(k)$
- Stabilité : EBSB : à Entrée Bornée (en amplitude, en énergie), Sortie Bornée
- Causalité (TD) : La sortie ne présente pas de dépendance vis-à-vis d'E/S futures :  
à l'instant  $k$  fixé,  $y(k)$  ne dépend que des valeurs passées ou présentes ( $p \leq k$ ) de  $x(p)$ ,  
et des valeurs passées ( $p \leq k-1$ ) de  $y(p)$ .  
Le système peut travailler en temps réel (sous réserve de puissance de calcul suffisante)
- Récursivité : La sortie à un instant donné dépend d'elle-même à un autre instant.

### 4. Filtres numériques

Soient les 2 opérateurs numériques suivants :

- Le Sélecteur (ou Décimateur) :

$$x(n) \text{ — } \boxed{\text{S}} \text{ — } x_s(n) \quad x_s(n) = \begin{cases} x(n) & \text{si } n \text{ pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

- Le Compresseur : (Compresseur avec perte peu sensible d'informations si  $n$  petit) (sous-échantillonnage)

$$x(n) \text{ — } \boxed{\text{C}} \text{ — } x_c(n) \quad x_c(n) = x(2n)$$

- Chacun de ces systèmes est-il stable, linéaire, causal, invariant par translation (≡ stationnaire) ?

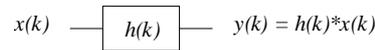
### 5. Produit de convolution

Soient deux signaux  $x(t)$  et  $y(t)$  nuls pour  $t < 0$  (causalité). On étudie le produit de convolution  $x(t) * y(t)$ .

- Montrer que les bornes de l'intégrale de définition se simplifient.  
(on traitera les 2 cas : - à Temps Discret et - à Temps Continu).

### 6. Réponse d'un système numérique [voir TP2]

Le système de contrôle d'altitude d'un avion peut être modélisé comme un SLTI numérique causal, dont l'entrée  $x(k)$  est l'altitude désirée (consigne) causale et la sortie  $y(k)$  est l'altitude réelle de l'appareil.



La Réponse Impulsionnelle de ce système et la consigne sont données par :

$K$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
$h(k)$	0	2	-3/2	1/2	-3/8	1/8	0	0	0	0
$x(k)$	0	1	2	3	3	3	2	1	0	0

- Déterminer  $y(k)$  pour les premiers pas d'échantillonnage.

### 7. Détermination de la Réponse Impulsionnelle : Déconvolution

Au laboratoire, la première idée qui vient à l'esprit pour obtenir la RI  $h(t)$  est d'exciter le système avec une impulsion brève et d'observer la sortie.

Le résultat (à Temps Continu) est souvent décevant, car le système réagit peu à une impulsion de faible énergie et «on ne voit rien» ou presque.

Toute augmentation de l'énergie est dangereuse car, par l'augmentation de l'amplitude on est menacé par la saturation, et par l'augmentation de la durée on ne satisfait plus à l'impératif de brièveté.

La deuxième idée est d'envoyer un train d'impulsions de façon à cumuler l'énergie. Cela se fait, et si les excitations sont réparties de manière quasi (pseudo) aléatoires, on peut par corrélation obtenir  $h(t)$ .

La troisième idée est d'envoyer une excitation quelconque mais connue  $u(t)$ , d'observer la réponse  $y(t)$ , et d'extraire  $h(t)$  de l'équation  $y(t) = h(t) * u(t)$ . C'est la **déconvolution**.

- Donner l'algorithme de déconvolution permettant de calculer la RI  $h(k)$  d'un SLTI à partir d'une entrée  $u(k)$  causale et de la sortie correspondante  $y(k)$  dans le cas d'un système discret causal avec  $u(0) \neq 0$ .

### 8. Filtre numérique

Soit le filtre numérique (générateur d'échos) suivant :



défini par son équation aux différences :  $y(nT) = x(nT) + \alpha y[(n - 1)T]$

1. Déterminer et tracer sa Réponse Impulsionnelle  $h(nT)$ .
2. Pour quelles valeurs de  $\alpha$  ce filtre est-il stable ?

### 9. Décomposition d'un filtre numérique en séquences paire et impaire

Montrer que tout signal  $h_n$  peut être décomposé en la somme de 2 séquences paire  $hp_n$  et impaire  $hi_n$ . Donner l'expression de  $hp_n$  et  $hi_n$  en fonction de  $h_n$ .

**TD 1 ANNEXE. Représentations Temporelles des Signaux et des Systèmes à TC et à TD**

**1. Stabilité**

- Parmi les systèmes linéaires soumis aux essais (figure), quels sont ceux qui sont stables et ceux qui ne le sont pas ?

Essai	1	2	3	4	5	6
Commande						
Réponse						

**2. Signal à Temps Continu et signal à Temps Discret**

Soit le signal analogique (rampe causale) :

$$\begin{cases} r(t) = t & \text{si } t \geq 0 \\ r(t) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Tracer  $r(t)$  et  $r(nT)$  (rampe discrète) avec  $T = 1s$ .

**3. Système récursif**

On considère le signal échantillonné  $s(k)$  défini par la relation :

$$\begin{cases} s(k + 1) = 8s(k) - 1 & \text{pour } k \geq 0 \\ s(0) = \frac{1}{7} \end{cases}$$

1. Calculer  $s(1), s(2), \dots, s(k)$ .
2. A l'aide d'une calculatrice, déterminer, en faisant tourner la récurrence,  $s(1), \dots, s(10), \dots, s(20)$ .
3. Expliquer les résultats.

**4. Traitement d'écho radar**

Le principe du radar consiste à émettre un signal de courte durée  $u(t)$  qui, réfléchi par la cible, revient à l'émetteur après une durée ( $t_1$ ) proportionnelle à la distance de l'émetteur à la cible.

Le signal en retour,  $x(t)$ , étant évidemment affaibli et bruité, on utilise le maximum de la fonction d'intercorrélation pour estimer  $t_1$ .

Soit  $x(t) = \alpha u(t - t_1)$  (on néglige le bruitage; seul l'atténuation est représentée (par le coeff.  $\alpha$ ))

Montrer que la fonction de corrélation  $\varphi_{ux}(t)$  est maximale pour  $t = t_1$ .

**5. Transformation fréquentielle**

On définit la Transformée ( $\equiv$  fonction de fonction)  $G(z)$  d'une fonction discrète  $f(n)$  par la relation :

$$G(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)z^{-n}$$

1. Donner l'expression de la Transformée  $G_1(z)$  de la séquence décalée :  $f(n - k)$
2. Donner l'expression de la Transformée  $G_2(z)$  de la séquence miroir :  $f(-n)$

## 6. Miroir

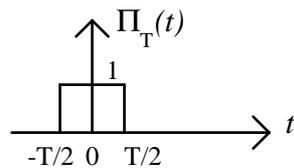
On considère deux fonctions discrètes  $u(n)$  et  $f(n) = u(n - N)$  où  $N$  est une Constante.

1. Exprimer la séquence  $g(n) = f(-n)$  en fonction de  $u()$ .
2. Exprimer la séquence  $u(N - n)$  comme miroir de  $u(n - N)$ .
3. Exprimer la séquence  $f(-n)$  comme miroir de  $f(n)$ .

## 7. Produit de convolution

- Calculer l'autoconvolution  $s(t)$  de  $\Pi_T(t)$  :  $s(t) = \Pi_T(t) * \Pi_T(t)$

Rappel :  $\left| \begin{array}{l} \Pi_T(t) = 1 \text{ si } -T/2 < t < T/2 \\ = 0 \text{ sinon} \end{array} \right.$



## 8. Convolution avec $\delta(t)$

- Montrer que :

$$\left| \begin{array}{l} x(t) * \delta(t) = x(t) \quad \text{(TC)} \\ x(n) * \delta(n) = x(n) \quad \text{(TD)} \end{array} \right.$$

et :

$$\left| \begin{array}{l} x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0) \quad \text{(TC)} \\ x(n) * \delta(n - k) = x(n - k) \quad \text{(TD)} \end{array} \right.$$

### TP 1. Représentations Temporelles des Signaux & des Systèmes à TC & à TD

Note : le signal à TD  $x(k)$  est programmé comme un tableau  $x_k$  et non comme une fonction  $x(k)$

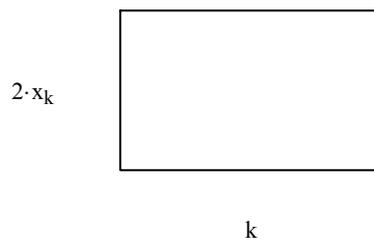
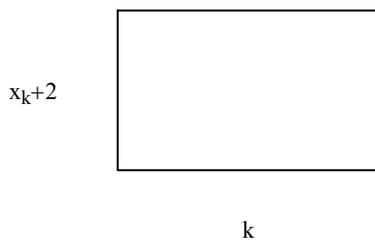
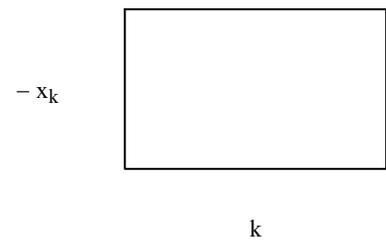
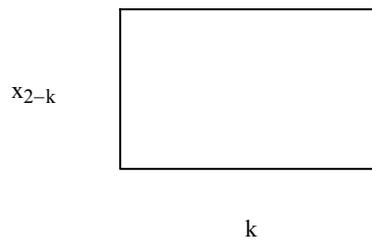
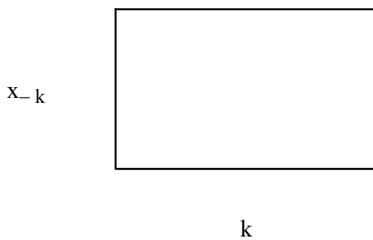
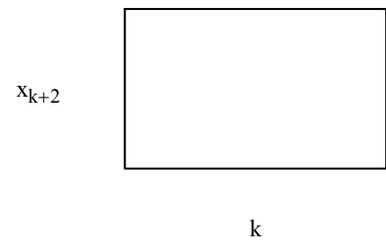
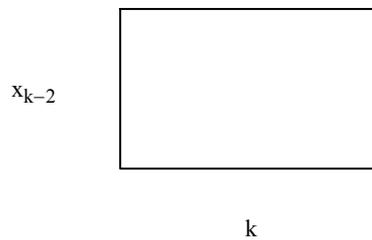
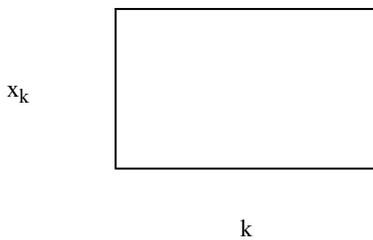
car, même si cela revient au même ici, dans le cas d'un signal récursif, la programmation est plus efficace (pas de risque de débordement de pile lors des appels récursifs).

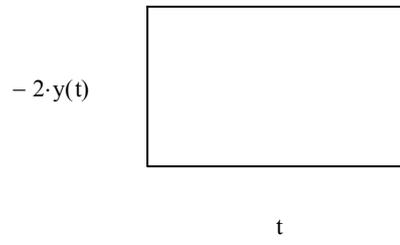
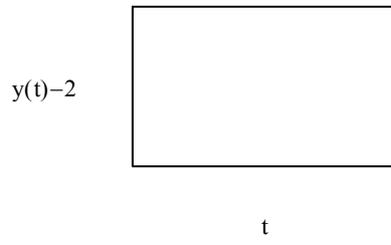
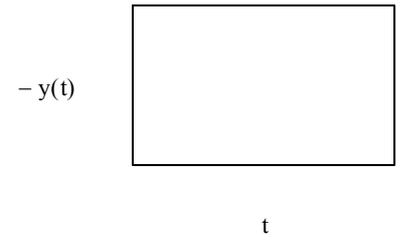
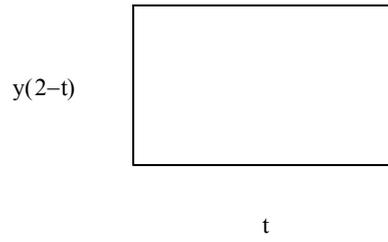
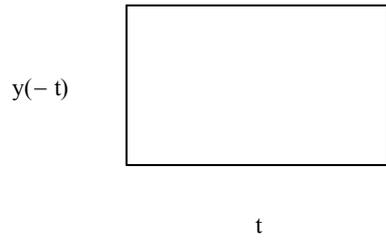
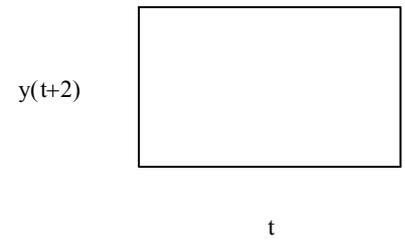
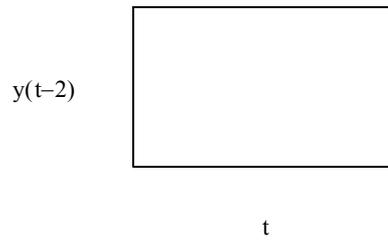
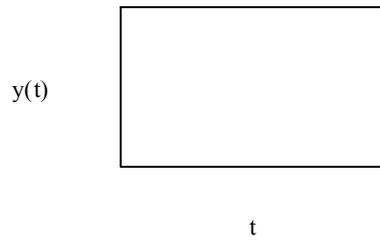
#### 1. Décalage dans le temps - Avance - Retard - Renversement du temps [Voir TD]

ORIGIN := -5      k := -5..5      t := -5, -5 + 0.01..5

$$x_k := \begin{cases} 0 & \text{if } k < -1 \\ \frac{1}{2^k} & \text{if } k \geq -1 \end{cases}$$

$$y(t) := \begin{cases} 0 & \text{if } t < -1 \\ 4 & \text{if } -1 \leq t < 0 \\ -4 \cdot t + 4 & \text{if } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{if } t \geq 1 \end{cases}$$

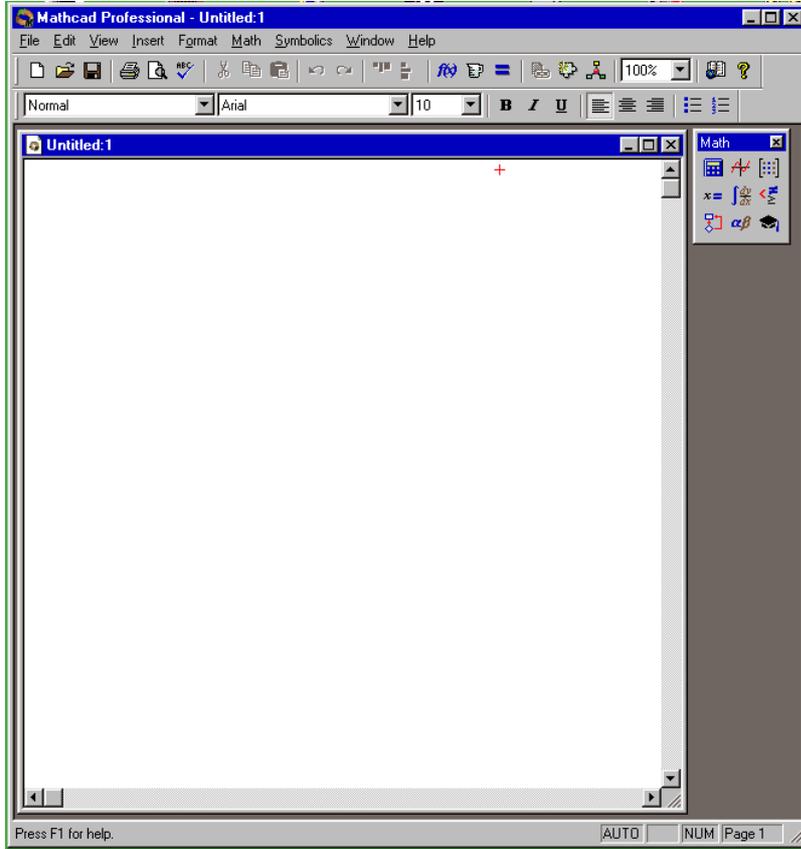




## 2. Tutorial Mathcad

### 1. Tour rapide

#### 1.1. Mathcad 2001i

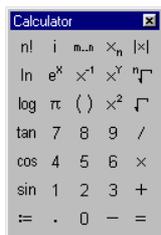


#### 1.2. Les palettes mathématiques (barre d'outils mathématiques)

*Math Toolbar*

##### 1.2.1. La palette arithmétique

*Calculator toolbar*



##### 1.2.2. La palette graphique

*Graph toolbar*



1.2.3. La palette matricielle

Matrix toolbar



1.2.4. La palette d'évaluation

Evaluation toolbar



1.2.5. La palette de calcul

Calculus toolbar



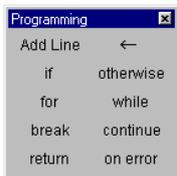
1.2.6. La palette de calcul booleen

Boolean toolbar



1.2.7. La palette de programmation

Programming toolbar



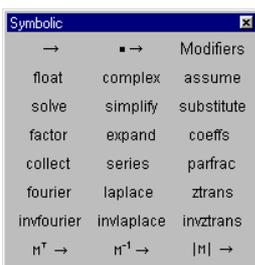
1.2.8. La palette de lettres grecques

Greek toolbar

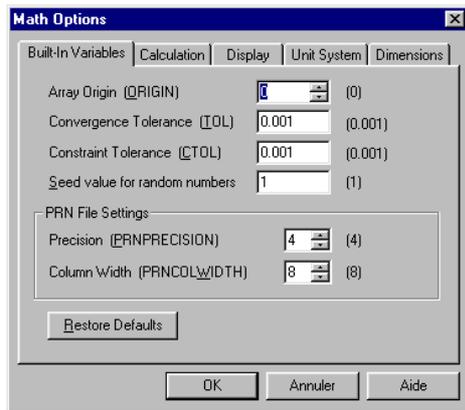


1.2.9. La palette symbolique

Symbolic toolbar



1.3. Options (Menu Maths → Options)

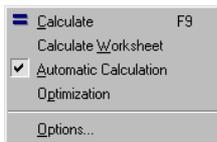


L'origine des tableau (*Array Origin*) fixe l'index de base des tableaux et vecteurs. Elle a 0 pour valeur défaut. Pour manipuler des indices négatifs de vecteurs, l'origine doit être fixée à une valeur négative minimale au-dessous de laquelle les vecteurs ne sont jamais indexés.

Plutôt que de fixer cette origine par cette boîte de dialogue, on peut aussi le faire par la commande Mathcad : `ORIGIN := -1000`

qui autorise alors la manipulation des indices de vecteurs de `ORIGIN = -1000` à une valeur maximale dépendant de la mémoire RAM disponible (un swap disque devient vite rédhibitoire).

1.4. Calcul automatique (Menu Maths → Automatic calculation)

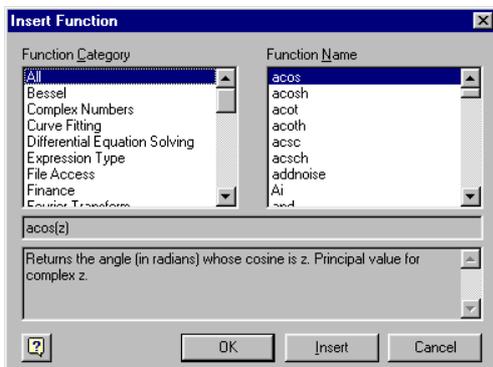


Cette option (*débrayable*) permet de calculer en *temps réel* les calculs spécifiés dans la feuille courante.

*Les calculs s'effectuent de haut en bas et de gauche à droite dans la feuille de calcul courante.*

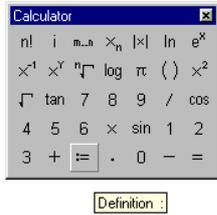
Pour arrêter un calcul en cours, il suffit d'appuyer sur la touche **Echap**. La reprise du calcul peut se faire par *Calculate* dans le menu *Maths* après avoir placé le curseur à l'emplacement du calcul à poursuivre.

1.5. Fonctions prédéfinies de la bibliothèque Mathcad (Menu Insert → Function)



## 2. Les bases

### 2.1. Affectation. Variables globales

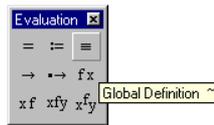


Affectation d'une variable  $a := 5$

Affectation d'une fonction  $f(t) := \sin(t)$

Une affectation est globale à la feuille de calcul. Une variable globale par exemple, est connue dans tout le reste du document après avoir été définie (donc dans la partie du document inférieure (≡ postérieure) à l'affectation de la variable).

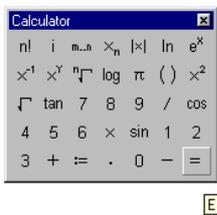
Toutefois, on peut affecter une variable par exemple, de façon globale dans toute la feuille de calcul (connue même avant, au-dessus (≡ antérieure) de l'affectation).



L'opérateur correspondant est le suivant :

Matrice globale :  $w \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

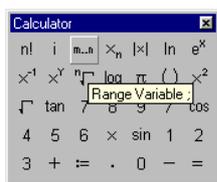
### 2.2. Affichage de valeurs



Cet opérateur autorise l'affichage de la valeur d'une variable, d'une matrice, d'une fonction ... issue d'un calcul ou d'une affectation.

$a = 5$        $f(0) = 0$        $w = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

### 2.3. Variables suites



Variables suites entières :  $k := 0, 0 + 1..5$  ou encore  $k := 0..5$

k =

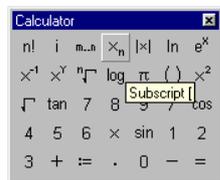
0
1
2
3
4
5

Variables suites réelles :  $t := -5, -5 + 0.1..5$

La syntaxe est la suivante :  $t := start, start + step .. end$  *step* est optionnel (par défaut  $step = 1$ )

**2.4. Vecteurs et fonctions**

Vecteurs



$x_k := k$

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

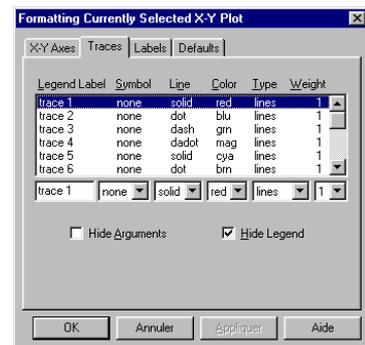
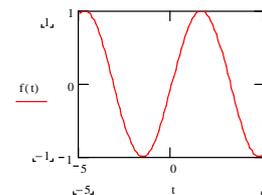
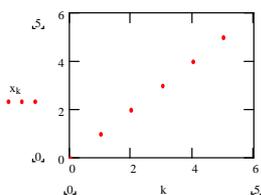
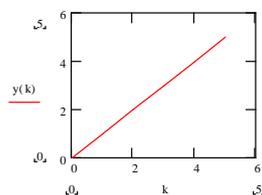
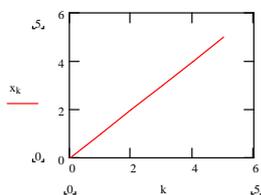
Fonctions

$y(k) := k$

y = fonction ■

L'usage des vecteurs est en général préférable à celui des fonctions notamment dans le cas de fonctions récursives, très coûteuses en espace mémoire.

**2.5. Graphique**



2.6. Variables intégrées

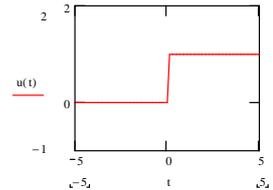
```

. π      π = 3.142
. e      e = 2.718
. ∞      ∞ = 1 × 10307
. FRAME
    
```

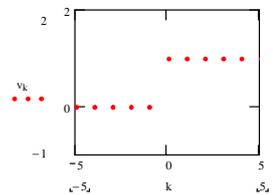
2.7. Fonctions prédéfinies

. Fonction échelon

Echelon à TC     $t := -5, -5 + 0.1..5$      $u(t) := \Phi(t)$

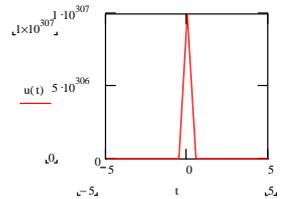


Echelon à TD    ORIGIN:= -100     $k := -5..5$      $v_k := \Phi(k)$

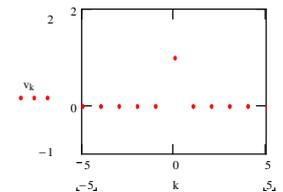


. Distribution delta

Delta à TC     $t := -5, -5 + 0.5..5$      $u(t) := \begin{cases} \infty & \text{if } t = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$



Delta à TD     $k := -5..5$      $v_k := \delta(k, 0)$     ou encore     $v_k := \begin{cases} 1 & \text{if } k = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$



2.8. Calcul symbolique

Transformée de Laplace d'une fonction (échelon)

$g(t) := \Phi(t)$      $G(s) := g(t) \text{ laplace, } t \rightarrow \frac{1}{s}$

Transformée de Laplace inverse

$h(t) := G(s) \text{ invlaplace, } s \rightarrow 1$     (h(t) est implicitement causale)

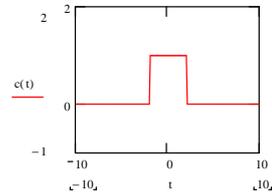
2.9. Programmation

A l'intérieur d'un programme, les variables sont locales : l'instruction d'affectation globale := n'est alors pas permise et l'affectation locale se fait par ←. Le résultat d'un programme (la valeur de retour) par contre, est globale à la feuille de calcul.

. Définition d'une fonction (fenêtre)

$$c(t) := \begin{cases} 0 & \text{if } t < -2 \\ 0 & \text{if } t > 2 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

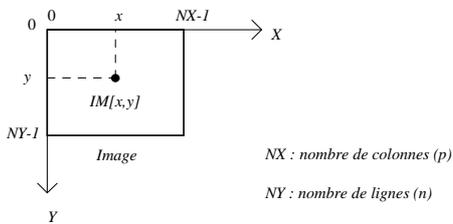
t := -10, -10 + 0.1.. 10



. Programme d'inversion vidéo d'une image

Rappels

Image digitalisée = tableau 2D IM de n lignes et p colonnes : IM [0:p-1, 0:n-1]  
 IM[x, y] = niveau de gris du pixel de coordonnées x et y : 0 ≤ x ≤ p-1 0 ≤ y ≤ n-1  
 0 ≤ IM[x, y] ≤ 255 (0 : Noir 255 : Blanc)



ORIGIN:= 0

I := READBMP("bato2.bmp")      Nombre de colonnes : Nx := cols(I)      Nx = 128  
 Nombre de lignes : Ny := rows(I)      Ny = 128



I

Traitement 2D :

$$T2D(U) := \begin{cases} \text{for } y \in 0.. \text{rows}(U) - 1 & K := T2D(I) \\ \text{for } x \in 0.. \text{cols}(U) - 1 & \\ J_{y,x} \leftarrow 255 - U_{y,x} & \\ \text{return } J & \end{cases}$$



K

Traitement 1D (colonne) :

$$T1Dy(f) := \begin{cases} \text{for } y \in 0.. \text{length}(f) - 1 & T1D(U) := \begin{cases} \text{for } x \in 0.. \text{cols}(U) - 1 & L := T1D(I) \\ g_y \leftarrow 255 - f_y & \\ \text{return } g & \end{cases} \\ \text{return } g & \end{cases}$$

$$J \leftarrow \begin{cases} f \leftarrow U^{\langle x \rangle} \\ J^{\langle x \rangle} \leftarrow T1Dy(f) \end{cases}$$



L

I =

0	185	186	166	165	183
1	184	189	166	166	183
2	184	182	157	170	180
3	186	186	152	173	187
4	193	190	149	177	178

K =

0	70	69	89	90	72
1	71	66	89	89	72
2	71	73	98	85	75
3	69	69	103	82	68
4	62	65	106	78	77

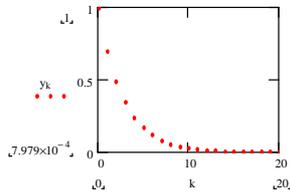
2.10. Equations récurrentes

Filtre récursif (générateur d'écho)  $y_k = x_k + \alpha y_{k-1}$  avec  $x_k = \delta_k$  et  $\alpha = 0.7$

$$k := 0..20 \quad x_k := \delta(k,0) \quad \alpha := 0.7 \quad y_k := \begin{cases} x_k & \text{if } k = 0 \\ x_k + \alpha y_{k-1} & \text{otherwise} \end{cases}$$

ou encore :

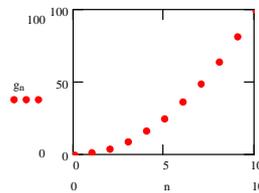
$$y := \begin{cases} \alpha \leftarrow 0.7 \\ \text{for } k \in 0..10 \\ \quad \begin{cases} x_k \leftarrow \delta(k,0) \\ y_k \leftarrow x_k & \text{if } k = 0 \\ y_k \leftarrow x_k + \alpha \cdot y_{k-1} & \text{otherwise} \end{cases} \end{cases} y$$



2.11. Animation

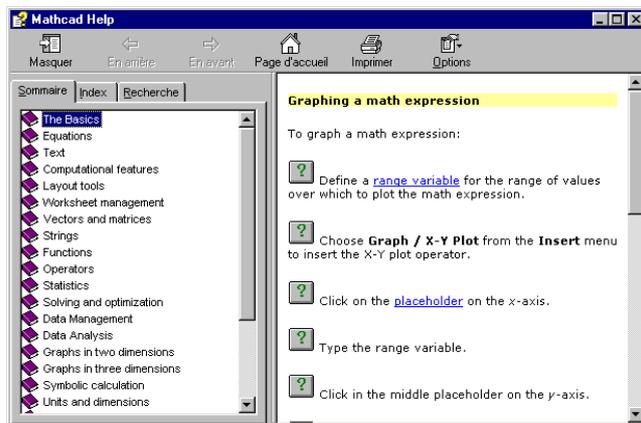
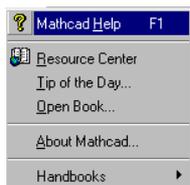
Une variable prédéfinie (FRAME) autorise l'animation d'un graphique par exemple, en l'utilisant dans une variable suite :

$$n := 0..FRAME \quad g_n := n^2$$

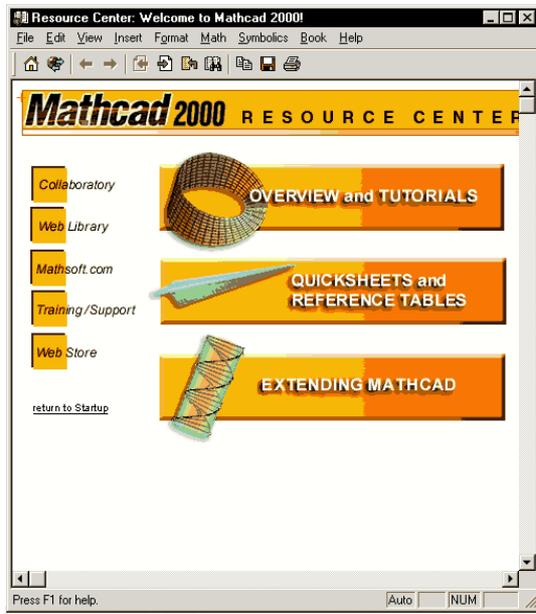


3. Aide et Collaboratory

. Aide



. Resource center (Quicksheets, Collaboratory (<http://collab.mathsoft.com/~Mathcad2001i/>) ...)



### TP 2. Tutorial Mathcad

Un signal à TC sera programmé comme une fonction  $x(t)$ ,  $t$  réel

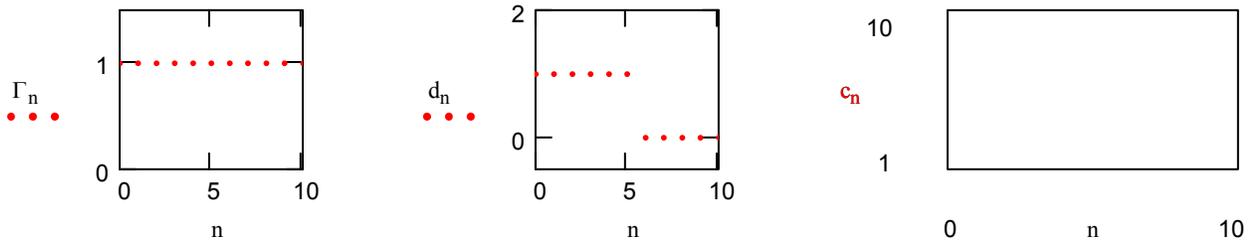
Un signal à TD sera programmé comme une fonction  $x(n)$ ,  $n$  entier, ou mieux comme un vecteur  $x_n$  (pour des problèmes de récursivité)

#### 1. Convolution discrète $c_n$ de signaux causaux

Convolution d'une transition  $\Gamma_n$  avec une porte  $\Pi_n$

$$C := 10 \quad n := 0..C \quad \Gamma_n := \Phi(n) \quad \Pi_n := \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \leq n \leq \frac{C}{2} \\ 0 & \text{if } n > \frac{C}{2} \end{cases} \quad s_n := \Gamma_n \quad d_n := \Pi_n$$

$c_n :=$  ■



#### 2. Réponse d'un système numérique [voir TD1]

On reprend les exercices 6 & 7 du TD1 :

Le système de contrôle d'altitude d'un avion peut être modélisé comme un SLTI numérique causal, dont l'entrée  $x(k)$  est l'altitude désirée (consigne) causale et la sortie  $y(k)$  est l'altitude réelle de l'appareil.

$$x(k) \text{ --- } \boxed{h(k)} \text{ --- } y(k) = h(k) * x(k)$$

La Réponse Impulsionnelle de ce système et la consigne sont données par :

$k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
$h(k)$	0	2	-3/2	1/2	-3/8	1/8	0	0	0	0
$x(k)$	0.1	1	2	3	3	3	2	1	0	0

- Déterminer  $y(k)$  pour les premiers pas d'échantillonnage.

$K := 9$        $k := 0..K$        $h := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \frac{-3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 2 \\ \frac{-3}{8} \\ \frac{1}{8} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$x := \begin{pmatrix} 0.1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

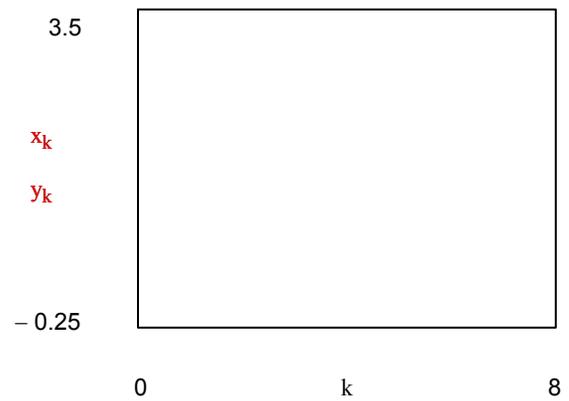
$h = \begin{array}{c|c} & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & -1.5 \\ 3 & 0.5 \\ 4 & -0.375 \\ 5 & 0.125 \\ 6 & 0 \\ 7 & 0 \\ 8 & 0 \\ 9 & 0 \end{array}$

$x = \begin{array}{c|c} & 0 \\ \hline 0 & 0.1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ 4 & 3 \\ 5 & 3 \\ 6 & 2 \\ 7 & 1 \\ 8 & 0 \\ 9 & 0 \end{array}$

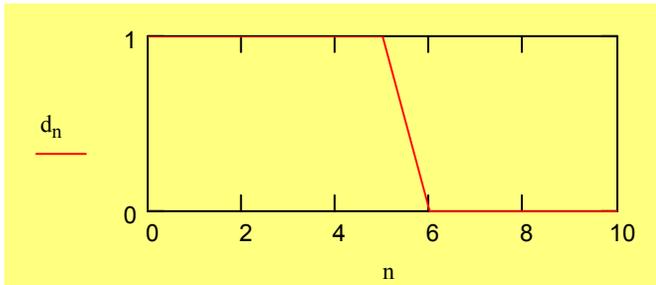
```

y := for n ∈ 0..K
    yn ← ■
y
    
```

$y = \blacksquare$







- Exprimer aussi la puissance  $P$  (en dB) du signal  $d$  sur toute sa durée

$P :=$  ■

$P =$  ■ dB

**4. Renversement d'image**      *Renversement (miroir) horizontal d'une image*

$I := \text{READ\_IMAGE}(\text{"bato2.bmp"})$        $N_x := \text{cols}(I)$        $N_y := \text{rows}(I)$        $N_x = 128$        $N_y = 128$

$\text{MiroirH}(U) :=$  ■       $J := \text{MiroirH}(I)$



I

J

### 5. Fonctions de corrélation de signaux physiques sur l'intervalle $0 \leq n \leq N-1$

On considère 2 signaux de parole enregistrés dans les fichiers a1 et a2 issus de 2 enregistrements différents de la même voyelle "a", échantillonnés à 8 kHz mono 8 bits et de durée 0.1s -> leur taille est de 800 échantillons. Il en est de même pour 2 autres enregistrements de la même voyelle "o", soit o1 et o2.

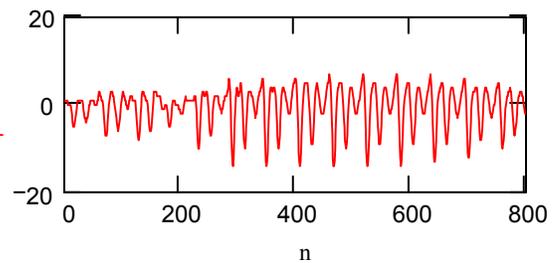
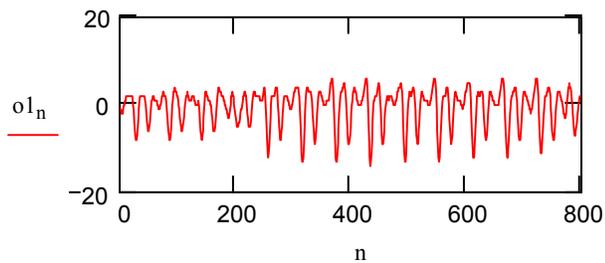
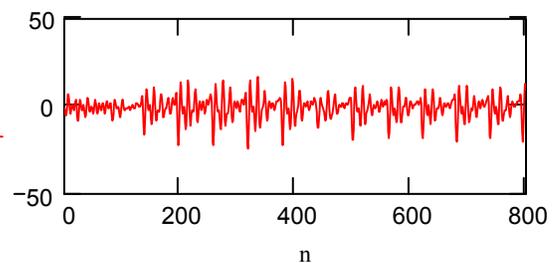
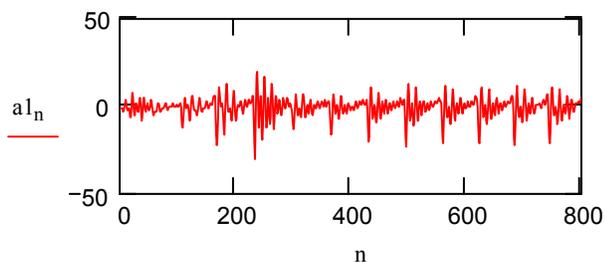
Lecture des fichiers de données

```
a1 := READWAV("a1.wav") a2 := READWAV("a2.wav") o1 := READWAV("o1.wav") o2 := READWAV("o2.wav")
```

```
a1 := a1 - 128 a2 := a2 - 128 o1 := o1 - 128 o2 := o2 - 128
```

```
N := length(a1) n := 0..N - 1 N = 800
```

Bien qu'ils soient à TD, les signaux du sont tracés en continu pour une meilleure lisibilité.

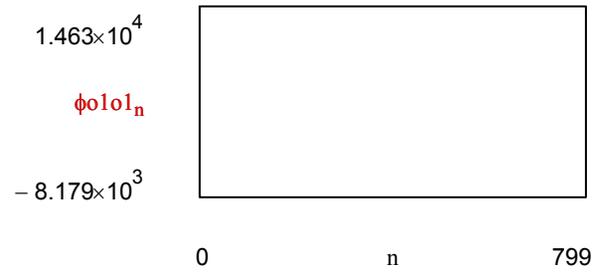
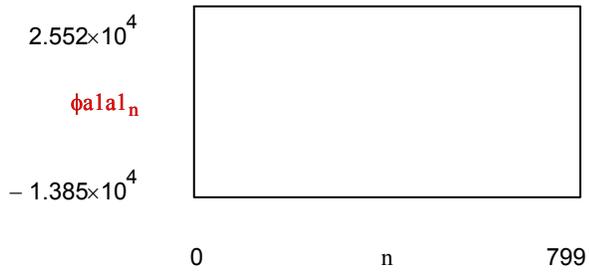
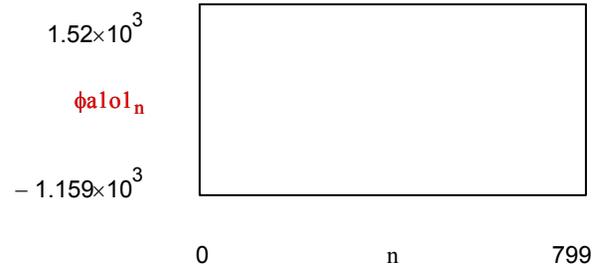
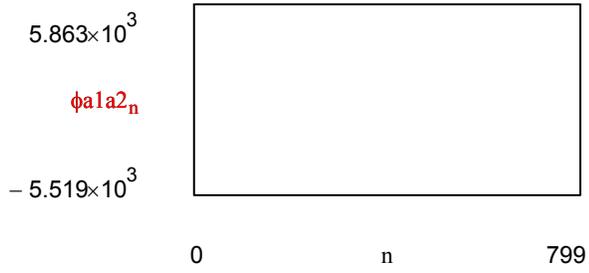


Intercorrélations  $\phi_{a1a2_n} :=$  ■

$\phi_{a1o1_n} :=$  ■

Autocorrélations  $\phi_{a1a1_n} :=$  ■

$\phi_{o1o1_n} :=$  ■



Conclusion : ???

**TP 2 ANNEXE. Tutorial Mathcad**

1. Convolution discrète  $c_n$  des signaux  $x_n$  et  $d_n$  sur l'intervalle  $-C \leq n \leq C$

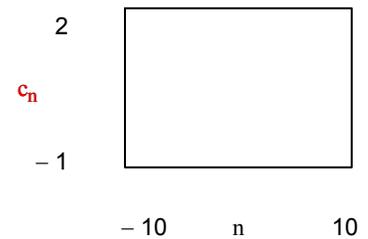
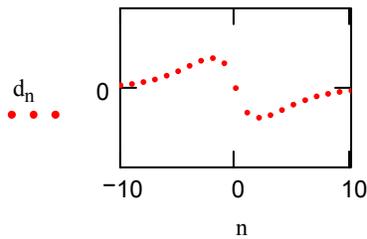
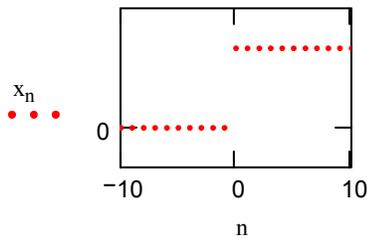
ORIGIN := -C

Détection d'une transition  $\Gamma_n$  par un filtre dérivateur  $d_n$

$$C := 10 \quad n := -C, -C + 1 .. C \quad \Gamma_n := \Phi(n) \quad \alpha := 0.5 \quad S := \frac{-(1 - e^{-\alpha})^2}{e^{-\alpha}}$$

$$x_n := \Gamma_n \quad d_n := S \cdot n \cdot e^{-\alpha \cdot |n|}$$

$c_n :=$  ■



Conclusion : ???

**2. Puissance d'un signal**

ORIGIN := 0

1. Calculer la puissance  $P$  (en dB) du signal "o1.wav" sur toute sa durée

2. Exprimer ensuite  $P$  (en dB) "par rapport" à la puissance maximale possible

- c'est-à-dire qu'il faut calculer la différence  $P - M$ , où  $M$  désigne la puissance maximale (en dB)

- le signal "o1.wav" a une résolution de 8 bits

(un octet en code complément à 2 (codage du fichier) a une valeur  $v$  telle que :  $-128 \leq v \leq 127$ )

**3. Convolution continue  $c(t)$  des signaux  $x(t)$  et  $d(t)$  sur l'intervalle  $-C \leq t \leq C$**

$C := 5$

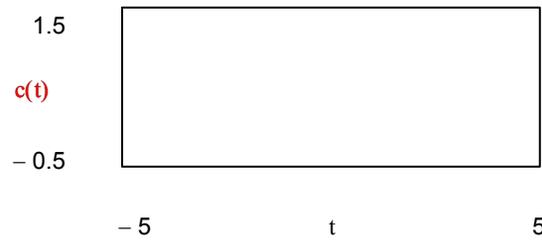
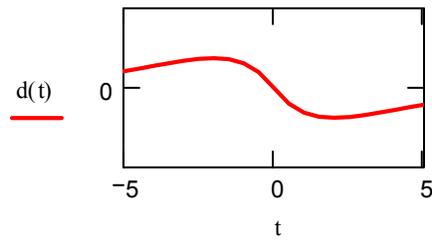
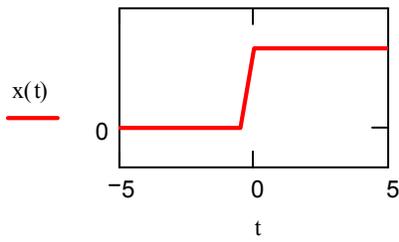
ORIGIN := -C

Détection d'une transition  $\Gamma(t)$  par un filtre dérivateur  $d(t)$

$t := -C, -C + 0.5..C$        $\Gamma(t) := \Phi(t)$        $\alpha := 0.5$

$$S := \frac{-(1 - e^{-\alpha})^2}{e^{-\alpha}}$$

$x(t) := \Gamma(t)$        $d(t) := S \cdot t \cdot e^{-\alpha \cdot |t|}$        $c(t) := \int$



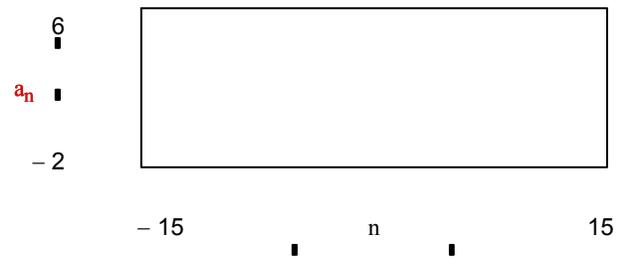
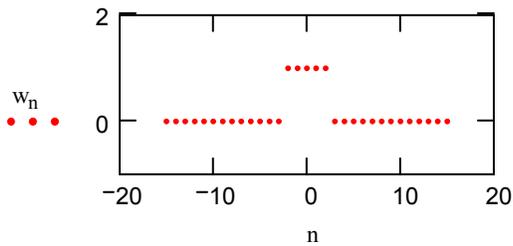
**4. AutoConvolution discrète  $a_n$  d'une fenêtre  $w_n$  sur l'intervalle  $-C \leq n \leq C$**

$C := 15$

ORIGIN := -C

$$n := -C, -C + 1..C \quad w_n := \begin{cases} 0 & \text{if } n < -2 \\ 1 & \text{if } -2 \leq n \leq 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$a_n := \text{[empty box]}$$



Conclusion : ???

**5. Fonction d'intercorrrelation  $\phi_{xy_n}$  de  $x_n$  et  $y_n$  sur l'intervalle  $A \leq n \leq B$**

$A := -10$

ORIGIN := A

$B := 20$      $n := A, A + 1..B$

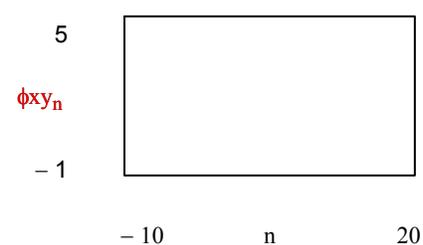
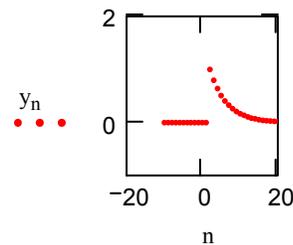
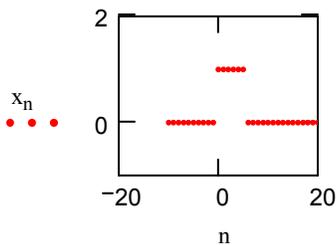
$a := 0.8$

$$\text{rect}(n) := \begin{cases} 0 & \text{if } n < 0 \\ & \text{if } n \geq 0 \\ & \quad 1 & \text{if } n \leq 5 \\ & \quad 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$x_n := \text{rect}(n)$

$y_n := a^{n-2} \cdot \Phi(n-2)$

$\phi_{xy_n} :=$



Conclusion : ???

**6. Fonctions d'autocorrrelation  $\phi_{xx_n}$  de  $x_n$  et  $\phi_{yy_n}$  de  $y_n$  sur l'intervalle  $A \leq n \leq B$**

$A := -10$

ORIGIN := A

$B := 20$      $n := A, A + 1..B$

$a := 0.8$

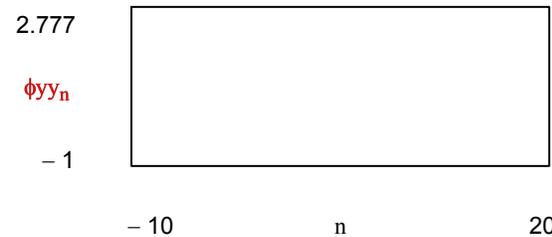
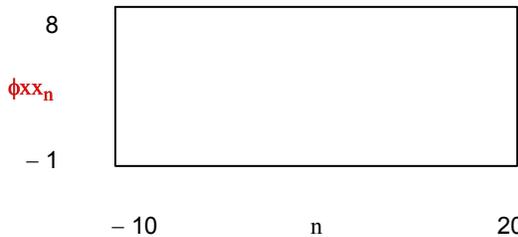
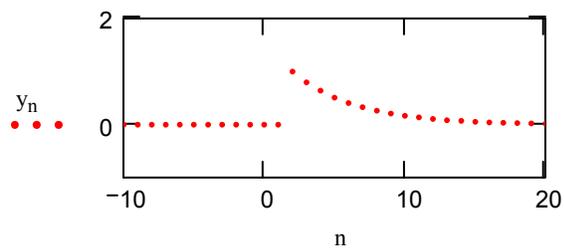
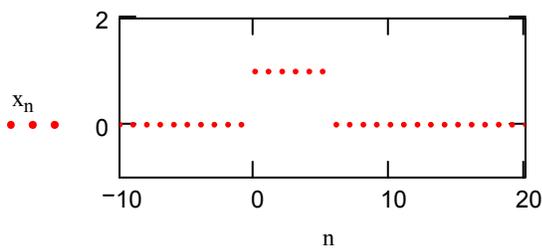
$$\text{rect}(n) := \begin{cases} 0 & \text{if } n < 0 \\ & \text{if } n \geq 0 \\ & \quad 1 & \text{if } n \leq 5 \\ & \quad 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$x_n := \text{rect}(n)$

$y_n := a^{n-2} \cdot \Phi(n-2)$

$\phi_{xx_n} :=$

$\phi_{yy_n} :=$



Conclusion : ???

## 7. Corrélation d'images

Lecture des fichiers

ORIGIN := 0

$U := \text{READ\_IMAGE}(\text{"Aquitain4.bmp"})$      $V := \text{READ\_IMAGE}(\text{"Grenoble4.bmp"})$      $N_x := \text{cols}(U)$      $N_y := \text{rows}(U)$



U



V

Calculer l'autocorrélation de l'image Aquitain4, ainsi que l'intercorrrelation entre Aquitain4 et Grenoble4 (la dynamique de ces images est de 256 niveaux de gris : la luminance  $I$  d'un pixel vérifie :  $0 \leq I \leq 255$ )

1. Sur la colonne centrale (1D) des images (voir **note**)
2. Après transformation des images 2D en vecteurs 1D (voir **note**)

**Note :** Ne pas oublier le centrage des signaux % à 0, pour que la corrélation soit significative, comme pour les signaux audio (pour qu'il y ait des retranchements lorsque les signaux sont différents, et non pas que des additions)

---

### 3. Représentations Fréquentielles des Signaux & des Systèmes à TC

#### I. REPRESENTATIONS FREQUENTIELLES DES SIGNAUX A TC

##### 1. Représentations Fréquentielles

###### 1.1. Représentation Fréquentielle d'un Signal Périodique à TC : Décomposition en série de Fourier

Un signal  $x(t)$  périodique de période  $T$  (encore appelé  $T$ -périodique), décomposé en série de Fourier s'écrit :

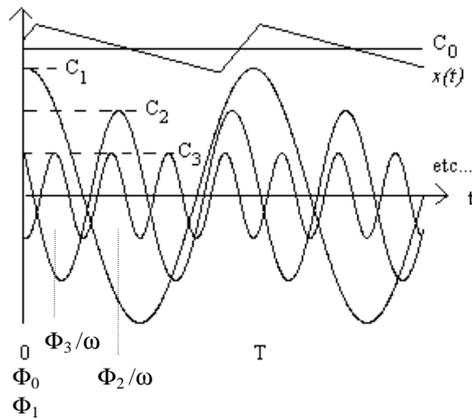
$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \cos(k\omega t + \Phi_k) \quad (0) \quad \text{avec : } \omega = \frac{2\pi}{T} T : \text{période de } x(t)$$

$T$  : plus petit réel  $>0$  tel que :  $x(t+T) = x(t) \quad \forall t \in \mathbf{R}$

$$\text{avec : } C_k = \sqrt{\left(\frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot \cos(k\omega t) dt\right)^2 + \left(\frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot \sin(k\omega t) dt\right)^2} \quad \Phi_k = \arctan\left(\frac{\int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot \sin(k\omega t) dt}{\int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot \cos(k\omega t) dt}\right)$$

Cette relation traduit le fait qu'un signal périodique  $x(t)$  à TC peut être décomposé en une somme (discrète) infinie de composantes sinusoïdales ( $\equiv$  harmoniques,  $\equiv$  ondes) de fréquence multiple entière de la fréquence de  $x(t)$ .

Exemple : Décomposition en série de Fourier d'un signal périodique « triangulaire »



ou encore, avec les relations trigonométriques :

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos k\omega t + B_k \sin k\omega t) \quad (1) \quad \text{avec : } \omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{et :}$$

$\begin{cases} A_k \\ B_k \end{cases}$  ou  $C_k$  : Coefficients de la décomposition en série de Fourier de  $x(t)$  sous forme trigonométrique.

$$\text{avec : } A_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot \cos(k\omega t) dt \quad B_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot \sin(k\omega t) dt$$

(Si  $x(t)$  est réel, les coefficients  $A_k$ ,  $B_k$ ,  $C_k$  et  $\Phi_k$  sont réels).

A l'aide des relations d'Euler, on peut également écrire cette décomposition sous forme exponentielle, en faisant ainsi apparaître des fréquences négatives, sans réalité physique :  
(les coefficients  $X_k$  sont complexes même si  $x(t)$  est réel)

- Formule d'inversion : 
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \cdot e^{ik\omega t} \quad (2) \quad \text{avec } \begin{cases} A_k = X_k + X_{-k} \\ B_k = i(X_k - X_{-k}) \end{cases} \text{ et } \begin{cases} C_k = 2|X_k| \\ \Phi_k = \text{Arg } X_k \end{cases}$$

$X_k \equiv X(k\nu)$ , où  $\nu = \frac{1}{T}$  est la fréquence, est la Représentation Fréquentielle de  $x(t)$  ( $k$  entier,  $\nu$  réel).

- Passage direct : de la Représentation Temporelle à la Représentation Fréquentielle

On utilise la relation d'orthonormalité des exponentielles imaginaires :

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} e^{i(n-k)\alpha t} dt = \delta_{n,k} \quad (3) \quad (\delta_{n,k} = 1 \text{ si } n = k, = 0 \text{ sinon})$$

Si on multiplie les 2 membres de (2) par  $e^{-ik_0\alpha t}$ , que l'on intègre de  $t_0$  à  $t_0+T$  et que l'on divise par  $T$ , on a :

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-ik_0\alpha t} dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \cdot e^{i(k-k_0)\alpha t} dt = X_{k_0} \quad \text{d'après (3)}$$

d'où : 
$$X_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-ik\alpha t} dt \quad (4)$$

- Propriétés :

(1) **Symétrie Hermitique** : si  $x(t)$  réel, on a  $\forall k : X_{-k} = \overline{X_k}$  ( $\overline{X_k} \equiv$  conjugué de  $X_k$ )

→ Pour un signal réel,  $|X_k|$  est pair et  $\text{Arg } X_k$  est impair.

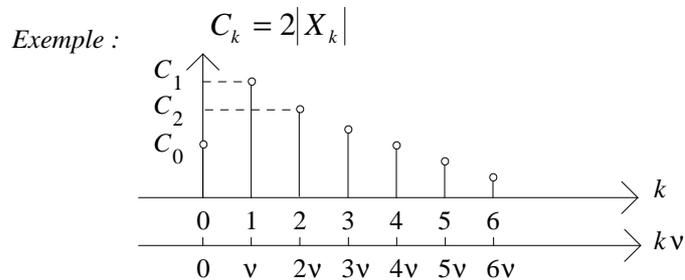
(2)  $X_k$  représente le spectre de  $x(t)$

Spectre  $\equiv$  occupation en fréquence de  $x(t) \equiv$  Densité Spectrale de Puissance (DSP)

- Spectre d'amplitude : il indique l'amplitude de chacune des composantes harmoniques de  $x(t)$

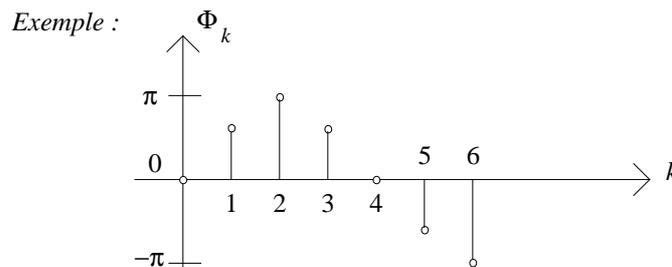
$$C_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2} = 2|X_k|$$

( $C_k$  n'existe (et n'est représenté) que pour  $k \geq 0$  bien que  $X_k$  existe pour  $k \geq 0$  et  $k < 0$ ).



- Spectre de phase : il indique la phase ( $\equiv$  le déphasage ou décalage temporel à l'origine) de chacune des composantes harmoniques de  $x(t)$

$$\Phi_k = \text{Arg}(X_k) \quad \cos \Phi_k = \frac{A_k}{\sqrt{A_k^2 + B_k^2}} \quad \sin \Phi_k = \frac{-B_k}{\sqrt{A_k^2 + B_k^2}}$$



(3) Le spectre d'un signal  $x(t)$  à TC, périodique de période  $T$ , est discret ( $\equiv$  à fréquences discrètes) :

$$X_k \equiv X_k(k\nu) \equiv X\left(\frac{k}{T}\right)$$

(4) Identité de Parseval :

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x^2(t) dt = \frac{A_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^2 + B_k^2)$$

(5) Puissance d'un signal périodique - Théorème de Parseval :

$$P \stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot \bar{x}(t) \cdot dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)|^2 \cdot dt \quad (5) \quad \text{(Puissance moyenne)}$$

Dans (5) on utilise (2) et à cause de (3), on obtient :  $P = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k|^2$ . C'est le théorème de Parseval:

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)|^2 \cdot dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k|^2 \quad \text{La puissance temporelle est égale à la puissance spectrale.}$$

$$\text{Plus généralement : } \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot \bar{y}(t) \cdot dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \cdot \bar{Y}_{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \cdot Y_k$$

(6) Parité :

	PAIR		IMPAIR	
	Réel	Imaginaire pur	Réel	Imaginaire pur
$x(t)$				
$X_k$	↓	↓	↙ ↘	↙ ↘

(7) Linéarité.

(8)  $X_k$  est généralement complexe même si  $x(t)$  est réel.

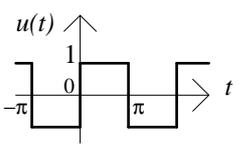
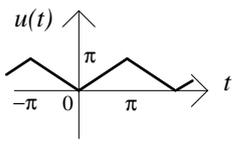
(9) Correspondance bi-univoque entre  $x(t)$  et  $X_k$ .

- Dictionnaire : les signaux temporels considérés ont une période  $T$  (une pulsation  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , une fréquence  $\nu = \frac{1}{T}$ )

Opération	Représentation Temporelle	Représentation Fréquentielle
1. Combinaison linéaire ( $a, b$ C <sup>tes</sup> complexes)	$u(t) = ax(t) + by(t)$	$U_k = a X_k + b Y_k$
2. Renversement du temps	$y(t) = x(-t)$	$Y_k = X_{-k}$
3. Retard ( $\tau$ réel $\geq 0$ ou $< 0$ )	$y(t) = x(t - \tau)$	$Y_k = X_k \cdot e^{-ik\omega\tau}$
4. Offset ( $c$ C <sup>te</sup> complexe)	$y(t) = x(t) + c$	$Y_k = X_k + c\delta_k \quad (\delta_k \equiv \delta(k\nu))$
5. Dérivation	$y(t) = \dot{x}(t)$	$Y_k = ik\omega \cdot X_k$
6. Dérivation d'ordre $p$ ( $p$ entier $> 0$ )	$y(t) = x^{(p)}(t)$	$Y_k = (ik\omega)^p \cdot X_k$
7. Intégration	$y(t) = \int_{t_0}^{t_0+t} x(u) du$	$Y_k = \frac{X_k}{ik\omega} \quad (k \neq 0)$
8. Conjugaison complexe	$y(t) = \bar{x}(t)$	$Y_k = \bar{X}_{-k}$
9. Convolution	$u(t) = x(t) * y(t)$	$U_k = X_k \cdot Y_k$
10. Produit	$u(t) = x(t) \cdot y(t)$	$U_k = X_k * Y_k$

Dans le domaine fréquentiel, les opérateurs différentiels ( $\int, \frac{d}{dt}$ ) et convolution deviennent algébriques et plus simples:  $\times ik\omega, \times ik\omega, \times$

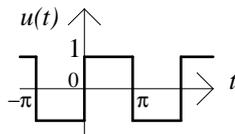
- Table de Transformées des signaux usuels :

Signal	Représentation Temporelle	Représentation Fréquentielle
1. Carré périodique ( $2\pi$ ) 	$u(t) = 1$ pour $0 < t < \pi$ $u(t) = -1$ pour $-\pi < t < 0$ $u(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)t}{2k+1}$	$A_k = 0 \quad \forall k \in \mathbf{N}$ $B_k = \frac{4}{\pi k} \quad k = 1, 3, 5 \dots$ $B_k = 0 \quad k = 2, 4, 6 \dots$
2. Triangle périodique ( $2\pi$ ) 	$u(t) = t$ pour $0 < t < \pi$ $u(t) = -t$ pour $-\pi < t < 0$ $u(t) =  t $ $u(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)t}{(2k+1)^2}$	$A_0 = \pi$ $A_k = -\frac{4}{\pi k^2} \quad k = 1, 3, 5 \dots$ $A_k = 0 \quad k = 2, 4, 6 \dots$ $B_k = 0 \quad \forall k \in \mathbf{N}^*$

- Phénomène de Gibbs :

Contrairement aux fonctions périodiques continues que l'on peut approcher par un petit nombre de termes de leur décomposition en série de Fourier, pour des fonctions périodiques discontinues, il est nécessaire de prendre en compte un grand nombre de termes si l'on veut réduire le phénomène de Gibbs, qui consiste en l'apparition d'oscillations autour des points de discontinuités (la suppression totale du phénomène de Gibbs implique la prise en compte d'une infinité de termes dans la décomposition en série de Fourier !)

Exemple : Signal Carré périodique ( $2\pi$ )

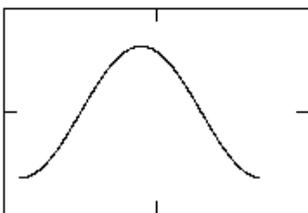


$$u(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)t}{2k+1}$$

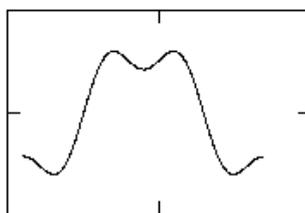
$K$  : Nombre (en fait nombre - 1) de composantes de la décomposition en série de Fourier :

$$u(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^K \frac{\sin(2k+1)t}{2k+1}$$

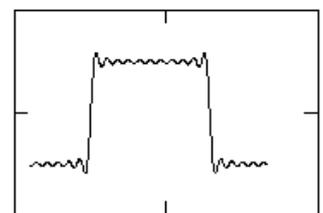
$K = 0$



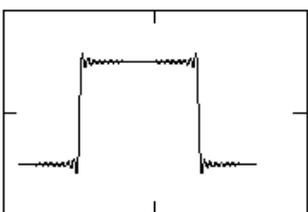
$K = 1$



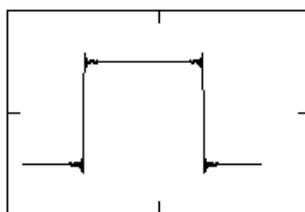
$K = 10$



$K = 20$



$K = 50$



1.2. Représentation Fréquentielle d'un signal non périodique à TC : Transformation de Fourier

En considérant qu'un signal non périodique est périodique de période infinie, on peut prolonger la relation de décomposition en série de Fourier d'une fonction périodique pour donner la transformation de Fourier.

Un signal non périodique  $x(t)$  à TC est donc décomposé en une somme infinie (continue et non pas discrète comme pour les signaux périodiques) de composantes sinusoïdales ( $\equiv$  harmoniques).

Le spectre d'amplitude de  $x(t)$  indique l'amplitude de chacune de ces harmoniques, le spectre de phase, leur décalage par rapport à l'origine.

La transformée de Fourier (TF) d'un signal  $x(t)$  s'écrit :

$$X(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-i2\pi\nu t} dt$$

$\nu$  est la fréquence ( $\nu$  : réel)

( $X(\nu)$  est généralement complexe même si  $x(t)$  est réel).

$X(\nu)$  est la Représentation Fréquentielle de  $x(t)$ , notée :  $X(\nu) = TF(x(t))$

- Formule d'inversion : on a par Transformée de Fourier Inverse :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu) \cdot e^{+i2\pi\nu t} d\nu$$

noté :  $x(t) = TF^{-1}(X(\nu))$

- Propriétés :

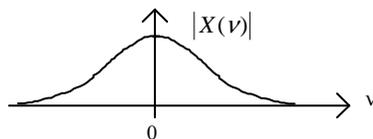
(1) **Symétrie Hermitique** : si  $x(t)$  est réel, on a :  $X(-\nu) = \overline{X(\nu)}$

→ Pour un signal réel, on a :  $|X(\nu)|$  est pair et  $\text{Arg } X(\nu)$  est impair.

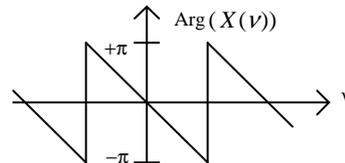
(2)  $X(\nu)$  représente le spectre de  $x(t)$  :

Spectre  $\equiv$  occupation en fréquence de  $x(t) \equiv$  Densité Spectrale de Puissance (DSP)  $\equiv$  TF ( $x(t)$ )

- Spectre d'amplitude :  $|X(\nu)|$



- Spectre de phase :  $\text{Arg}(X(\nu))$



(3) Le spectre d'un signal non périodique à TC est continu ( $\equiv$  à fréquences continues)  $X(\nu)$ .

(4) Théorème de Parseval :  $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\overline{y(t)}dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu)\overline{Y(\nu)}d\nu$

(5) Energie du signal :  $E \stackrel{\Delta}{=} \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(\nu)|^2 d\nu$  en utilisant le théorème de Parseval.

(6) Parité :

	PAIR		IMPAIR	
	Réel	Imaginaire pur	Réel	Imaginaire pur
$x(t)$				
$X(\nu)$	↓	↓	↙ ↘	↙ ↘

(7) Linéarité.

(8)  $X(\nu)$  est généralement complexe même si  $x(t)$  est réel.

(9) Correspondance bi-univoque entre  $x(t)$  et  $X(\nu)$ .

**(10) Dualité (≡ Interchangeabilité des variables temporelle et fréquentielle) :**

Si  $TF[f(t)] = F(\nu)$  alors  $TF[F(-t)] = f(\nu)$  ou encore  $TF[F(t)] = f(-\nu)$  car :

$$\begin{cases} X(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i2\pi\nu t} dt \\ X(-\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{i2\pi\nu t} dt \end{cases} \quad \begin{matrix} \swarrow \\ \searrow \end{matrix} \quad \begin{cases} x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu) \cdot e^{i2\pi\nu t} d\nu \\ x(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu) \cdot e^{-i2\pi\nu t} d\nu \end{cases}$$

Application : Le calcul de la TF d'une fonction peut être récupéré.

Exemple :

Le calcul de la TF d'une fenêtre donne :

$$\Pi_T(t) \xrightarrow{TF} T \cdot \frac{\sin(\pi\nu T)}{\pi\nu T} = T \cdot \text{sinc}(\pi\nu T)$$

$$\text{d'où : } \text{sinc}(-\pi t T) = \text{sinc}(\pi t T) \xrightarrow{TF} \frac{1}{T} \Pi_T(\nu)$$

**(11) Transformée de Fourier de la fonction de corrélation :  $TF[\phi_{xy}(t)] = X(-\nu)Y(\nu)$**

$$\begin{aligned} TF[\phi_{xy}(t)] &= TF\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t+\tau)d\tau\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t+\tau)d\tau\right]e^{-i2\pi\nu t} dt = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t+\tau)d\tau\right]e^{-i2\pi\nu(t+\tau)}e^{i2\pi\nu\tau} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{i2\pi\nu\tau}y(t+\tau)d\tau\right]e^{-i2\pi\nu(t+\tau)} dt = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{i2\pi\nu\tau}y(u)e^{-i2\pi\nu u}d\tau du = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{i2\pi\nu\tau}d\tau \int_{-\infty}^{\infty} y(u)e^{-i2\pi\nu u} du = X(-\nu)Y(\nu) \end{aligned}$$

Plus généralement :  $TF[\phi_{xy}(t)] = X^*(\nu)Y(\nu)$  où  $X^*(\nu)$  est le complexe conjugué de  $X(\nu)$ .

- Dictionnaire :

Opération	Représentation Temporelle	Représentation Fréquentielle
1. Combinaison linéaire (a, b, C <sup>tes</sup> complexes)	$u(t) = a x(t) + b y(t)$	$U(\nu) = a X(\nu) + b Y(\nu)$
2. Renversement du temps	$y(t) = x(-t)$	$Y(\nu) = X(-\nu)$
3. Retard ( $\tau$ réel $\geq 0$ ou $< 0$ )	$y(t) = x(t - \tau)$	$Y(\nu) = X(\nu) \cdot e^{-i2\pi\nu\tau}$
4. Offset (c complexe)	$y(t) = x(t) + c$	$Y(\nu) = X(\nu) + c\delta(\nu)$
5. Dérivation dériver $\equiv$ multiplier par $i2\pi\nu$ $\rightarrow$ passe-haut en fréquence	$y(t) = \dot{x}(t)$	$Y(\nu) = i2\pi\nu \cdot X(\nu)$
6. Dérivation d'ordre p	$y(t) = x^{(p)}(t)$	$Y(\nu) = (i2\pi\nu)^p \cdot X(\nu)$
7. Intégration intégrer $\equiv$ diviser par $i2\pi\nu$ $\rightarrow$ passe-bas en fréquence	$y(t) = \int_{t_0}^{t_0+t} x(u)du$	$Y(\nu) = \frac{X(\nu)}{i2\pi\nu} + k\delta(\nu)$ k : C <sup>te</sup> d'intégration à déterminer
8. Conjugaison complexe	$y(t) = \overline{x(t)}$	$Y(\nu) = \overline{X(\nu)}$
9. Changement d'échelle de temps ( $\lambda \neq 0$ )	$y(t) = x(t / \lambda)$	$Y(\nu) =  \lambda  X(\lambda\nu)$
10. Multiplication par t	$y(t) = t \cdot x(t)$	$Y(\nu) = -\frac{1}{i2\pi\nu} \frac{dX(\nu)}{d\nu}$
11. Multiplication par $t^p$	$y(t) = t^p x(t)$	$Y(\nu) = -\left(\frac{1}{i2\pi\nu}\right)^p \frac{d^p X(\nu)}{d\nu^p}$
12. Convolution	$u(t) = x(t) * y(t)$	$U(\nu) = X(\nu) \cdot Y(\nu)$
13. Corrélation	$u(t) = x(-t) * y(t)$	$U(\nu) = X(-\nu) \cdot Y(\nu)$
14. Produit	$u(t) = x(t) \cdot y(t)$	$U(\nu) = X(\nu) * Y(\nu)$
15. Décalage, translation en fréquence (modulation exponentielle)	$y(t) = e^{i2\pi\nu_0 t} \cdot x(t)$	$Y(\nu) = X(\nu - \nu_0)$

- Table de Transformées des signaux usuels :

Signal	Représentation Temporelle	Représentation Fréquentielle
1. Impulsion de Dirac	$x(t) = \delta(t)$	$X(\nu) = 1$
2. Constante	$x(t) = 1$	$X(\nu) = \delta(\nu)$
3. Sinus, cosinus	$x(t) = e^{i2\pi\nu_0 t}$	$X(\nu) = \delta(\nu - \nu_0)$
4. Peigne de Dirac	$x(t) = \text{III}_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$	$X(\nu) = F \text{III}_F(\nu)$ avec : $F = 1/T$
5. Sinus cardinal	$x(t) = \text{sinc}(\pi tT)$ avec : $\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$	$X(\nu) = \frac{1}{T} \Pi_T(\nu)$
6. Fenêtre	$x(t) = \Pi_T(t)$	$X(\nu) = T \cdot \text{sinc}(\pi\nu T)$
7. Echelon	$x(t) = \Gamma(t)$	$X(\nu) = \frac{1}{i2\pi\nu} + \frac{\delta(\nu)}{2}$
8. Gaussienne	$x(t) = e^{-\pi t^2}$	$X(\nu) = e^{-\pi\nu^2}$

1.3. Transformée de Fourier d'un signal périodique à TC

On a vu que la Représentation Fréquentielle d'un signal périodique à TC  $x(t)$  de période  $T = 1/\nu_0$  est :

$$X_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-ik2\pi\nu_0 t} dt \quad \text{avec :} \quad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{ik2\pi\nu_0 t}$$

Nous pouvons prendre la TF de  $x(t)$  déjà décomposé en série de Fourier. On obtient alors :

$$TF[x(t)] = X(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{ik2\pi\nu_0 t} \right) e^{-i2\pi\nu t} dt$$

Du fait que, sous réserve de convergence du fait des bornes infinies de l'intégrale, l'intégrale d'une somme est la somme des intégrales (linéarité de l'opérateur  $\int$ ), on a :

$$X(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi(\nu - k\nu_0)t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \cdot TF[1]_{\text{variable } (\nu - k\nu_0)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \delta(\nu - k\nu_0)$$

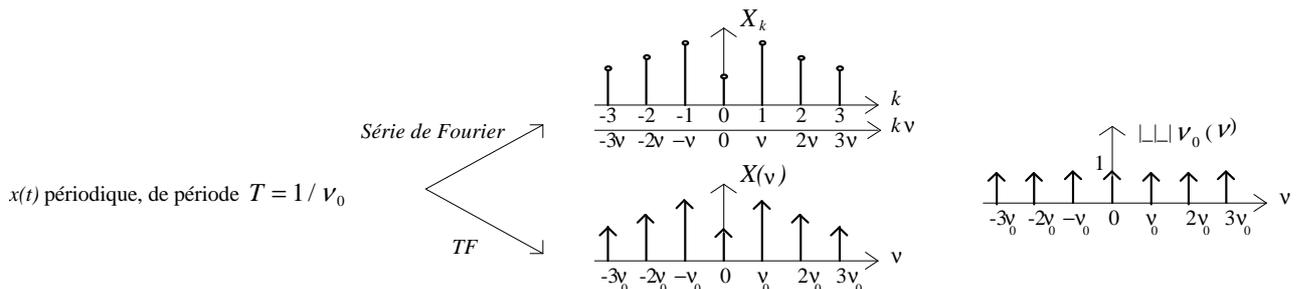
puisque :  $TF[1] = \delta(\nu)$ , et donc que :  $TF[1]_{\text{variable } (\nu - k\nu_0)} = \delta(\nu - k\nu_0)$ .

On a donc le résultat suivant :

$$X(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \delta(\nu - k\nu_0)$$

On voit que la Représentation Fréquentielle  $X(\nu)$  d'un signal périodique, obtenue par TF, n'est rien d'autre (et n'apporte rien de plus) que la Représentation Fréquentielle  $X_k$  du signal périodique : les coefficients de la Représentation Fréquentielle  $X_k$  sont multipliés par un peigne de Dirac

$\text{III}_{\nu_0}(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - k\nu_0)$ , synchrone avec les  $X_k$  :

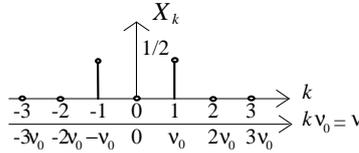


Exemple : signal  $x(t) = \cos(2\pi\nu_0 t)$

- Série de Fourier :

Le signal  $x(t)$  est déjà décomposé sur la base de fonctions sinusoïdales, on ne peut pas le décomposer

plus : 
$$x(t) = \frac{e^{i2\pi\nu_0 t} + e^{-i2\pi\nu_0 t}}{2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{ik2\pi\nu_0 t} \rightarrow X_{-1} = X_1 = \frac{1}{2} \text{ et } X_k = 0 \quad \forall k \neq -1 \text{ ou } 1.$$

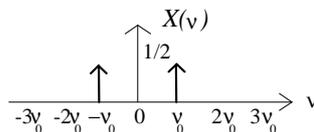


- TF :

$$X(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi\nu t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{e^{i2\pi\nu_0 t} + e^{-i2\pi\nu_0 t}}{2} \right) e^{-i2\pi\nu t} dt$$

$$X(\nu) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi(\nu-\nu_0)t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi(\nu+\nu_0)t} dt = \frac{1}{2} TF[1]_{\text{variable } (\nu-\nu_0)} + \frac{1}{2} TF[1]_{\text{variable } (\nu+\nu_0)}$$

$$X(\nu) = \frac{1}{2} \delta(\nu - \nu_0) + \frac{1}{2} \delta(\nu + \nu_0)$$



**1.4. Représentation Fréquentielle de Laplace des Signaux à TC : Transformation de Laplace**

La représentation de Laplace généralise la Représentation Fréquentielle. Elle substitue la variable de la TF, c'est-à-dire la fréquence  $\nu$  réelle, par un complexe noté  $p$  ou  $s$ , avec parties réelle et imaginaires. La variable fréquence  $\nu$  de la TF se retrouve dans la partie imaginaire de  $p$ .

La transformée de Laplace (TL) (bilatérale) d'un signal  $x(t)$  s'écrit :

$$X(p) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-pt} dt \quad p : \text{variable de Laplace (notée aussi } s)$$

$X(p)$  est complexe même si  $x(t)$  est réel;

$p$  complexe :  $p = \sigma + i2\pi\nu$  ( $\nu$  : fréquence)  $\sigma, \nu$  : réels

$X(p)$  est la Représentation Fréquentielle Généralisée de  $x(t)$ . On note :  $X(p) = TL(x(t))$ .

Si on fait  $\sigma = 0$  dans la variable de Laplace  $p$ , la TL se ramène à la TF.

La TL monolatérale, notée  $TL^+$  s'écrit :  $X^+(p) = \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-pt} dt$ . Elle s'utilise pour les signaux  $x(t)$  causaux (cas le plus fréquent : en pratique, un signal a toujours un début et une fin).

En TL monolatérale, les CI (Conditions Initiales) interviennent, alors qu'en bilatéral, elles n'ont évidemment aucune signification particulière).

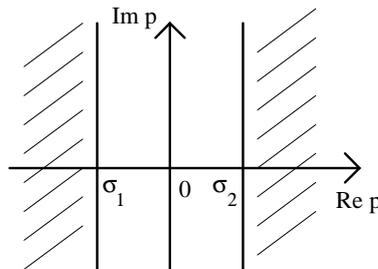
**Par simplification de la notation,  $TL^+$  est communément tout de même noté TL et  $X^+(p)$  noté  $X(p)$ .**

La TL  $X(p)$  d'un signal  $x(t)$  s'exprime généralement comme une fraction rationnelle en  $p$  (rapport de 2 polynômes en  $p$  finis).

- Remarques :

(1) Du fait que  $p$  possède une partie réelle, la convergence de la TL est facilitée par rapport à celle de la TF, la partie réelle de  $p$  n'étant pas limitée à l'axe des ordonnées mais à une bande verticale dans le plan  $p$  correspondant au domaine de définition de la TL, et propre à chaque signal  $x(t)$  à transformer. (en contre-partie, l'inversion de la TL est plus difficile que celle de la TF car elle fait intervenir l'intégration de fonctions de variable complexe.)

→  $X(p)$  n'est pas seulement définie par son expression en fonction de la variable  $p$  mais aussi par son domaine de définition (ou encore de convergence) :  $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$  :



$$\text{Ex. : TL } (\Gamma(t)) = \int_0^\infty e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} \left[ e^{-\sigma} \cdot e^{-i2\pi vt} \right]_0^\infty = \frac{1}{p} \quad \text{pour : } 0 < \sigma < +\infty$$

( $e^{-i2\pi vt}$  (fonction circulaire) est indéterminée en  $t = +\infty \rightarrow e^{-\sigma}$  annule sa contribution pour  $0 < \sigma < +\infty$ ).

$$(2) \quad x_1(t) = \Gamma(t)e^{-at} \quad (\text{causal}) \text{ a pour TL : } X_1(p) = \frac{1}{p+a} \quad \text{Domaine : } -a \leq \sigma < +\infty$$

$$\text{alors que : } x_2(t) = -\Gamma(-t)e^{-at} \quad (\text{anticausal}) \text{ a pour TL : } X_2(p) = \frac{1}{p+a} \quad \text{Domaine : } -\infty < \sigma \leq -a$$

- Formule d'inversion :

Soit un signal  $x(t)$  de TL  $X(p)$  avec Domaine de Définition :  $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$ . On a :

$$x(t) = \frac{1}{i2\pi} \int_C X(p) \cdot e^{pt} dp$$

avec  $C$  : Contour d'intégration dans la Bande  $[\sigma_1, \sigma_2]$ .

( $C$  : inclus dans Bande de Convergence de la TL)

L'intégration des fonctions de variable complexe est rarement utilisée en pratique. On utilisera plutôt un dictionnaire et les tables des principales transformées après avoir éventuellement effectué une décomposition en éléments simples de la fonction  $F(p)$  dont on veut trouver l'original  $f(t)$ .

- Propriétés :

(1) **TF et TL** : Si l'axe imaginaire (axe  $\text{Re}(p) = 0$ ) est inclus dans la Bande de Convergence de Laplace, on a la relation de passage entre TF et TL :

$$X(\nu) = X(p = i2\pi\nu) \quad \leftrightarrow \quad p = i2\pi\nu$$

(2) **Linéarité.**

(3)  $X(p)$  est généralement complexe même si  $x(t)$  est réel.

(4) **Correspondance bi-univoque** entre  $x(t)$  et  $X(p)$  (domaine de convergence précisé).

(5) **Théorème de la valeur initiale (TL monolatérale)** :  $x(t = 0^+) = \lim_{p \rightarrow +\infty} pX(p)$

(6) **Théorème de la valeur finale** :

$$x(t = +\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} pX(p) \quad \text{à condition que } X(p) \text{ n'ait aucun pôle à partie réelle } > 0.$$

(7) **Transformée de Laplace de la fonction de corrélation** :  $TL[\varphi_{xy}(t)] = X(-p)Y(p)$

$$\begin{aligned} TL[\varphi_{xy}(t)] &= TL\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t+\tau)d\tau\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t+\tau)d\tau\right]e^{-pt}dt = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t+\tau)d\tau\right]e^{-p(t+\tau)}e^{p\tau}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{p\tau}y(t+\tau)d\tau e^{-p(t+\tau)}dt = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{p\tau}y(u)e^{-pu}d\tau du = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{p\tau}d\tau \int_{-\infty}^{\infty} y(u)e^{-pu}du = X(-p)Y(p) \end{aligned}$$

- Dictionnaire :

Opération	Représentation Temporelle	Représentation Fréquentielle
1. Combinaison linéaire ( $a, b, C^{\text{tes}}$ complexes)	$u(t) = a x(t) + b y(t)$	$U(p) = a X(p) + b Y(p)$
2. Retard ( $\tau$ réel $\geq 0$ ou $< 0$ )	$y(t) = x(t - \tau)$	$Y(p) = e^{-p\tau} \cdot X(p)$
3. Dérivation dériver $\equiv$ multiplier par $p$	$y(t) = \dot{x}(t)$	$TL^+[y(t)] = Y^+(p) = pX(p) - x(0^+)$ <b>dérivation au sens des fonctions</b> $TL^+[y(t)] = Y^+(p) = pX(p) - x(0^-)$ <i>dérivation au sens des distributions</i> $TL[y(t)] = Y(p) = pX(p)$
4. Dérivation d'ordre $n$	$y(t) = x^{(n)}(t)$	$TL^+[y(t)] = p^n X(p) - p^{n-1} x(0^+) - p^{n-2} \dot{x}(0^+) - \dots - x^{(n-1)}(0^+)$ <i>deriv. fonctions</i> $TL[y(t)] = Y(p) = p^n \cdot X(p)$
5. Intégration intégrer $\equiv$ diviser par $p$	$y(t) = \int_{t_0}^{t_0+t} x(u)du$	$Y(p) = \frac{X(p)}{p}$
6. Intégration d'ordre $n$	$y^{(n)}(t) = x(t)$	$Y(p) = \frac{X(p)}{p^n}$
7. Convolution	$u(t) = x(t) * y(t)$	$U(p) = X(p) \cdot Y(p)$
8. Corrélation	$u(t) = x(-t) * y(t)$	$U(p) = X(-p) \cdot Y(p)$
9. Produit	$u(t) = x(t) \cdot y(t)$	$U(p) = X(p) * Y(p)$
10. Multiplication par $t$	$y(t) = t \cdot x(t)$	$Y(p) = -\frac{dX(p)}{dp}$
11. Multiplication par $t^n$ ( $n$ entier positif)	$y(t) = t^n \cdot x(t)$	$Y(p) = (-1)^n \frac{d^n X(p)}{dp^n}$
12. Décalage, translation en fréquence (modulation exponentielle)	$y(t) = e^{-at} \cdot x(t)$	$Y(p) = X(p + a)$
13. Renversement du temps	$y(t) = x(-t)$	$Y(p) = X(-p)$

- Table de Transformées des signaux usuels :

Signal	Représentation Temporelle	Représentation Fréquentielle
1. Echelon unité	$x(t) = \Gamma(t)$	$X(p) = \frac{1}{p}$
2. Impulsion de Dirac	$x(t) = \delta(t)$	$X(p) = 1$
3. Constante (non causale)	$x(t) = 1$	$X(p) = \delta(p)$
4. Exponentielle causale	$x(t) = e^{-at} \cdot \Gamma(t)$	$X(p) = \frac{1}{p+a}$
5. Puissance de $t$ causale	$x(t) = t^n \cdot \Gamma(t)$	$X(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$
6. Sinus causal	$x(t) = \sin \omega_0 t \cdot \Gamma(t)$	$X(p) = \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$
7. Cosinus causal	$x(t) = \cos \omega_0 t \cdot \Gamma(t)$	$X(p) = \frac{p}{p^2 + \omega_0^2}$

- Note :

La TL bilatérale est peu utilisée comme Représentation Fréquentielle des signaux ou des systèmes à TC non causaux (on lui préfère la TF moins abstraite). Par contre la TL est essentielle pour la Représentation Fréquentielle des systèmes causaux. En Automatique, notamment, où les systèmes sont généralement causaux, la TL monolatérale est exclusivement utilisée. Le produit de convolution ayant pour transformée un produit simple :

$$f(t) = x(t) * y(t) \xrightarrow{TL} F(p) = X(p)Y(p)$$

la convolution se traduit en  $p$  comme un produit de polynômes, et la déconvolution comme une division de polynômes.

**1.5. Représentations Fréquentielles des Signaux non stationnaires à TC : Ondelettes - TWV**

Les signaux tels que les signaux modulés en fréquence ou encore le signal parole constituent des exemples de signaux non stationnaires. Dans ce cas, la décomposition spectrale ne peut être que difficilement obtenue par TF (la TFCT, TF à Court Terme, est une alternative).

La TF ne prend pas en compte l'origine des temps : elle ne s'exprime qu'en fonction de la fréquence  $\nu$  et ne fait pas intervenir de variable temporelle représentant l'origine des temps ( $\tau$ ); la TF se prête donc mal à la Représentation Fréquentielle des signaux non stationnaires.

Pour caractériser un signal non stationnaire, on peut utiliser les transformées en ondelettes (qui sont des ondes localisées évanescentes) ou encore la Transformation de Wigner-Ville (TWV), qui décomposent un signal en une somme d'ondelettes plutôt qu'une décomposition en une somme d'ondes comme le fait la TF.

En faisant une comparaison musicale, une onde correspond à une note (un ré mineur par exemple) qui aurait été émise depuis l'origine des temps et tiendrait, indéfiniment, sans atténuation, jusqu'à la fin des temps. Une ondelette correspondrait alors à ce même ré mineur que l'on attaquerait à un certain moment et qui, dans le cas du piano, serait ensuite étouffé par la pédale. Une ondelette contient donc (au moins) 3 informations : un commencement, une fin et entre les 2, une fréquence précise.

La TWV d'un signal  $x(t)$  s'écrit :

$$TWV[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \cdot x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \cdot e^{-i2\pi\nu\tau} d\tau = X(\nu, t) \quad (x^* = \text{conjugué de } x)$$

Le résultat, fonction de  $\nu$  et  $t$ , autorise une analyse dans l'espace Temps-Fréquence.

Application : Analyse fréquentielle du transitoire d'un signal.

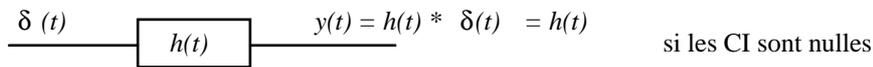
Type de signal	Outil de caractérisation
stationnaire	TF
non stationnaire	TFCT / ondelettes / TWV
périodique	TF / séries de Fourier
non périodique	TF
causal	TL <sup>+</sup>

## II. REPRESENTATIONS FREQUENTIELLES DES SYSTEMES A TC

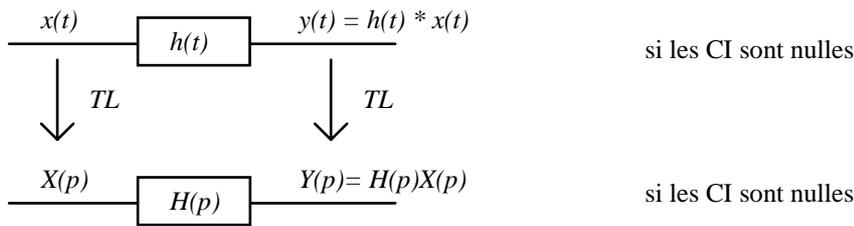
### 1. Représentations Fréquentielles

#### 1.1. Représentation de Laplace : Fonction de Transfert

On a vu qu'un SLTI est caractérisé, dans le domaine temps, par sa Réponse Impulsionnelle  $h(t)$  :



Si on prend la TL des signaux précédents on a :



avec:  $H(p) = TL[h(t)]$   $H(p)$  s'appelle la **Fonction de Transfert** (FT) du SLTI:  $H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$  (si CIs nulles)

De même que la RI  $h(t)$  (hors CI), la FT  $H(p)$  caractérise complètement (hors CI) le SLTI.

$H(p)$  est la Représentation Fréquentielle Généralisée d'un système à TC

La FT (comme la RI) n'a de sens que si le système est linéaire (la TL est linéaire).

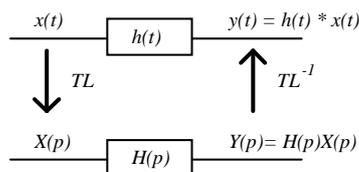
Si le système est stationnaire: la FT  $H(p)$  ne dépend pas du temps, la RI  $h(t)$  ne dépend que du temps  $t$ .

S'il n'est pas stationnaire: la FT  $H(p,t)$  dépend du temps, la RI  $h(t,\tau)$  dépend du temps  $t$  et de l'origine des temps  $\tau$ .

- Dualité Temps-Fréquence :

Temps	Fréquence
- RI : $h(t)$	$\Leftrightarrow$ - FT : $H(p)$
- SLTI	$\Leftrightarrow$ - Filtre linéaire
- STI	$\Leftrightarrow$ - Filtre
- Relation Entrée-Sortie : Convolution	$\Leftrightarrow$ - Relation Entrée-Sortie : Produit
- Relation Entrée-Sortie d'un SLTI :	$\Leftrightarrow$ - $H(p)$ : fraction rationnelle ( $\equiv$ fractionnelle) en $p$
Equation différentielle linéaire à coeff constants :	$\equiv$ Quotient de 2 polynômes en $p$ :
( avec Conditions Initiales (CI) supposées nulles )	
$\sum_{i=0}^n b_i y^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^m a_i x^{(i)}(t)$	$TL \rightarrow H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{\sum_{i=0}^m a_i p^i}{\sum_{i=0}^n b_i p^i} \quad \text{si CI nulles}$

L'équation de convolution ( $\equiv$  l'équation différentielle) de la relation d'entrée-sortie d'un SLTI est détournée pour être résolue plus simplement en fréquence, par le chemin :



- Application :

La TL monolatérale se prête très bien à la détermination de la réponse d'un système à TC à un signal à TC par utilisation de la FT du système (bonne convergence de la TL).

- Résolution de l'équation différentielle (≡ équation de convolution) par la TL :

Soit l'équation différentielle linéaire à coefficients constants régissant un SLTI à TC :

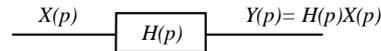
$$\sum_{i=0}^n b_i y^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^m a_i x^{(i)}(t)$$

En prenant la TL de cette équation différentielle (Conditions Initiales (CI) quelconques), on a :

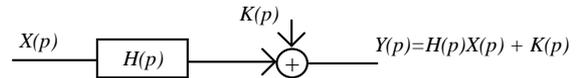
$$\sum_{i=0}^n b_i p^i Y(p) + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{i-1} b_i p^{i-1-j} y^{(j)}(0) = \sum_{i=0}^m a_i p^i X(p) + \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{i-1} a_i p^{i-1-j} x^{(j)}(0) \quad \text{d'où :}$$

$$Y(p) = \frac{\sum_{i=0}^m a_i p^i}{\sum_{i=0}^n b_i p^i} X(p) + \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{i-1} a_i p^{i-1-j} x^{(j)}(0) - \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{i-1} b_i p^{i-1-j} y^{(j)}(0)}{\sum_{i=0}^n b_i p^i} = H(p)X(p) + K(p)$$

- Si les CI sont nulles :  $K(p) = 0$  :



- Si les CI sont non nulles :  $K(p) \neq 0$  :



En temps, on a le même type de relation pour l'équation de convolution :

*(l'équation de convolution n'est rien d'autre que l'équation différentielle)*

- Si les CI sont nulles :  $K(p) = 0$  :

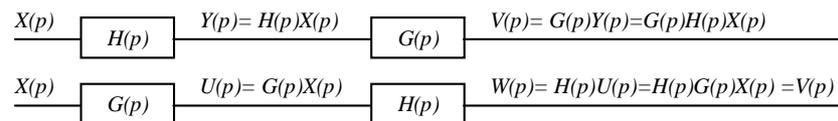
$$y(t) = h(t) * x(t)$$

- Si les CI sont non nulles :  $K(p) \neq 0$  :

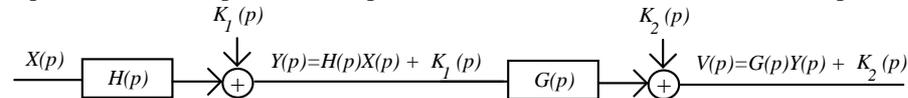
$$y(t) = h(t) * x(t) + TL^{-1}[K(p)]$$

- Permutation de deux blocs en cascade :

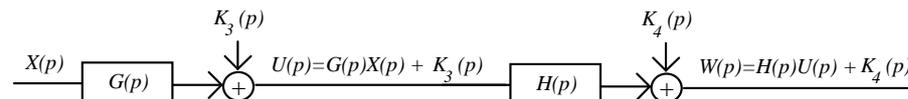
Lorsque les CI sont nulles, la permutation de deux blocs en cascade est commutative :



Lorsque les CI ne sont pas nulles, la permutation de deux blocs en cascade n'est pas commutative :



$$V(p) = G(p)[H(p)X(p) + K_1(p)] + K_2(p) = H(p)G(p)X(p) + G(p)K_1(p) + K_2(p)$$



$$W(p) = H(p)[G(p)X(p) + K_3(p)] + K_4(p) = H(p)G(p)X(p) + H(p)K_3(p) + K_4(p)$$

**1.2. Représentation de Fourier : Fonction de Transfert (Gain complexe)**

On a les mêmes propriétés qu'en Laplace : avec  $H(\nu) = TF[h(t)]$  : FT du filtre linéaire et le caractérisant:

$$H(\nu) = \frac{Y(\nu)}{X(\nu)} \quad \text{où } X(\nu) \text{ et } Y(\nu) \text{ représentent la TF des signaux } x(t) \text{ et } y(t).$$



La FT ou **gain complexe**  $H(\nu)$  représente le spectre du filtre linéaire.

$H(\nu)$  est la Représentation Fréquentielle d'un système à TC

- Application :

Comme pour les signaux, la TF se prête avantagusement à l'étude spectrale des systèmes.

**2. Ordre d'un système à TC**

C'est la valeur absolue de la différence entre le degré du polynôme dénominateur et celui du polynôme numérateur de la FT (généralement fractionnelle) de la variable  $p$  (représentation de Laplace) ou  $\nu$  (représentation de Fourier).

L'ordre, qui n'est défini que pour un système de FT fractionnelle, représente donc la valeur absolue de la différence entre le nombre de pôles et le nombre de zéros de la FT du système.

**3. Stabilité d'un Système à TC**

- Temps :

La définition : « à entrée bornée, sortie bornée » donne une condition nécessaire et suffisante de stabilité pour un SLTI : (cf. démonstration pour les systèmes à TD)

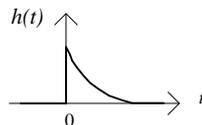
$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$

Il en découle que la RI d'un système stable vérifie :

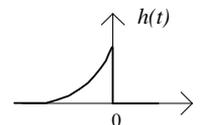
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = 0 \quad (\text{système causal})$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} h(t) = 0 \quad (\text{système non causal})$$

Système causal stable



Système non causal stable



- Fréquence :

Traduite en fréquence, cette CNS devient :

**Un système causal est stable si et seulement si tous les pôles de la FT  $H(p)$  de ce système ont une partie réelle négative** (le cas *partie réelle* = 0 est un cas limite).

Cette CNS peut aussi être appliquée aux signaux plutôt qu'aux systèmes : un signal  $x(t)$  de TL  $X(p)$  ne tend pas vers l'infini lorsque  $t$  tend vers l'infini si et seulement si les pôles de  $X(p)$  sont à partie réelle  $\leq 0$  (Ex. : l'échelon unité dont la TL est  $1/p$ ).

(Pour un système anticausal ( $\equiv$  système de RI nulle pour  $t > 0$ ), la CNS de stabilité serait que les pôles de  $H(p)$  soient à partie réelle positive).

Démonstration du critère fréquentiel de stabilité :

Soit un système causal de FT  $H(p)$  où  $H(p)$  est une fraction rationnelle.

$H(p)$  peut être décomposé (en éléments simples) sous la forme suivante (avec éventuellement des

éléments de retard de la forme  $e^{-\tau_i p}$ ) :

$$H(p) = \frac{A_1}{p - a_1} + \frac{A_2}{p - a_2} + \dots = \sum_i \frac{A_i}{p - a_i}$$

$H(p)$  apparaît alors comme la somme de sous-systèmes du 1er ordre.  $H(p)$  est stable si chaque sous-

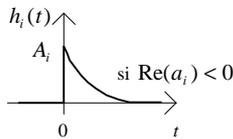
système  $\frac{A_i}{p - a_i}$  est stable.

Un système est stable si, après perturbation, il revient à son état précédent.

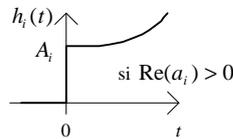
Prenons  $\delta(t)$  comme perturbation et calculons la RI  $h_i(t)$  (appelée *mode*) d'un sous-système

$$\frac{A_i}{p - a_i} \text{ pris initialement au repos : } h_i(t) = TL^{-1} \left[ \frac{A_i}{p - a_i} \right] = A_i e^{a_i t} \Gamma(t) :$$

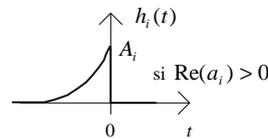
Système causal stable



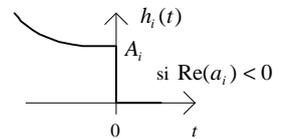
Système causal instable



Système non causal stable



Système non causal instable



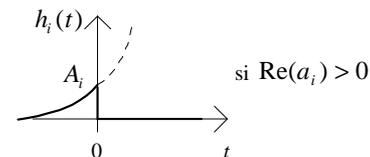
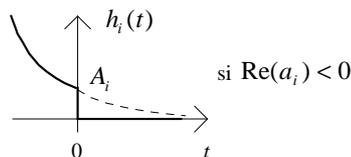
Un système causal est donc stable si tous les pôles de sa FT ont une partie réelle négative, car alors tous ses modes sont stables.

Par contre un système non causal traite un signal en faisant défiler le temps de droite à gauche (de l'avenir vers le passé) contrairement à un système causal où le temps s'écoule de gauche à droite (du passé vers le futur).

Par exemple, le filtre non causal à TD d'équation aux différences :  $y_n = x_n + y_{n+1}$  doit être programmé avec un balayage de droite à gauche, alors que le filtre causal :  $y_n = x_n + y_{n-1}$  doit l'être avec un balayage de gauche à droite.

En prenant également comme conditions initiales le repos, on a cette fois comme RI d'un sous-

système  $\frac{A_i}{p - a_i} :$



Un système non causal est donc stable si tous les pôles de sa FT ont une partie réelle positive.

### 4. Réponse Fréquentielle d'un Système à TC

On l'appelle aussi *Réponse en Fréquence* ou *Réponse Harmonique* ( $\equiv$  en régime Harmonique, c'est-à-dire sinusoïdal) ou encore Hamiltonien du SLTI avec pour fonctions propres les signaux sinusoïdaux  $e^{-i2\pi\nu t}$ .

On la note  $H(\nu)$  et on a la relation de définition :  $H(\nu) = TF[h(t)]$   $h(t) : \text{RI}$

Comme le système est supposé linéaire, il répond à une sinusoïde  $x(t) = A \sin(2\pi\nu t)$  d'amplitude  $A$  par une autre sinusoïde  $y(t) = B \sin(2\pi\nu(t - \tau))$ , d'amplitude  $B$ , et retardée (si le système est causal comme c'est généralement le cas, avancée si le système est anticausal) de  $\tau$  (ou encore déphasée de  $\varphi = -2\pi\nu\tau$  par rapport à  $x(t)$ ).

Si l'on fait varier la fréquence  $\nu$  de la sinusoïde d'excitation  $x(t)$  en maintenant constante son amplitude  $A$ , l'amplitude  $B = B(\nu)$  de la sinusoïde de sortie va varier, ainsi que le déphasage  $\varphi = \varphi(\nu)$  entre entrée et sortie.

Le module  $|H(\nu)|$  de la Réponse en Fréquence  $H(\nu)$  représente, en fonction de la fréquence  $\nu$ , le rapport des amplitudes  $\frac{B(\nu)}{A}$  :

$$|H(\nu)| = \frac{B(\nu)}{A}$$

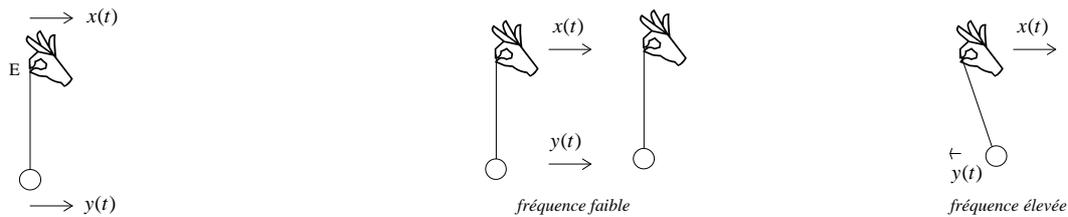
L'argument  $Arg[H(\nu)]$  de la Réponse en Fréquence  $H(\nu)$  représente, en fonction de la fréquence  $\nu$ , le déphasage  $\varphi(\nu)$  entre entrée et sortie :

$$Arg[H(\nu)] = \varphi(\nu) = -2\pi\nu\tau$$

Exemple

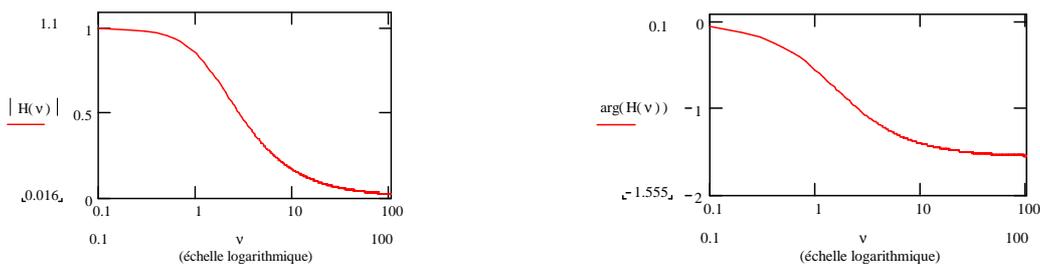
Si l'on communique manuellement un mouvement rectiligne sinusoïdal  $x(t)$  à un pendule simple en déplaçant l'extrémité E du fil, et que l'on s'intéresse à la position  $y(t)$  du pendule lui-même, on a affaire à un système mécanique pour lequel :

- . si on déplace l'extrémité E lentement (à une fréquence  $V$  faible), le pendule « suit » : son amplitude est importante et il est en phase avec la sinusoïde d'excitation.
- . si on déplace l'extrémité E plus rapidement (à une fréquence  $V$  plus grande), le pendule suit moins bien : son amplitude décroît et il est en retard (déphasage de  $-\pi/2$ ) avec la sinusoïde d'excitation.
- . enfin, pour des fréquences encore plus élevées, le pendule « ne répond plus » : son amplitude est nulle et son retard de phase a atteint  $-\pi$ , il est en opposition de phase).



Ce système est du type « passe-bas », ce qui signifie qu'il répond aux basses fréquences, mais qu'à partir d'une certaine fréquence il ne répond plus.

Soit  $H(V)$  la Réponse en Fréquence de ce système. On a donc la représentation :



Plus généralement, la théorie de la relativité dit que le temps de réponse d'un système physique ne peut être inférieur au temps de propagation de la lumière et donc que tous les systèmes physiques ne peuvent répondre à des sollicitations de fréquence infiniment élevées : on dit qu'un système physique est « passe-bas » : il « coupe » les hautes fréquences.

Fonction propre (Hamiltonien) des filtres linéaires :

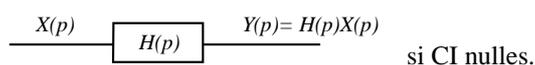
On a la propriété remarquable traduisant le fait que la sinusoïde est fonction propre des filtres linéaires :

$$H(v) = \frac{s(t)}{e(t)} \quad \text{où } s(t) \text{ est la réponse du SLTI de FT } H(v) \text{ au signal sinusoïdal } e(t)$$

(le système étant linéaire,  $s(t)$  est aussi sinusoïdale).

4.1. Réponse Fréquentielle de Laplace

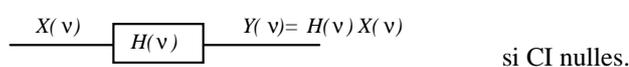
La Réponse Fréquentielle (RF)  $H(V)$  du système s'obtient en faisant  $p = i2\pi v$  dans  $H(p) = TL[h(t)]$ :



$$H(v) = H(p = i2\pi v)$$

4.2. Réponse Fréquentielle de Fourier

Elle est immédiate : c'est  $H(v)$



**5. Système à TC à phase linéaire**

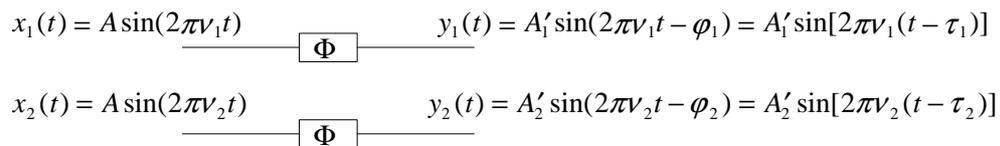
$$\text{Phase } \varphi \stackrel{\Delta}{=} \text{Arg}[H(\nu)] = \text{Arg}[H(p = i2\pi\nu)]$$

Un système de FT  $H(\nu)$  est à phase linéaire si  $\varphi = \text{Arg}[H(\nu)]$  est une fonction linéaire de la fréquence  $\nu$  :

$$\varphi = \text{Arg}[H(\nu)] = \theta\nu \quad \text{avec} \quad \theta = C^{te}.$$

Un filtre à phase linéaire a pour propriété de retarder tous les signaux d'un même retard quelquesoit leur fréquence :

Soit  $\Phi$  un filtre linéaire excité par un signal sinusoïdal de fréquence  $\nu$ .  $\Phi$  étant linéaire et stationnaire, sa sortie est une sinusoïde atténuée (ou amplifiée) et retardée (de  $\tau$ ) ( $\equiv$  déphasée de  $\varphi = 2\pi\nu\tau$ ) par rapport au signal d'entrée. En excitant  $\Phi$  successivement par 2 signaux sinusoïdaux de fréquence  $\nu_1$  et  $\nu_2$ , on a :



Si le filtre est à phase linéaire, on a :  $\varphi_1 = \theta\nu_1$  et  $\varphi_2 = \theta\nu_2$  d'où :

$$y_1(t) = A'_1 \sin(2\pi\nu_1 t - \theta\nu_1) = A'_1 \sin[2\pi\nu_1(t - \tau)]$$

$$y_2(t) = A'_2 \sin(2\pi\nu_2 t - \theta\nu_2) = A'_2 \sin[2\pi\nu_2(t - \tau)]$$

Les 2 signaux de fréquence  $\nu_1$  et  $\nu_2$  sont retardés du même temps  $\tau = \frac{\theta}{2\pi}$ .

**6. Système à TC à phase minimale ( $\equiv$  à déphasage minimal)**

Un système de FT  $H(p)$  est dit à phase minimale si tous les zéros de  $H(p)$  sont à partie réelle négative, pour un système causal.

Les systèmes physiques étant généralement à retard de phase (temps de calcul du filtre), un déphasage  $\varphi$  minimal indique un retard  $\tau$  minimal engendré par le filtre.

Un filtre à déphasage minimal a donc pour propriété de limiter le retard occasionné par la traversée du filtre (l'introduction d'un zéro à partie réelle  $> 0$  dans la FT du filtre ralentirait le filtre).

Déphasage minimal  $\equiv$  retard minimal

Un zéro à partie réelle positive de la FT  $H(p)$  d'un filtre linéaire (encore appelé abusivement zéro « instable » par analogie avec le critère de stabilité) provoque un retard ( $\equiv$  un déphasage) supplémentaire lors de la traversée du filtre :

Soit  $G(p)$  un filtre linéaire causal, donc provoquant un certain déphasage, un certain retard de sa réponse à une entrée donnée. On a donc:  $ArgG(p) < 0$ . En régime harmonique ( $p = i\omega$ ), sa réponse à une entrée exponentielle imaginaire :  $x(t) = e^{i\omega t}$  est :  $y(t) = G(p) \cdot e^{i\omega t}$  (les fonctions exponentielles imaginaires ( $\equiv$  sinusoïdales) sont fonctions propres des filtres linéaires)  $\rightarrow y(t) = |G(p)| \cdot e^{i[ArgG(p)]} \cdot e^{i\omega t} = |G(p)| \cdot e^{i[\omega t + ArgG(p)]}$

Sa réponse à une entrée sinusoïdale :  $x(t) = \sin(\omega t)$  est donc :

$$y(t) = |G(p)| \cdot \sin[\omega t + ArgG(p)] = |G(p)| \cdot \sin[\omega(t - \tau)] \quad \text{avec : } \tau > 0 : \tau = -\frac{ArgG(p)}{\omega}$$

avec :  $p = i\omega$ ,  $\omega = 2\pi\nu$  et  $\nu \geq 0$  (régime harmonique).

Soit  $H(p)$  un système linéaire causal ( $ArgH(p) < 0$ ) comportant un zéro « instable » ( $\alpha > 0$ ) :

$$H(p) = (p - \alpha)G(p)$$

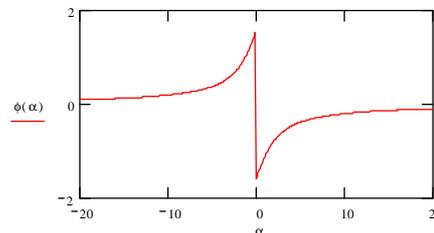
(avec  $\alpha$  réel et non pôle de  $G(p)$ ) d'où :  $ArgH(p) = ArgG(p) + Arg(p - \alpha)$

En posant :  $p = \sigma + i\omega$ , on a :  $Arg(p - \alpha) = Arctg\left(\frac{\omega}{\sigma - \alpha}\right)$

Si on se place en Réponse Fréquentielle ( $\sigma = 0$ ,  $p = i\omega$ ,  $\omega = 2\pi\nu$  et  $\nu \geq 0$ ), il vient :

$$ArgH(\nu) = ArgG(\nu) + Arctg\left(\frac{2\pi\nu}{-\alpha}\right) \quad \text{et : } \begin{cases} \alpha < 0 \rightarrow Arctg\left(\frac{2\pi\nu}{-\alpha}\right) > 0 \\ \alpha > 0 \rightarrow Arctg\left(\frac{2\pi\nu}{-\alpha}\right) < 0 \end{cases}$$

Allure du tracé de  $Arctg\left(\frac{2\pi\nu}{-\alpha}\right) \triangleq \phi(\alpha)$  :

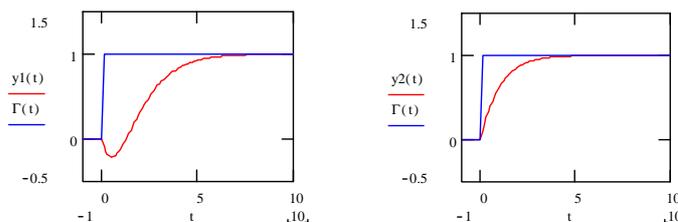


Un zéro « instable » ( $\alpha > 0$ ) va entraîner un « retard de phase » de  $H(p)$ , c'est-à-dire un déphasage plus important ( $|ArgH(p)|$  accru, avec  $ArgH(p) < 0$ ), donc le retard provoqué par  $H(p)$  est accru.

On peut remarquer que si on veut accroître la rapidité d'un filtre (diminuer son temps de réponse), il faut lui procurer une avance de phase. Un retard de phase ralentit un filtre.

Exemple de système à phase **non minimale** :  $H_1(p) = \frac{Y_1(p)}{U(p)} = \frac{1-p}{(1+p)^2}$  à comparer au système à phase **minimale** :  $H_2(p) = \frac{Y_2(p)}{U(p)} = \frac{1+p}{(1+p)^2}$

Réponse indicielle : (entrée :  $u(t) = \Gamma(t)$ )



Pour le système à phase non minimale, la réponse démarre en sens inverse.

Plus généralement, le nombre d'oscillations initiales est égal au nombre de zéros « instables » de la FT.

### 7. Système à TC à retard pur

Le dictionnaire donne immédiatement la traduction d'un retard temporel  $\tau$  en fréquentiel :

$$\text{Si } f(t) \xrightarrow{TL} F(p) \quad \text{alors} \quad f(t - \tau) \xrightarrow{TL} F(p)e^{-p\tau}$$

Un facteur  $e^{-p\tau}$  dans une fonction  $H(p)$  indique un retard d'un temps  $\tau$  du signal  $h(t) = TL^{-1}[H(p)]$ .

### 8. Réponse indicielle d'un Système à TC

La réponse indicielle, c'est-à-dire la réponse au signal échelon :  $x(t) = \Gamma(t)$ , notée  $r(t)$  a pour TL :

$$R(p) = H(p) \frac{1}{p} \text{ si le système a pour FT } H(p) \text{ (la TL de } \Gamma(t) \text{ est } \frac{1}{p}).$$

Le théorème de la valeur finale :  $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p R(p)$  donne :  $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = H(0)$ .

Le régime permanent de la réponse indicielle :  $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t)$ , est égal à la valeur de la FT  $H(p)$  en  $p = 0$  :  $H(0)$  :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = H(0)$$

Une autre façon d'établir ce résultat est d'exprimer directement  $H(0)$  à partir de la définition de la TL ou de

$$\text{la TF : } H(0) = H(p) \Big|_{p=0} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-pt} dt \Big|_{p=0} = H(v) \Big|_{v=0} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i2\pi vt} dt \Big|_{v=0} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt \quad \text{où}$$

$h(t)$  est la RI du système.

La réponse indicielle  $r(t)$  s'obtient par la relation de convolution :

$$r(t) = h(t) * \Gamma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)\Gamma(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} h(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau$$

Le régime permanent de la réponse indicielle  $r_{pp}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} r(t)$  est donc égal à  $\int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt = H(0)$ .

### 9. Modes d'un Système à TC

Un mode est la RI d'un système élémentaire canonique ( $\equiv$  système du 1er ordre pour des FT fractionnelles).  
 Un système quelconque d'ordre  $n$ , décomposé en somme de  $n$  sous-systèmes élémentaires (d'ordre 1) comprend donc  $n$  modes.

Exemples :

- Soit le système de FT  $H(p) = \frac{1}{p+a}$

Ce système ne comprend qu'1 seul mode  $h_1(t)$ , car  $H(p)$  ne possède qu'1 seul pôle. ( $H(p)$  du 1er ordre)

Mode :  $h_1(t) = TL^{-1}[H(p)] = e^{-at} \Gamma(t)$

- Soit le système de FT  $H(p) = \frac{1}{p^2 + 3p + 2}$ . Pour faire apparaître les 2 sous-systèmes élémentaires, on

décompose  $H(p)$  en éléments simples :  $\rightarrow H(p) = \frac{1}{(p+1)(p+2)} = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2} = H_1(p) + H_2(p)$

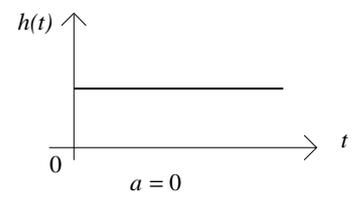
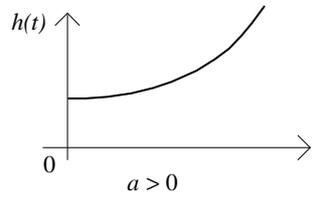
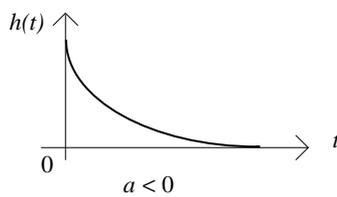
et :  $h(t) = h_1(t) + h_2(t)$

Ce système comprend 2 modes  $h_1(t)$  et  $h_2(t)$ , car  $H(p)$  possède 2 pôles. ( $H(p)$  du 2nd ordre)

Modes :  $h_1(t) = TL^{-1}[H_1(p)] = e^{-t} \Gamma(t)$        $h_2(t) = TL^{-1}[H_2(p)] = e^{-2t} \Gamma(t)$

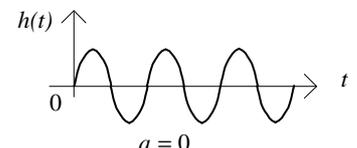
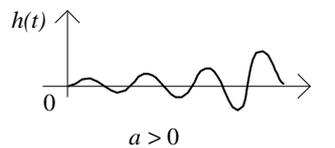
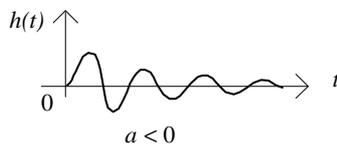
Classification des modes :

- Mode  $h(t)$  de pôle  $a$  réel : (mode non oscillant)



- Mode  $h(t)$  de pôles  $a \pm jb$  complexes conjugués : (mode oscillant)

Lorsque les pôles sont complexes conjuguées, ils se combinent pour ne former qu'1 seul mode (et non 2).



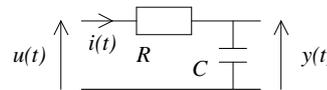
10. Représentations Fréquentielles de Laplace et Fourier de Systèmes à TC modélisés

SYSTEMES PHYSIQUES

Systèmes électriques

Circuit RC intégrateur à TC

Entrée : tension  $u(t)$  - Sortie : tension  $y(t)$



Lois de Kirschhoff : 
$$\begin{cases} u(t) - y(t) = Ri(t) \\ i(t) = C \frac{dy(t)}{dt} \end{cases} \rightarrow RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t) \quad (1)$$

- 1er cas : Condensateur C initialement déchargé (Conditions Initiales (CI) nulles)

TL(1) :  $RCpY(p) + Y(p) = U(p) \rightarrow H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{1 + RCp}$

- 2nd cas : Condensateur C initialement chargé à  $y_0$  (CI non nulles)

TL(1) :  $RC[pY(p) - y_0] + Y(p) = U(p) \rightarrow Y(p) = H(p)U(p) + H(p)RCy_0$

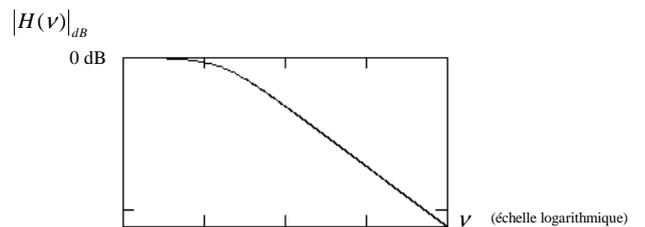
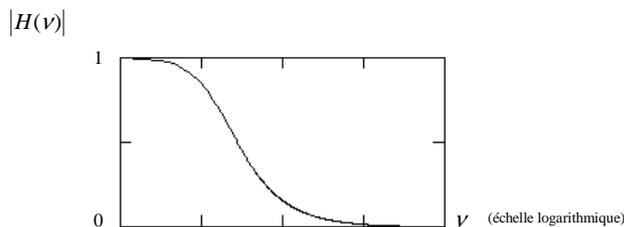
Réponse fréquentielle

$$H(v) = \frac{1}{1 + i2\pi vRC}$$

$$|H(v)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi vRC)^2}}$$

$$|H(v)|_{dB} = 20 \log |H(v)|$$

$$Arg[H(v)] = -Arctg(2\pi vRC)$$

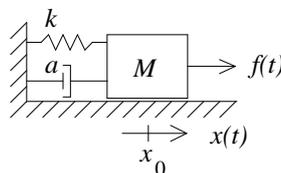


Système du 1er ordre et de nature passe-bas (élimination des composantes de  $u(t)$  de fréquence  $> v_0 = \frac{1}{2\pi RC}$ )

Systèmes mécaniques

Intégrateur mécanique à TC

Entrée : force  $f(t)$  - Sortie : position  $x(t)$  par rapport à  $x_0$



$k$  : coeff. de frottement élastique

$a$  : coeff. de frottement visqueux

$x_0$  : position d'équilibre

Relation Fondamentale de la Dynamique :  $\sum \text{forces} = M\gamma \rightarrow f(t) - kx(t) - a\dot{x}(t) = M\ddot{x}(t) \quad (2)$

- Si les Conditions Initiales nulles :

TL(2) :  $F(p) - kX(p) - apX(p) = Mp^2 X(p) \rightarrow H(p) = \frac{X(p)}{F(p)} = \frac{1}{k + ap + Mp^2}$

## TD 3. Représentations Fréquentielles des Signaux & des Systèmes à TC

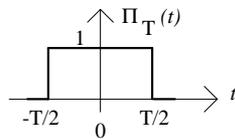
### I. SIGNAUX

#### 1. Transformée de Fourier de $\delta(t)$

Montrer que :  $\text{TF}[\delta(t)] = 1$  et que :  $\text{TF}(1) = \delta(\nu)$

#### 2. Transformée de Fourier d'une porte (ou fenêtre)

Calculer la TF d'une porte :



### II. SYSTEMES

#### 1. Fonctions propres des filtres linéaires

Montrer que les exponentielles imaginaires (signaux sinusoïdaux) sont les fonctions propres des filtres linéaires:

$$x(t) = e^{i2\pi\nu t} \quad \longrightarrow \quad \boxed{H(\nu)} \quad \longrightarrow \quad y(t) = H(\nu) \cdot x(t)$$

#### 2. Filtre intégrateur

Soit le filtre linéaire défini par la relation d'entrée-sortie:  $y(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x(\theta) d\theta$  ( $T > 0$ )

- a) S'agit-il d'un SLTI ? (Système Linéaire Stationnaire ( $\equiv$  à Temps Invariant))
- b) Déterminer sa FT  $H(\nu)$
- c) Tracer  $|H(\nu)|$  et  $\text{Arg } H(\nu)$
- d) Déterminer et tracer la RI du filtre.
- e) Nature du filtre ? (Passe-Bas, Passe-Haut, Passe-Bande, Coupe-Bande)

## TD 3 ANNEXE. Représentations Fréquentielles des Signaux & des Systèmes à TC

### I. SIGNAUX

#### 1. Transformée de Fourier d'un peigne

Soit  $\text{comb}_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$  (Peigne de Dirac). Calculer la TF de  $\text{comb}_T(t)$ .

#### 2. Transformée de Laplace de signaux périodiques

Déterminer la TL des signaux causaux suivants :



#### 3. Transformée de Fourier d'une Gaussienne

Montrer que la TF d'une Gaussienne :  $x(t) = e^{-\pi t^2}$  est encore une Gaussienne.

#### 4. Transformation de Wigner-Ville

Les signaux tels que les signaux modulés en fréquence ou encore le signal parole constituent des exemples de signaux non stationnaires. Dans ce cas, la décomposition spectrale ne peut être que difficilement obtenue par TF. On peut alors utiliser la Transformation de Wigner-Ville d'un signal  $x(t)$  défini par :

$$TWV[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-i2\pi\nu\tau} d\tau = X(\nu, t) \quad x^* : \text{conjugué de } x$$

Le résultat, fonction de  $\nu$  et  $t$  permet une analyse dans l'espace Temps-Fréquence.

- Soit le signal harmonique modulé en fréquence :  $x(t) = e^{i\pi\alpha t^2}$  ; calculer la TWV  $[x(t)]$
- Soit le signal harmonique stationnaire classique :  $y(t) = e^{i2\pi f_0 t}$  ; calculer la TWV  $[y(t)]$  et montrer qu'elle se réduit à la TF de  $y(t)$ .

#### 5. Transformée de Hilbert

On appelle Transformation de Hilbert (TH) d'un signal  $x(t)$ , la réponse  $\hat{x}(t)$  à  $x(t)$  du filtre de FT :

$$H(\nu) = \begin{cases} -i & \text{à } \nu > 0 \\ +i & \text{à } \nu < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} H(\nu) = -i \cdot \text{sgn}(\nu) & \text{avec :} \\ \text{sgn}(\nu) : \text{fonction signe} \end{cases} \quad \begin{array}{c} \text{sgn}(\nu) \\ \uparrow \\ 1 \\ \text{-----} \\ -1 \\ \downarrow \end{array}$$

$$x(t) \xrightarrow{TH} \hat{x}(t) = x(t) * h(t) \quad \text{avec :} \quad h(t) = TF^{-1}[-i \cdot \text{sgn}(\nu)]$$

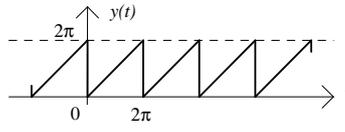
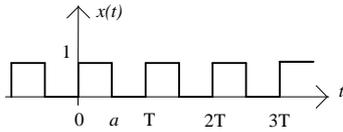
- Déterminer la RI  $h(t)$  du filtre.

**6. Décomposition en série de Fourier**

Donner la Représentation Fréquentielle des signaux suivants et la tracer :

(a)  $s(t) = \sin 2\pi\nu_0 t$  et (b)  $c(t) = \cos 2\pi\nu_0 t$

(c)  $x(t)$  (avec  $a = \pi$  et  $T = 2\pi$ ) et  $y(t)$  : (forme trigonométrique et forme complexe)



En déduire l'expression de  $S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2kt}{2k}$  en fonction de  $x(t)$  et  $y(t)$ .

**7. Transformée de Laplace de  $\delta(t)$**

Montrer que TL  $[\delta(t)] = 1$

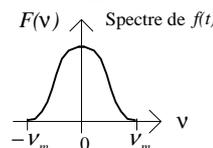
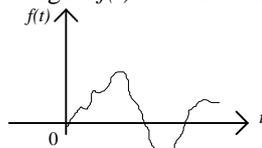
**8. Transformée de Fourier de l'échelon**

Calculer la TF de l'échelon  $\Gamma(t)$ .

**II. SYSTEMES**

**1. Modulation - démodulation**

On considère le signal  $f(t)$  et sa Transformée de Fourier donnés dans le schéma ci-après :

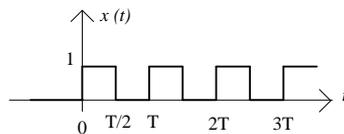
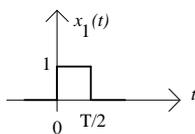


Soit  $g(t) = \cos 2\pi\nu_c t$  et  $\nu_c > 2\nu_m$  déterminer  $h(t) = g(t)f(t)$  et  $H(v) = \text{TF}[h(t)]$ .  
Comment peut-on retrouver  $f(t)$  à partir de  $h(t)$  ?

**2. Filtre passe-bas [voir TP]**

Soit le filtre linéaire de FT :  $H(p) = \frac{1}{p + a}$  (passe-bas)

- Déterminer la réponse  $y(t)$  de ce filtre au signal carré périodique de période T et causal  $x(t)$ ,  
 $x(t)$  étant le périodisé de  $x_1(t)$  :  $x_1(t) = 1$  pour  $0 \leq t < T/2$ , 0 sinon :



### 3. Suppression d'échos

Considérons un système dont la Réponse Impulsionnelle  $h(t)$  est composée d'un train d'impulsions, i.e. :

$$h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n \delta(t - nT)$$

où  $T > 0$  est le temps entre deux impulsions consécutives et  $h_n$  des constantes.

1. Réaliser le schéma-bloc d'un tel système.
2. Supposons que l'entrée  $x(t)$  à ce système est aussi un train d'impulsions :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \delta(t - nT)$$

Montrer que dans ce cas la sortie est donnée par :

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n \delta(t - nT) \quad \text{avec:} \quad y_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k h_{n-k}$$

3. Considérons maintenant le cas où nous voulons supprimer d'un signal acoustique les échos. Supposons, par exemple, que dans un auditorium il y a écho, i.e. une impulsion acoustique initiale est suivie par des versions atténuées du même son à des intervalles régulièrement espacés dans le temps. Nous pouvons modéliser ce phénomène comme étant la sortie d'un SLI avec RI :

$$h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n \delta(t - nT)$$

où  $T$  est le temps en secondes pour qu'un écho apparaisse et  $h_k$  est le gain du  $k$ -ième écho.

Notons par  $x(t)$  le signal acoustique d'origine et  $y(t) = x(t) * h(t)$  est le signal qui arrive à l'entrée du microphone et qui se traduit en signal électrique qui sera aussi noté par  $y(t)$ .

Pour supprimer les échos, le signal électrique  $y(t)$  passe à travers un SLI de RI  $g(t)$  déterminé de façon que la

sortie soit égale à  $x(t)$ . Supposons que  $g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \delta(t - nT)$ .

Etablir la relation des coefficients  $g_n$  avec  $h_n$ .

\_\_\_\_\_

**TP 3. Représentations Fréquentielles des Signaux et des Systèmes à TC**

**TP 3 ANNEXE. Représentations Fréquentielles des Signaux et des Systèmes à TC**

**II. SYSTEMES**

**1. Filtre passe-bas [Voir TD]**

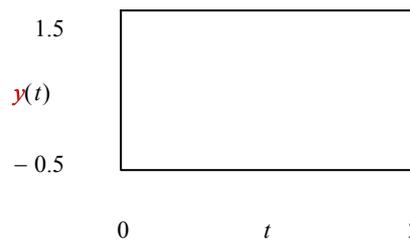
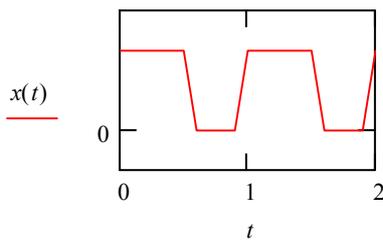
Réponse du filtre de FT  $H(p) := \frac{1}{p+a}$  à un signal carré périodique  $x(t)$

$$T := 1 \quad N := 2 \quad t := 0, 0 + \frac{T}{10} .. N \cdot T \quad \Gamma(t) := \Phi(t)$$

$$x0(t) := \begin{cases} 1 & \text{if } t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{if } t > \frac{T}{2} \end{cases} \quad xI(t) := x0(t) \cdot \Gamma(t) \quad x(t) := \sum_{k=0}^N xI(t - k \cdot T)$$

$$a := 2 \quad H(p) := \frac{1}{p+a} \quad H(p) \text{ invlaplace, } p \rightarrow \exp(-2 \cdot t) \quad h(t) := \exp(-a \cdot t) \cdot \Gamma(t)$$

$$y(t) :=$$



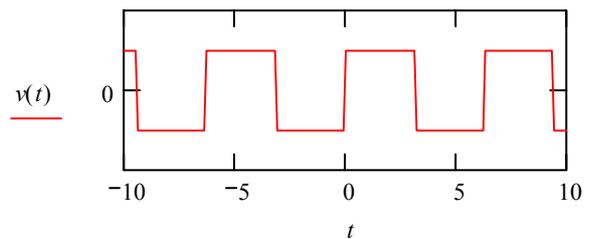
**3. Représentation Fréquentielle d'un signal périodique à TC**

Décomposition en série de Fourier.

Signal périodique initial  $t := -4 \cdot \pi, -4 \cdot \pi + 0.1 .. 4 \cdot \pi$

Phénomène de Gibbs

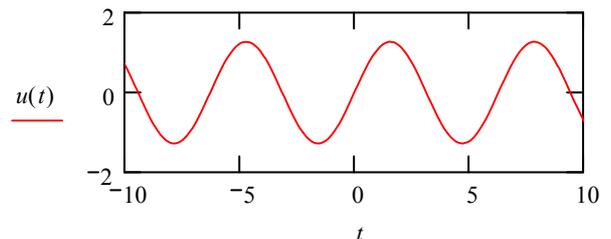
$$v(t) := \begin{cases} \text{if } t \geq 0 \\ \quad \begin{cases} 1 & \text{if } \text{mod}(t, 2 \cdot \pi) \leq \pi \\ -1 & \text{otherwise} \end{cases} \\ \text{if } t < 0 \\ \quad \begin{cases} -1 & \text{if } \text{mod}(t, 2 \cdot \pi) > -\pi \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} \end{cases}$$



N+1 composantes du signal décomposé en séries de Fourier

Faire varier N de 0 à 100

$$N := 0 \quad u(t) := \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^N \frac{\sin[(2 \cdot k + 1) \cdot t]}{2 \cdot k + 1}$$

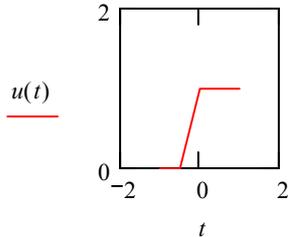


**4. Représentation Fréquentielle d'un signal non périodique à TC**

Transformée de Fourier de l'échelon  $u(t)$  : - directe sur un support de largeur  $A$  et - par fonction intégrée

Faire varier  $A$  entre 1 et 20 pour comparer les résultats

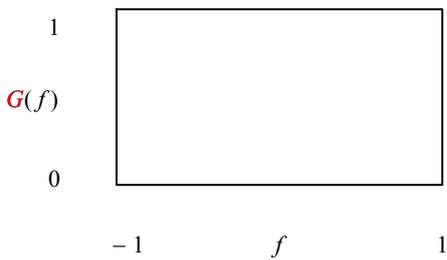
$$A := 1 \quad t := -A, -A + 0.5.. A \quad f := -A, -A + 0.5.. A \quad \Delta(f) := \begin{cases} \infty & \text{if } f = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad u(t) := \Phi(t)$$



Calcul direct

$$g(f) := \int_{-A}^A u(t) e^{-i2\pi ft} dt$$

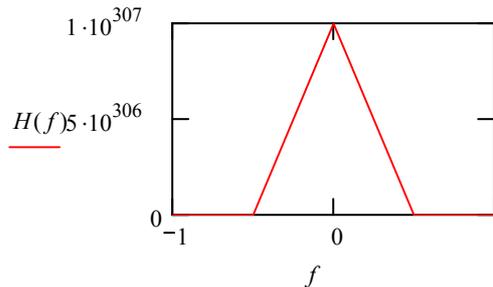
$$G(f) := |g(f)|$$



Fonction intégrée

$$h(f) := \begin{cases} \frac{1}{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} + \frac{\Delta(f)}{2} & \text{if } f \neq 0 \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$H(f) := |h(f)|$$



**5. Système à phase minimale**

Faire varier le zéro de  $Y(p)$  pour faire apparaître le cas de phase minimale et non minimale

$$a := 0 \quad t := -1, -1 + 0.1.. 10 \quad \Gamma(t) := \Phi(t)$$

$$H(p) := \frac{(p - a)}{(1 + p)^2}$$

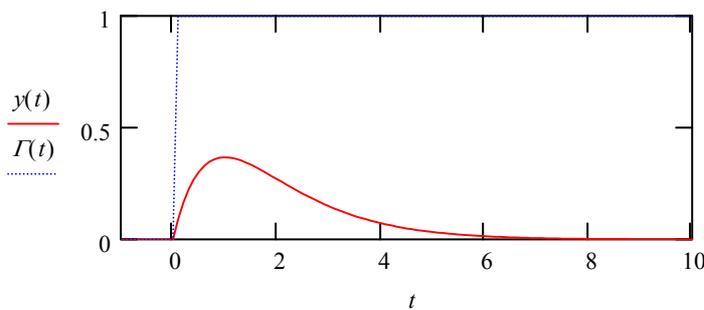
Réponse indicielle

$$Y(p) := \frac{H(p)}{p}$$

donc

$$Y(p) := \frac{(p - a)}{p \cdot (1 + p)^2}$$

$$y(t) := (-a + a \cdot \exp(-t) + t \cdot \exp(-t) \cdot a + t \cdot \exp(-t)) \cdot \Gamma(t)$$



**6. Fonction de Transfert d'un système linéaire stationnaire**

*Système fondamental (passe-bas) du 1er ordre*

On fera varier le paramètre Constante de temps  $\tau$  et le gain statique K

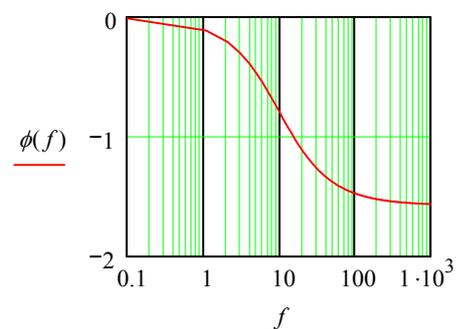
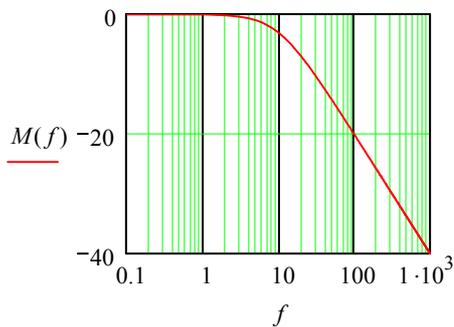
$$f_0 := 10 \quad K := 1 \quad \tau := \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f_0} \quad H(p) := \frac{K}{1 + \tau \cdot p}$$

Réponse en fréquence

$$f := 0.1, 0.1 + 1 \dots 1000 \quad G(f) := H(i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f)$$

Module  $M(f) := 20 \cdot \log(|G(f)|)$

Phase  $\phi(f) := \arg(G(f))$



*Système fondamental (passe-bas) du 2nd ordre*

On fera varier le paramètre d'amortissement m et le gain statique K

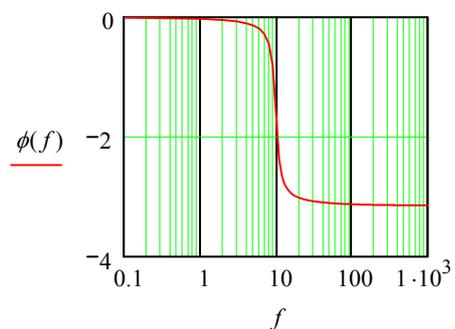
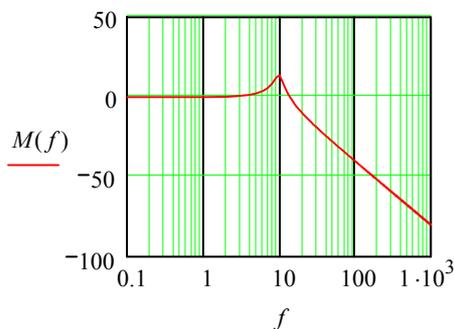
$$m := 0.1 \quad K := 1 \quad f_0 := 10 \quad H(p) := \frac{K}{\left(\frac{p}{2\pi \cdot f_0}\right)^2 + \frac{2 \cdot m}{2\pi \cdot f_0} \cdot p + 1}$$

Réponse en fréquence

$$f := 0.1, 0.1 + 1 \dots 1000 \quad G(f) := H(i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f)$$

Module  $M(f) := 20 \cdot \log(|G(f)|)$

Phase  $\phi(f) := \arg(G(f))$

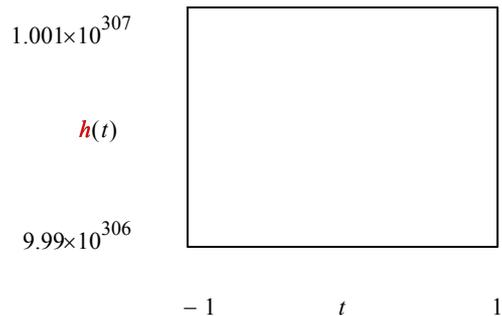


**7. Réponse temporelle d'un système à TC**

Réponse Impulsionnelle  $h(t)$  du 1er ordre fondamental

$$f_0 := 0.5 \quad K := 1 \quad \tau := \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f_0} \quad t := 0, 0 + 0.1 .. 10$$

$$H(p) := \frac{K}{1 + \tau \cdot p} \quad h(t) := \blacksquare$$



## 4. Représentations Fréquentielles des Signaux & des Systèmes à TD

### I. Représentations Fréquentielles des Signaux à TD

#### 1. Représentations Fréquentielles

##### 1.1. Représentation Fréquentielle de Fourier d'un Signal à TD : Transformation de Fourier discrète

On a vu, en ce qui concerne un signal à TC :

**Temps :**  $x(t)$  signal périodique ( $T$ ) à TC  $\rightarrow$  **Fréquence :**  $X_k$  spectre à FD (Fréquences Discrètes)  $X(k\nu) \equiv X\left(\frac{k}{T}\right)$

*Temps :*  $x(t)$  signal quelconque à TC  $\rightarrow$  *Fréquence :*  $X(\nu)$  spectre à FC (Fréquences Continues)

On devine (propriété de dualité) que pour un signal à TD, les propriétés vont s'invertir et le spectre sera périodique et à FC:

*Temps :*  $x(nT)$  signal périodique ( $T$ ) à TD  $\rightarrow$  *Fréquence :*  $X(\nu)$  spectre à FC et périodique (période  $1/T$ )

*Temps :*  $x(nT)$  signal quelconque à TD  $\rightarrow$  *Fréquence :*  $X(\nu)$  spectre à FC et périodique ( $1/T$ )

« *Temps* » :  $x(n)$  signal à TD  $\rightarrow$  *Fréquence :*  $X(\nu)$  spectre à FC et périodique (1)

Ainsi, un signal à TD a pour Représentation Fréquentielle :

Pour  $x(nT)$  :

$$X(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{\Delta} x(nT) \cdot e^{-i2\pi\nu nT}$$

Pour  $x(n)$  :

$$X(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{\Delta} x(n) \cdot e^{-i2\pi\nu n}$$

Et on a la transformation inverse :

$$x(nT) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X(\nu) \cdot e^{i2\pi\nu nT} d\nu$$

$$x(n) = \int_{-1/2}^{1/2} X(\nu) \cdot e^{i2\pi\nu n} d\nu$$

Le spectre  $X(\nu)$  d'un signal à TD  $x(nT)$  est continu ( $\equiv$  à Fréquences Continues) et périodique de période  $1/T$ .

Spectre  $\equiv$  occupation en fréquence de  $x(nT) \equiv$  Variance (plutôt que DSP)  $\equiv$  TF [ $x(nT)$ ].

Le spectre d'un signal échantillonné est périodique.

##### 1.2. Représentation Fréquentielle de Laplace des Signaux à TD : Transformation de Laplace discrète

Soit  $x(nT)$  (resp.  $x(n)$ ) un signal à TD. Par analogie avec la TL des signaux à TC, on définit la TL\* de  $x(nT)$  (resp.  $x(n)$ ) appelée TL échantillonnée ou TL discrète, par :

$$TL^*[x(nT)] = \sum_{n=-\infty}^{\Delta} x(nT) e^{-pnT} \quad (x(nT) : \text{séquence échantillonnée à la période d'échantillonnage } T)$$

$$TL^*[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\Delta} x(n) e^{-pn} \quad (x(n) : \text{suite numérique})$$

Rappel : TL d'un signal à TC :

$$TL[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-pt} dt$$

**1.3. Représentation Fréquentielle z des Signaux à TD : Transformation en z**

Si dans la Représentation de Laplace des signaux à TD on pose :

$$z = e^{pT} \quad \text{si le signal s'exprime par } x(nT) \quad (\text{signal échantillonné (à TD à partir d'un signal à TC)})$$

$$\text{ou : } z = e^p \quad \text{si le signal s'exprime par } x(n) \quad (\text{signal à TD (naturellement)})$$

On a :  $TL^*[x(nT)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)z^{-n} \stackrel{\Delta}{=} TZ[x(nT)]$     et :     $TL^*[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \stackrel{\Delta}{=} TZ[x(n)]$

où  $TZ[x(nT)]$  représente la Transformée en z de  $x(nT)$ .

On note :  $X(z) = TZ[x(nT)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)z^{-n}$     et :     $X(z) = TZ[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$

(  $n$  : entier relatif;  $T$  : réel;  $z$  : complexe;  $X(z)$  : généralement complexe même si  $x(nT)$  (ou  $x(n)$ ) est réel ).  
 $X(z)$  est la Représentation Fréquentielle du signal  $x(nT)$  (ou  $x(n)$ ).

La  $TZ$   $X(z)$  d'un signal à TD  $x(n)$  est donc un polynôme infini en z dont les coefficients sont les échantillons  $x(n)$  et que l'on peut généralement réduire à une fraction rationnelle en z (rapport de 2 polynômes finis).

La  $TZ$  monolatérale, notée  $TZ^+$ , s'écrit, pour une séquence  $x(nT)$  :  $X^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)z^{-n}$ .

Elle s'utilise comme c'était le cas pour la  $TL$  monolatérale, avec les signaux causaux.

Comme la  $TL$  monolatérale, la  $TZ$  monolatérale s'utilise chaque fois qu'il y a des Conditions Initiales (CI) (non nulles !), les CI signifiant que l'on cherche un signal à partir d'une origine des temps précise.

Une transformée bilatérale, comme la  $TF$  ou la  $TL$  bilatérale ou la  $TZ$  bilatérale, ne peut être utilisée en présence de CI, car celles-ci seraient alors englobées dans les transformées (et les tables de transformation généralement établies pour des signaux causaux seraient inutilisables).

**Par simplification de la notation,  $TZ^+$  est communément tout de même noté  $TZ$  et  $X^+(z)$  noté  $X(z)$ .**

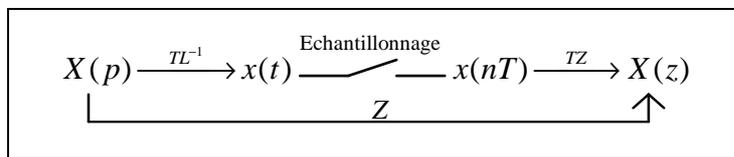
Comme pour la  $TL$ , la seule expression de  $X(z)$  en fonction de la variable  $z$  ne suffit pas à définir la Transformée en z de la séquence temporelle  $x(nT)$  (ou  $x(n)$ ).

Il faut aussi préciser le domaine de définition (ou domaine de convergence) de  $X(z)$ .

- Passage de la  $TL$  à la  $TZ$  :

La  $TZ$  n'est autre que la  $TL$  échantillonnée ( $\equiv TL$  discrète)  $TL^*[x(nT)]$ .

On peut faire correspondre à une fonction  $X(p)$  sa Représentation discrète en z notée  $X(z) = Z[X(p)]$  et ainsi obtenue :



On a donc :  $X(p) \xrightarrow{Z} X(z)$     alors que :  $x(nT) \xrightarrow{TZ} X(z)$

Le passage de la  $TL$  à la  $TZ$  se fait par  $z = e^p$  pour une séquence  $x(n)$  et  $z = e^{pT}$  pour une séquence  $x(nT)$ .

- Convergence de la TZ d'une séquence  $x(nT)$  :

On a :  $z = e^{pT}$  où :  $p = \sigma + i2\pi\nu$   $\rightarrow z = e^{\sigma T} \cdot e^{i2\pi\nu T} = \rho e^{i\theta}$  avec :  $\begin{cases} \rho = e^{\sigma T} \\ \theta = 2\pi\nu T \end{cases}$

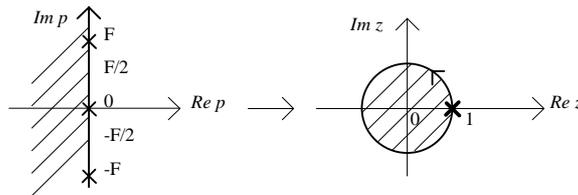
Le demi-plan gauche de la variable  $p$  (Laplace):  $\sigma < 0 \rightarrow \rho < 1$  correspond au disque de rayon unité en  $z$ .

L'axe imaginaire de la variable  $p$  :  $\sigma = 0 \rightarrow \rho = 1$  correspond au cercle de rayon unité en  $z$ .

Le demi-plan droit de la variable  $p$  :  $\sigma > 0 \rightarrow \rho > 1$  correspond à l'anneau extérieur au cercle unité en  $z$ .

La Bande de Converg. en  $p$ :  $\sigma_1 < \text{Re } p < \sigma_2$  correspond à l'anneau de Converg.:  $e^{\sigma_1 T} < |z| < e^{\sigma_2 T}$  en  $z$ .

Les fréquences  $\nu, \nu+F, \dots, \nu+kF$  où  $F = 1/T$  se retrouvent superposées au même point, du fait de la périodicité de l'exponentielle imaginaire : c'est le repliement des fréquences :



On peut décomposer  $X(z)$  en parties causale et anticausale :

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)z^{-n} = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} x(nT)z^{-n}}_{\text{partie anticausale}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} x(nT)z^{-n}}_{\text{partie causale}}$$

- La partie causale : série entière en  $1/z$ . Elle converge dans un anneau  $|z| > R_1$  : série de Laurent (\*).

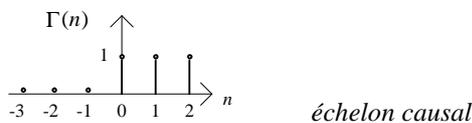
- La partie anticausale : série entière en  $z$ . Elle converge dans un disque  $|z| < R_2$  : série de Taylor.

- L'ensemble, qui n'est ni causal ni anticausal, converge dans l'anneau  $R_1 < |z| < R_2$  (si  $R_1 < R_2$ ).

(\*) Rappel :  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q}$  converge vers  $\frac{1}{1 - q}$  si  $|q| < 1$  et diverge sinon.

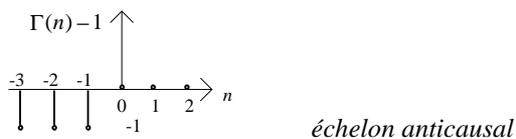
La donnée du domaine de convergence de la Transformée ou, ce qui revient au même, le caractère causal ou non de la séquence, est indispensable pour définir une TZ (de même qu'en Laplace) :

Exemple : Prenons la TZ de  $\Gamma(n)$ , séquence causale, ainsi que la TZ de  $[\Gamma(n) - 1]$ , séquence anticausale :



$$TZ[\Gamma(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-n} + \dots = \text{série géométrique de raison } q = z^{-1}$$

$$TZ[\Gamma(n)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad \text{si } |z^{-1}| < 1 \quad \text{soit : } \boxed{TZ[\Gamma(n)] = \frac{z}{z - 1} \quad \text{si } |z| > 1} \quad \text{et :}$$



$$TZ[\Gamma(n) - 1] = - \sum_{n=-\infty}^{-1} z^{-n} = - \sum_{k=1}^{\infty} z^k = -z(1 + z + z^2 + \dots) = -z \cdot \frac{1}{1 - z} \rightarrow \boxed{TZ[\Gamma(n) - 1] = \frac{z}{z - 1} \quad \text{si } |z| < 1}$$

Dictionnaire :

Opération	Représentation Fréquentielle	Représentation z	Domaine de Convergence D
1. Combinaison linéaire ( $a, b : \mathbb{C}^{\text{tes}}$ complexes)	$u(n) = a x(n) + b y(n)$	$U(z) = a X(z) + b Y(z)$	$D_U = D_X \cap D_Y$
2. Translation temporelle Retard ( $k > 0$ ) ou avance ( $k < 0$ ) (TZ bilatérale) ( <b>pas de CI</b> )	$y(n) = x(n-k)$	$Y(z) = z^{-k} X(z)$	...
3. Retard ( $k > 0$ ) (TZ monolatérale $TZ^+$ notée $X^+$ ) ( <b>avec Conditions Initiales</b> )	$y(n) = x(n-k)$	$Y^+(z) = z^{-k} X^+(z) + \sum_{m=0}^{k-1} x(m-k) z^{-m}$	...
4. Avance ( $k > 0$ ) (TZ monolatérale $TZ^+$ notée $X^+$ ) ( <b>avec Conditions Initiales</b> )	$y(n) = x(n+k)$	$Y^+(z) = z^k X^+(z) - \sum_{m=0}^{k-1} x(m) z^{k-m}$	...
5. « Dérivation » discrète ≡ différence sur un pas dériver ≡ multiplier par $(1 - z^{-1})$ ≡ passe-haut en fréquence	$y(n) = x(n) - x(n-1)$	$Y(z) = X(z) \left( \frac{z-1}{z} \right) = X(z)(1 - z^{-1})$	...
6. « Intégration » discrète ≡ sommation intégrer ≡ diviser par $(1 - z^{-1})$ ≡ passe-bas en fréquence	$y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)$	$Y(z) = X(z) \left( \frac{z}{z-1} \right) = \frac{X(z)}{1 - z^{-1}}$	$D_X \cap \{ z  > 1\}$
7. Convolution	$u(n) = x(n) * y(n)$	$U(z) = X(z) Y(z)$	...
8. Produit	$u(n) = x(n) \cdot y(n)$	$U(z) = X(z) * Y(z)$	...
9. Multiplication par $n$	$y(n) = n x(n)$	$Y(z) = -z \frac{dX(z)}{dz}$	...
10. Inversion du temps (déroulement inverse)	$y(n) = x(-n)$	$Y(z) = X(z^{-1})$	...

Table de Transformées des signaux usuels :

Signal	Représentation Temps	Représentation z	Anneau de convergence $ z $
1. Echelon unité	$x(n) = \Gamma(n)$	$X(z) = \frac{z}{z-1}$	$]1, +\infty[$
2. Impulsion de Dirac discrète	$x(n) = \delta(n)$	$X(z) = 1$	$]0, +\infty[$
3. Exponentielle causale	$x(n) = a^n \Gamma(n)$	$X(z) = \frac{z}{z-a}$	$]  a , +\infty[$

Démonstration de la ligne 2 du dictionnaire :

On donne la relation en utilisant la TZ bilatérale = TZ[ séquence complète  $x_n$  ] =  $X(z)$

$$Y(z) = TZ[y(n) = x(n - k)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n - k)z^{-n} = z^{-k} \sum_{p=-\infty}^{\infty} x(p)z^{-p} = z^{-k} X(z)$$

TZ bilatérale et TZ monolatérale ( $TZ^+$ ) :

L'expression générale du th. du retard (ligne 2 du dictionnaire) n'est pas très exploitable car la  $TZ^1$  qu'il faut ensuite effectuer pour revenir au domaine temporel est mal aisée (pas de possibilité d'utiliser les tables réservées aux séquences causales). On préfère ainsi utiliser la TZ monolatérale (**un signal a toujours un début (et une fin)** donc des CI) :

En utilisant la TZ monolatérale  $TZ^+$  :

On donne la relation en utilisant la  $TZ^+$  [ $x_n$ ] = TZ[ partie causale de la séquence non forcément causale  $x_n$  ] =  $X^+(z)$ .

Utilisées lorsque les Conditions Initiales (CI) ne sont pas nulles, ces formules donnent cependant une TZ incomplète (TZ uniquement de la partie causale de la séquence) et elles utilisent les CI (ceci n'est pas gênant puisque les CI constituent justement la partie manquante de la TZ). (Pour donner directement une TZ complète, la séquence décalée  $y_n$  doit donc être causale). L'intérêt de la  $TZ^+$  est que les tables sont utilisables pour revenir au domaine temporel.

Démonstration de la ligne 3 du dictionnaire :

$$Y^+(z) = TZ^+[y(n) = x(n - k)] = \sum_{n=0}^{\infty} x(n - k)z^{-n} = z^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} x(n - k)z^{-(n-k)} = z^{-k} \sum_{p=-k}^{\infty} x(p)z^{-p}$$

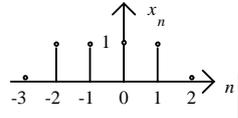
$$Y^+(z) = TZ^+[y(n) = x(n - k)] = z^{-k} \left( \sum_{p=-k}^{-1} x(p)z^{-p} + X^+(z) \right) = z^{-k} X^+(z) + z^{-k} \sum_{p=-k}^{-1} x(p)z^{-p}$$

$$\left\| Y^+(z) = TZ^+[y(n) = x(n - k)] = z^{-k} X^+(z) + \sum_{m=0}^{k-1} x(m - k)z^{-m} \right.$$

Exemple :  $k = 1$  :  $Y^+(z) = TZ^+[y(n) = x(n - 1)] = z^{-1} X^+(z) + x(-1)$

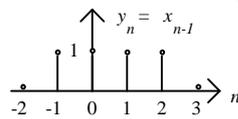
$k = 2$  :  $Y^+(z) = TZ^+[y(n) = x(n - 2)] = z^{-2} X^+(z) + x(-2) + x(-1)z^{-1}$

Illustration : Soit la séquence  $x_n$  :



$$X(z) = z^2 + z + 1 + z^{-1}$$

$$X^+(z) = 1 + z^{-1}$$

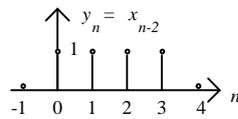


$$Y(z) = z + 1 + z^{-1} + z^{-2} = z + Y^+(z)$$

$$Y^+(z) = z^{-1} X^+(z) + x(-1) = z^{-1} + z^{-2} + 1$$

Th. général du retard:  $Y(z) = z^{-1} X(z)$

$Y^+(z) \neq Y(z)$  car la séq.  $y_n$  est non causale



$$Y(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} = Y^+(z)$$

$$Y^+(z) = z^{-2} X^+(z) + x(-2) + x(-1)z^{-1} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}$$

Th. général du retard:  $Y(z) = z^{-2} X(z)$   $Y^+(z) = Y(z)$  car la séquence  $y_n$  est causale

Démonstration de la ligne 4 du dictionnaire :

$$Y^+(z) = TZ^+[y(n) = x(n + k)] = \sum_{n=0}^{\infty} x(n + k)z^{-n} = z^k \sum_{n=0}^{\infty} x(n + k)z^{-(n+k)} = z^k \sum_{p=k}^{\infty} x(p)z^{-p}$$

$$Y^+(z) = TZ^+[y(n) = x(n + k)] = z^k \left( X^+(z) - \sum_{p=0}^{k-1} x(p)z^{-p} \right) = z^k X^+(z) - z^k \sum_{p=0}^{k-1} x(p)z^{-p}$$

$$\left\| Y^+(z) = TZ^+[y(n) = x(n + k)] = z^k X^+(z) - \sum_{m=0}^{k-1} x(m)z^{k-m} \right.$$

Exemple:  $k = 1$  :  $Y^+(z) = TZ^+[y(n) = x(n + 1)] = zX^+(z) - zx(0)$

$k = 2$  :  $Y^+(z) = TZ^+[y(n) = x(n + 2)] = z^2 X^+(z) - z^2 x(0) - zx(1)$

- Notes :

- Pour les signaux à TD, la TZ est la Représentation Fréquentielle la plus adaptée et la plus utilisée.

- La TZ modifiée  $X(z,m)$ , variante paramétrée ( $m$ ) de la TZ, est peu utilisée. Elle présente par rapport à la TZ l'avantage de connaître la séquence  $x(n)$  non seulement aux instants discrets  $n$ , mais également entre les instants d'échantillonnage (donc à tout instant) du fait de l'interpolation à l'aide du paramètre  $m$ . Avec des fréquences d'échantillonnage élevées, la TZ modifiée perd de son intérêt.

- De la même façon que la TF des signaux à TC peut s'utiliser pour les signaux à TD en transformant les signaux à TD en signaux à TC, on peut utiliser la TZ pour les signaux à TC en les échantillonnant.

- Le produit de convolution ayant pour transformée un produit simple :

$$f(k) = x(k) * y(k) \xrightarrow{TZ} F(z) = X(z)Y(z)$$

la convolution se voit en  $z$  comme un produit de polynômes, et la déconvolution comme une division de polynômes.

### Inversion de la TZ $X(z)$ d'une séquence $x(n)$ :

#### (1) Inversion par utilisation directe des tables après une éventuelle décomposition en éléments simples

Même chose que pour la TL ou la TF (cf. tables de transformées en  $z$ ).

Les tables étant faites pour des fonctions causales, cette méthode n'est utilisable directement que si on recherche une séquence causale.

Si on recherche une séquence non causale, les tables pour fonctions causales peuvent néanmoins être utilisées mais en faisant jouer le renversement du temps :

Rappel : propriété du dictionnaire : si  $x(n) \xrightarrow{TZ} X(z)$  alors  $y(n) = x(-n) \xrightarrow{TZ} Y(z) = X(z^{-1})$  :

Soit  $X(z)$  la fonction à inverser, on forme  $Y(z) = X(z^{-1})$  et on utilise les tables pour déterminer

$$y(n) = TZ^{-1}[Y(z)], \text{ puis on obtient enfin } x(n) = y(-n).$$

#### (2) Inversion par décomposition en série de Taylor ou de Laurent

- Si  $X(z)$  est donné avec un domaine de convergence du type  $|z| > R_1$  (cas le plus courant),  $x(n)$  est alors causal (sauf en présence de termes de retard), et il suffit alors de décomposer  $X(z)$  en série de Laurent (série en  $1/z$ ). En identifiant avec la définition de la TZ, on obtient la séquence  $x(n)$ .

- Si le domaine est du type  $|z| < R_2$ ,  $X(z)$  est décomposé en série de Taylor (série en  $z$ ), pour donner la séquence anticausale (sauf en présence de termes d'avance)  $x(n)$ .

- Si le domaine n'est pas précisé, il y a indétermination pour la séquence  $x(n)$ , mais on recherchera plutôt une séquence causale (ce qui fixe le domaine de convergence comme du type  $|z| < R_2$ ) car c'est la classe de signaux la plus courante.

Exemple : 
$$X(z) = \frac{z}{z-1}$$

Si une séquence causale est recherchée, on décompose  $X(z)$  en série de Laurent :

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = TZ[\Gamma(n)] \quad (\text{converge pour } |z| > 1)$$

Si une séquence anticausale est recherchée, on décompose  $X(z)$  en série de Taylor :

$$X(z) = -z \cdot \frac{1}{1-z} = -z(1 + z + z^2 + \dots) = -\sum_{n=-\infty}^{-1} z^{-n} = TZ[\Gamma(n) - 1] \quad (\text{converge pour } |z| < 1)$$

(3) Inversion par la méthode des Résidus

Rappel : Théorème de Cauchy :  $\int_{C^+} z^n dz = i2\pi \delta_{n,-1}$

c'est-à-dire :  $\int_{C^+} z^n dz = i2\pi$  si  $n = -1$ ,  $= 0$  sinon

avec  $n$  entier relatif et  $C^+$  cercle de rayon quelconque et de centre 0 parcouru dans le sens trigonométrique.

Considérons l'équation de définition de la TZ :  $X(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)z^{-m}$

Multiplions les 2 membres par  $z^{n-1}$  et intégrons sur  $C^+$  inclus dans l'anneau  $(R_1, R_2)$  de convergence de  $X(z)$ . D'après le théorème de Cauchy, tous les termes auront une contribution nulle sauf pour  $m = n$  et on a :

$$x(n) = \frac{1}{i2\pi} \int_{C^+} X(z)z^{n-1} dz$$

Comme pour la TL cette formule d'inversion est rarement employée (intégrale de variable complexe).

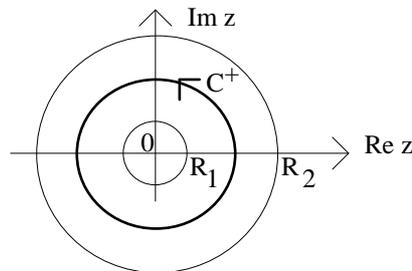
Le théorème des résidus donne immédiatement une autre expression de  $x(n)$  :

Théorème des Résidus :  $\int_{C^+} z^{n-1} X(z) dz = i2\pi \sum_{p_i} \text{Residus de } z^{n-1} X(z)$   
 $p_i$  étant les pôles de  $z^{n-1} \cdot X(z)$  intérieurs à  $C^+$ .

d'où :  $x(n) = \sum_{p_i} \text{Residus de } z^{n-1} X(z)$  avec :

$p_i$  : pôles de  $z^{n-1} \cdot X(z)$  intérieurs à  $C^+$ .

$C^+$  : cercle quelconque de centre 0 parcouru dans le sens trigonométrique et inclus dans l'anneau de convergence de  $X(z)$ .



Comme on peut prendre  $C^+$  quelconque à l'intérieur de l'anneau de convergence  $(R_1, R_2)$ , il suffit en fait de sommer sur les pôles intérieurs au cercle de rayon  $R_1$ .

On obtient les résidus par la même formule que pour la décomposition en éléments simples :

- pour un pôle simple  $p_j$  :  $\text{Res}_{p_j} = \lim_{z \rightarrow p_j} (z - p_j) z^{n-1} X(z)$

- pour un pôle multiple  $p_0$  d'ordre ( $\equiv$  de multiplicité)  $k$  :  $\text{Res}_{p_0} = \lim_{z \rightarrow p_0} \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z - p_0)^k z^{n-1} X(z)]$

**(4) Inversion par division de polynômes suivant les puissances croissantes de  $z^{-1}$**

dans le cas d'une convergence du type  $|z| > R_1$  ( $\equiv$  séquence causale)

(Si la séquence est anticausale, on divise suivant les puissances croissantes de  $z$ )

Cette méthode est utilisable très généralement, une fonction  $X(z)$  s'exprimant le plus souvent comme un rapport de deux polynômes en  $z$ .

Contrairement aux autres méthodes d'inversion, la séquence  $x(n)$  est ici récupérée échantillon par échantillon, et pour avoir une expression analytique de  $x(n)$  ( $\equiv$  expression non récursive du terme général de  $x(n)$ ), donc en fonction de  $n$  uniquement), il faut trouver une récurrence, ce qui n'est pas toujours évident.

Cette technique est facilement programmable sur calculateur: ( $x(n)$  est ici noté plus simplement  $x_n$ )

Algorithme récursif : Soit à inverser : 
$$X(z) = \frac{\sum_{i=0}^m a_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^k b_i z^{-i}} = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} \quad (x_n \text{ causale})$$

$$\rightarrow \sum_{i=0}^k b_i z^{-i} X(z) = \sum_{i=0}^m a_i z^{-i} \xrightarrow{TZ^{-1}} \sum_{i=0}^k b_i x_{n-i} = \sum_{i=0}^m a_i \delta_{n-i} \rightarrow x_n = \frac{1}{b_0} \left[ \sum_{i=0}^m a_i \delta_{n-i} - \sum_{i=1}^k b_i x_{n-i} \right]$$

soit : 
$$x_n = \frac{1}{b_0} \left[ a_n - \sum_{i=1}^k b_i x_{n-i} \right] \xrightarrow{x(n) \text{ causale}} \boxed{x_n = \frac{1}{b_0} \left[ a_n - \sum_{i=1}^k b_i x_{n-i} \right]}$$
 Terme général récursif

Exemple : 
$$X(z) = \frac{z}{z-1}$$

Si une séquence causale est recherchée, on divise les polynômes de  $X(z)$  ordonnés suivant les puissances croissantes de  $z^{-1}$  :

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = TZ[\Gamma(n)] \quad (\text{converge pour } |z| > 1)$$

Si une séquence anticausale est recherchée, on divise les polynômes de  $X(z)$  ordonnés suivant les puissances croissantes de  $z$  :

$$X(z) = -\frac{z}{1-z} = -(z + z^2 + z^3 + \dots) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} z^{-n} = TZ[\Gamma(n) - 1] \quad (\text{converge pour } |z| < 1)$$

**(5) Inversion par équation aux différences**

Lorsque  $X(z)$  est impliqué dans un rapport : 
$$\frac{X(z)}{U(z)} = \frac{\sum_{i=0}^m a_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^k b_i z^{-i}}$$

On aboutit à une équation aux différences récursive facilement programmable, en inversant, par l'utilisation du dictionnaire de la TZ (formule de retard), l'expression précédente développée en produit croisé :

$$X(z) \cdot \sum_{i=0}^k b_i z^{-i} = U(z) \cdot \sum_{i=0}^m a_i z^{-i} \xrightarrow{TZ^{-1}} \sum_{i=0}^k b_i x(n-i) = \sum_{i=0}^m a_i u(n-i)$$

**Détermination de l'expression non récursive (≡ analytique) d'une séquence récursive  $x(n)$  de FT  $X(z)$  :**

- D'après la donnée de  $x(n)$  :
  - Transformer  $x(n)$  récursive en non récursive et faire apparaître si-possible une récurrence.
  - ou :
  - Calculer la TZ  $X(z)$  de  $x(n)$  et obtenir  $x(n)$  par  $TZ^{-1}$  de  $X(z)$ .
- D'après la donnée de  $X(z)$  :
  - Par division de polynômes : la séquence  $x(n)$  étant obtenue récursivement, c'est-à-dire échantillon par échantillon, pour avoir  $x(n)$  en fonction de  $n$  seulement, il faut faire apparaître une récurrence.
  - ou :
  - Par la méthode des résidus.
  - ou :
  - Par l'utilisation des tables après une éventuelle décomposition en éléments simples de  $X(z)$ .  
(Attention : les tables ont été constituées pour des séquences causales, séquences les plus courantes. l'inversion d'une fonction  $X(z)$  par les tables donne donc une séquence  $x(n)$  causale).
  - ou :
  - Par décomposition de  $X(z)$  en série de Taylor ou de Laurent.

**Propriétés de la TZ :**

(1) *TL et TZ* : On obtient la TL (discrète) d'une séquence  $x(n)$  (resp.  $x(nT)$ ) par passage TZ - TL :

$$X(p) = X(z = e^p) \quad (\text{resp. } X(p) = X(z = e^{pT})) \quad \leftrightarrow \quad z = e^p \quad (\text{resp. } z = e^{pT})$$

(2) *TF et TZ* : On obtient la TF (discrète) d'une séquence  $x(n)$  (resp.  $x(nT)$ ) par passage TZ - TF :

$$X(\nu) = X(z = e^{i2\pi\nu}) \quad (\text{resp. } X(\nu) = X(z = e^{i2\pi\nu T})) \quad \leftrightarrow \quad z = e^{i2\pi\nu} \quad (\text{resp. } z = e^{i2\pi\nu T})$$

Le spectre (TF) d'une séquence  $x(n)$  (resp.  $x(nT)$ ) est donc périodique de période  $\nu = 1$  (resp.  $\nu = 1/T$ )

et doit de ce fait être interprété dans la bande de fréquences  $-\frac{1}{2} \leq \nu \leq \frac{1}{2}$  (resp.  $-\frac{1}{2T} \leq \nu \leq \frac{1}{2T}$ ).

(3) *Linéarité.*

(4)  $X(z)$  est généralement complexe même si  $x(n)$  ( $x(nT)$ ) est réel.

(5) *Théorème de la valeur initiale (pour une séquence causale) :*

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \dots \quad \rightarrow \quad \left\| x(n=0) = \lim_{z \rightarrow +\infty} X(z) \right.$$

(6) *Théorème de la valeur finale (pour une séquence  $x(n)$  nulle en  $n = -\infty$ ) :*

$$\left\| x(n = +\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)X(z) \right.$$

*Dém. :* Soit  $\{x(n)\}$  une séquence et  $\{y(n)\}$  la séquence définie par :  $y(n) = x(n+1) - x(n)$  avec  $\{x(n)\}$  telle que  $\{y(n)\}$  soit sommable en valeur absolue.

On a, d'après la définition de la TZ : 
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n) = \lim_{z \rightarrow 1} Y(z)$$

D'après le théorème du retard : 
$$Y(z) = zX(z) - X(z)$$

A cause des éliminations successives : 
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n) = x(n = +\infty) - x(n = -\infty)$$

d'où, si  $x(n = -\infty) = 0$ , on a : 
$$x(n = +\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) X(z)$$

(7) *Théorème de Parseval :*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{i2\pi} \int_{C^+} X(z)X^*(1/z)z^{-1} dz \quad \text{avec : } X^* : \text{conjugué de } X .$$

Plus généralement : 
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y^*(k) = \frac{1}{i2\pi} \int_{C^+} X(z)Y^*(z^{-1})z^{-1} dz$$

Dans le cas particulier :  $x(k) = y(k)$ , on obtient l'énergie  $E_x$  du signal  $x(k)$  :

$$E_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)|^2 = \frac{1}{i2\pi} \int_{C^+} X(z)X^*(z^{-1})z^{-1} dz$$

(8) *Correspondance bi-univoque entre  $x(n)$  et  $X(z)$  (domaine de convergence précisé).*

(9) *Transformée en  $z$  de la fonction de corrélation :*  $TZ[\varphi_{xy}(n)] = X(z^{-1})Y(z)$

$$\begin{aligned} TZ[\varphi_{xy}(n)] &= TZ\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(k+n)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(k+n)\right] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(k+n)\right] z^{-(n+k)} z^k \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^k y(k+n)z^{-(n+k)}\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^k y(u)z^{-u} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^k \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(u)z^{-u} = X(z^{-1})Y(z) \end{aligned}$$

**ANNEXE**

**Tables des principales Transformées en  $z$   
Correspondance avec les Transformées de Laplace**

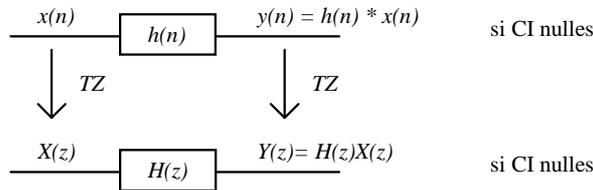
TABLE DES TRANSFORMEES EN Z ET DE LAPLACE (FONCTIONS CAUSALES)				
$X(s)$ $\xleftarrow{TL}$	$x(t)$	$\text{---/---}$ $x(kT)$ ou $x(k)$	$\xrightarrow{tz}$	$X(z)$ $\xleftarrow{Z} x(s)$
1	1	$\delta(t)$	delta Kronecker: $\delta(kT)=1$ si $k=0$ , 0 sinon	1
2	$e^{-\tau s}$	Retard: $\delta(t-\tau)$	$\delta[(k-m)T] = 1$ si $k = m$ , 0 sinon	$z^{-m}$
3	$\frac{1}{s}$	Echelon $\Gamma(t)$ noté aussi $1(t)$	$\Gamma(kT)$ noté aussi $1(kT)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$
4	$\frac{1}{s+a}$	$e^{-at}$	$e^{-akT}$	$\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$
5	$\frac{1}{s^2}$	$t$	$kT$	$\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$
6	$\frac{2}{s^3}$	$t^2$	$(kT)^2$	$\frac{T^2z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$
7	$\frac{6}{s^4}$	$t^3$	$(kT)^3$	$\frac{T^3z^{-1}(1+4z^{-1}+z^{-2})}{(1-z^{-1})^4}$
8	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$1-e^{-akT}$	$\frac{(1-e^{-aT})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{-aT}z^{-1})}$
9	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$e^{-at} - e^{-bt}$	$e^{-akT} - e^{-bkT}$	$\frac{(e^{-aT} - e^{-bT})z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})(1-e^{-bT}z^{-1})}$
10	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$te^{-at}$	$kTe^{-akT}$	$\frac{Te^{-aT}z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})^2}$
11	$\frac{s}{(s+a)^2}$	$(1-at)e^{-at}$	$(1-akT)e^{-akT}$	$\frac{1-(1+aT)e^{-aT}z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})^2}$
12	$\frac{2}{(s+a)^3}$	$t^2e^{-at}$	$(kT)^2e^{-akT}$	$\frac{T^2e^{-aT}(1+e^{-aT}z^{-1})z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})^3}$
13	$\frac{a^2}{s^2(s+a)}$	$at-1+e^{-at}$	$akT-1+e^{-akT}$	$\frac{[(aT-1+e^{-aT})+(1-e^{-aT}-aTe^{-aT})z^{-1}]z^{-1}}{(1-z^{-1})^2(1-e^{-aT}z^{-1})}$
14	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin \omega t$	$\sin \omega kT$	$\frac{z^{-1} \sin \omega T}{1-2z^{-1} \cos \omega T + z^{-2}}$
15	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos \omega t$	$\cos \omega kT$	$\frac{1-z^{-1} \cos \omega T}{1-2z^{-1} \cos \omega T + z^{-2}}$
16	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at} \sin \omega t$	$e^{-akT} \sin \omega kT$	$\frac{e^{-aT}z^{-1} \sin \omega T}{1-2e^{-aT}z^{-1} \cos \omega T + e^{-2aT}z^{-2}}$
17	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at} \cos \omega t$	$e^{-akT} \cos \omega kT$	$\frac{1-e^{-aT}z^{-1} \cos \omega T}{1-2e^{-aT}z^{-1} \cos \omega T + e^{-2aT}z^{-2}}$
18	...	...	$a^k \cos k\pi = (-1)^k a^k = (-a)^k$	$\frac{1}{1+az^{-1}}$
19	...	...	$a^k$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$

	$X(s) \xleftarrow{TL}$	$x(t)$	$\text{---/---} \quad x(kT) \text{ ou } x(k)$	$\xrightarrow{TZ}$ $X(z) \xleftarrow{Z} X(s)$
20	...	...	$a^{k-1} \quad k = 1,2,3\dots$	$\frac{z^{-1}}{1 - az^{-1}}$
21	...	...	$ka^{k-1}$	$\frac{z^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$
22	...	...	$k^2 a^{k-1}$	$\frac{z^{-1}(1 + az^{-1})}{(1 - az^{-1})^3}$
23	...	...	$k^3 a^{k-1}$	$\frac{z^{-1}(1 + 4az^{-1} + a^2 z^{-2})}{(1 - az^{-1})^4}$
24	...	...	$k^4 a^{k-1}$	$\frac{z^{-1}(1 + 11az^{-1} + 11a^2 z^{-2} + a^3 z^{-3})}{(1 - az^{-1})^5}$
25	$\frac{1}{s(1 + \tau s)^2}$	$1 - \left(1 + \frac{t}{\tau}\right) e^{-\frac{t}{\tau}}$	$1 - \left(1 + \frac{kT}{\tau}\right) e^{-\frac{kT}{\tau}}$	$\frac{ze^{-T/\tau} \left[ z \left( -1 + e^{T/\tau} - \frac{T}{\tau} \right) - 1 + e^{-T/\tau} + \frac{T}{\tau} \right]}{(z-1)(z - e^{-T/\tau})^2}$
26	$\frac{1}{1 + \frac{2m}{\omega_0} s + \frac{s^2}{\omega_0^2}}$ Cas $0 < m < 1$	$\frac{\omega_0}{D} e^{-m\omega_0 t} \sin \omega_0' t$ avec : $D = \sqrt{1 - m^2}$ $\omega_0' = \omega_0 \sqrt{1 - m^2}$	...	$\frac{\omega_0}{D} \frac{ze^{-m\omega_0 T} \sin(\omega_0' T)}{z^2 - 2ze^{-m\omega_0 T} \cos(\omega_0' T) + e^{-2m\omega_0 T}}$
27	$\frac{1}{s \left( 1 + \frac{2m}{\omega_0} s + \frac{s^2}{\omega_0^2} \right)}$ Cas $0 < m < 1$	$1 - \frac{1}{D} E \sin(\omega_0' t + \psi)$ avec : $D = \sqrt{1 - m^2}$ $E = e^{-m\omega_0 t}$ $\omega_0' = \omega_0 \sqrt{1 - m^2}$ $\psi = \text{Arc cos } m$	...	$\frac{z}{z-1} - \frac{1}{D} \cdot \frac{Dz^2 + e^{-m\omega_0 T} \sin(\omega_0' T - \psi)z}{z^2 - 2ze^{-m\omega_0 T} \cos(\omega_0' T) + e^{-2m\omega_0 T}}$

## II. Représentations Fréquentielles des Systèmes à TD

### 1. Représentations Fréquentielles

#### 1.1. Représentation Fréquentielle z des Systèmes à TD : Fonction de Transfert



avec :  $H(z) = TZ[h(n)]$  (ou :  $H(z) = TZ[h(nT)]$ ) : **Fonction de Transfert (FT)** du SLTI :  $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$

Comme la RI  $h(n)$  (hors CI), la FT  $H(z)$  caractérise complètement (hors CI) le SLTI à TD.

La FT (comme la RI) n'a de sens que si le système est linéaire (la TZ est linéaire).

Si le système est stationnaire: la FT  $H(z)$  ne dépend pas du temps, la RI  $h(n)$  ne dépend que du temps  $n$ .

S'il n'est pas stationnaire: la FT  $H(z,n)$  dépend du temps, la RI  $h(n,k)$  dépend du temps  $n$  et de l'origine des temps  $k$  (double dépendance temporelle)

- *Dualité Temps-Fréquence* :

Temps	Fréquence
- RI : $h(n)$	$\Leftrightarrow$ - FT : $H(z)$
- SLTI	$\Leftrightarrow$ - Filtre linéaire
- STI	$\Leftrightarrow$ - Filtre
- Relation Entrée-Sortie : Convolution	$\Leftrightarrow$ - Relation Entrée-Sortie : Produit
- Relation Entrée-Sortie d'un SLTI	$\Leftrightarrow$ - $H(z)$ est une fraction rationnelle (fractionnelle) en $z$
Equation aux différences linéaire à coeff constants (à coeff constants $\equiv$ stationnaire)	$\equiv$ Quotient de 2 polynômes en $z$ : (CI) nulles
( avec Conditions Initiales (CI) supposées nulles )	
$\sum_{i=0}^p b_i y(n-i) = \sum_{i=0}^m a_i x(n-i)$	$\xrightarrow{TZ} H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^m a_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^p b_i z^{-i}}$

- *Application* :

La TZ monolatérale se prête très bien à la détermination de la réponse d'un système à TD à un signal à TD par utilisation de la FT du système.

### 2. Ordre d'un Système à TD

C'est la valeur absolue de la différence entre le degré du polynôme dénominateur et celui du polynôme numérateur de la FT (généralement fractionnelle) de la variable  $z$ .

L'ordre, qui n'est défini que pour un système de FT fractionnelle, représente donc la valeur absolue de la différence entre le nombre de pôles et le nombre de zéros de la FT du système.

### 3. Stabilité d'un Système à TD

- Temps :

La définition « à entrée bornée, sortie bornée » (EBSB), donne une condition nécessaire et suffisante de

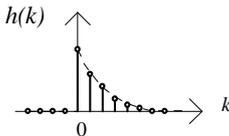
stabilité pour un SLTI :  $\text{Système stable} \Leftrightarrow \text{EBSB} \Leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$

Il en découle que la RI d'un système stable vérifie :

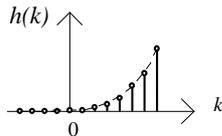
$\text{Système causal stable} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} h(k) = 0$        $\text{Système non causal stable} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow -\infty} h(k) = 0$

Exemples :

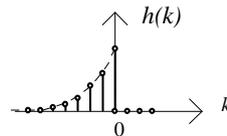
Système causal stable



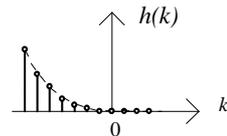
Système causal instable



Système non causal stable



Système non causal instable



Démonstration de la CNS :  $\text{EBSB} \Leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$  (1)

Condition suffisante :  $\text{EBSB} \Leftarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$

Si (1) est vraie alors  $x(n)$  bornée implique  $y(n)$  bornée; en effet :  $|x(n)| < N$  implique  $|y(n)| < M$  :

$$|y(n)| = \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k) \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| \cdot N < \infty$$

Condition nécessaire :  $\text{EBSB} \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$  (On rappelle que l'implication  $a \Rightarrow b$  est équivalente à  $\bar{b} \Rightarrow \bar{a}$ )

Il suffit de montrer que si (1) est fausse, il existe une séquence bornée  $x(n)$  qui provoque  $y(n) = \infty$  :

(1) fausse :  $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)| = \infty$       Soit alors  $x(n)$  telle que :  $x(n) = \begin{cases} +1 & \text{si } h(-n) > 0 \\ -1 & \text{si } h(-n) < 0 \\ 0 & \text{si } h(-n) = 0 \end{cases}$

Un telle séquence  $x(n)$  est évidemment bornée. Montrons alors que  $y(0)$  est infini :

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k) \quad \text{soit pour } n=0 : y(0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(-k) \quad \text{donc : } y(0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)| = \infty$$

- Fréquence :

Traduite en fréquence, cette CNS devient :

**Pour qu'un système de FT  $H(z)$  soit stable, une CNS est que tous les pôles de  $H(z)$  aient un module inférieur à 1, pour un système causal (le cas = 1 est un cas limite) (cf. dém. pour les systèmes à TC).**

(Pour un système anticausal ( $\equiv$  système de RI nulle pour  $n > 0$ ), la CNS de stabilité serait que les pôles de  $H(z)$  soient à module supérieur à 1).

Comme à TC, la CNS de stabilité peut tout aussi bien s'appliquer aux signaux : pour qu'un signal  $x(kT)$  ne tende pas vers l'infini lorsque  $k \rightarrow \infty$ , il faut et il suffit que les pôles de sa FT  $X(z)$  aient un module  $\leq 1$ .

Exemple : TZ de l'échelon :  $TZ[\Gamma(kT)] = \frac{1}{1-z^{-1}}$

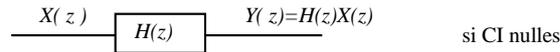
Remarque : Pour un système causal à TC, on a vu que la CNS de stabilité est que tous les pôles soient à partie réelle négative, ce qui entraîne bien, pour un système causal à TD, que les pôles aient un module inférieur à 1, du fait de la relation de passage TC  $\rightarrow$  TD :  $z = e^{pT}$  (séquence échantillonnée) :

$$p = a + jb \rightarrow z = \underset{\text{module}}{e^{aT}} \cdot \underset{\text{phase}}{e^{jbT}} \quad \text{et} \quad \text{Re}(p) < 0 \rightarrow a < 0 \rightarrow |z| = e^{aT} < 1$$

(le demi-plan gauche de Laplace correspond au disque de rayon inférieur à 1).

### 4. Réponse Fréquentielle d'un Système à TD

On l'appelle aussi Réponse Harmonique (≡ en régime Harmonique, c'est-à-dire sinusoïdal).



La Réponse Fréquentielle (RF) d'un système à TD s'obtient en faisant  $z = e^{pT}$  ou  $z = e^p$  selon que  $x = x(nT)$  ou  $x(n)$ .

On la note  $H(\nu)$ , car on a, en utilisant le fait que  $p = i2\pi\nu$  en régime harmonique :

$$H(\nu) = H(z = e^{pT}) = H(e^{i2\pi\nu T}) \quad (1) \quad \text{pour une séquence échantillonnée (à la période } T) x(nT).$$

$$H(\nu) = H(z = e^p) = H(e^{i2\pi\nu}) \quad (2) \quad \text{pour une séquence discrète } x(n).$$

La Réponse en Fréquence  $H(\nu)$  d'un système à TD est **périodique**, de période  $\nu = \frac{1}{T}$  (1) ou  $\nu = 1$  (2)

traduisant ainsi le **repliement des fréquences** pour un système à TD.

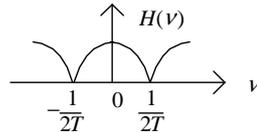
#### Interprétation

Elle est à observer sur un intervalle temporel de longueur  $1/T$  (1) (resp. de longueur 1 (2)) en n'oubliant pas les fréquences  $< 0$  propres à la Représentation Fréquentielle.

$$H(e^{i2\pi\nu T}) \text{ est donc à observer sur l'intervalle } \left[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}\right] \quad (1) \text{ et à interpréter } (\nu \geq 0) \text{ sur } \left[0, \frac{1}{2T}\right]$$

$$(H(e^{i2\pi\nu}) \text{ est à observer sur l'intervalle } \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \quad (2) \text{ et à interpréter } (\nu \geq 0) \text{ sur } \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

Exemple : séquence RI  $h(nT)$  de FT  $H(\nu)$



La fréquence numérique  $\nu = 0$  correspond à la fréquence analogique  $\nu = 0$ .

La fréquence numérique  $\nu = \frac{1}{2T}$  dans la RF d'un signal à TD doit être interprétée comme la fréquence analogique  $\nu = \infty$  de la RF d'un signal à TC pour déterminer le gabarit du filtre linéaire : en effet, la RF analogique non périodique peut être vue comme périodique de période infinie. Dans cet exemple, le filtre numérique de FT  $H(z)$  est donc de type *passé-bas*.

### 5. Système à TD à phase linéaire

$$\text{Phase } \varphi = \text{Arg}[H(\nu)] = \text{Arg}[H(z = e^{i2\pi\nu T})] \text{ (séqu. échantil.) ou } \text{Arg}[H(z = e^{i2\pi\nu})] \text{ (séqu. discrète)}$$

Un système de FT  $H(z)$  est à phase linéaire si la phase de la RF, soit :  $\varphi = \text{Arg}[H(z = e^{i2\pi\nu T})]$  (ou

$$\text{Arg}[H(z = e^{i2\pi\nu})]) \text{ est une fonction linéaire de la fréquence } \nu : \quad \varphi = \text{Arg}[H(\nu)] = \theta\nu \text{ avec } \theta = C^{te}.$$

Un filtre à phase linéaire a pour propriété de retarder tous les signaux d'un même retard quelsoit leur fréquence :

Soit  $\Phi$  un filtre linéaire excité par un signal sinusoïdal de fréquence  $\nu$ .  $\Phi$  étant linéaire et stationnaire, sa sortie est une sinusoïde atténuée (ou amplifiée) et retardée (de  $nT$ ) (≡ déphasée de  $\varphi = 2\pi\nu nT$ ) par rapport au signal d'entrée. En excitant  $\Phi$  successivement par 2 signaux sinusoïdaux de fréquence  $\nu_1$  et  $\nu_2$ , on a :

$$x_1(kT) = A \sin(2\pi\nu_1 kT) \quad \boxed{\Phi} \quad y_1(kT) = A'_1 \sin(2\pi\nu_1 kT - \varphi_1) = A'_1 \sin[2\pi\nu_1 (k - n_1)T]$$

$$x_2(kT) = A \sin(2\pi\nu_2 kT) \quad \boxed{\Phi} \quad y_2(kT) = A'_2 \sin(2\pi\nu_2 kT - \varphi_2) = A'_2 \sin[2\pi\nu_2 (k - n_2)T]$$

Si le filtre est à phase linéaire, on a :  $\varphi_1 = \theta\nu_1$  et  $\varphi_2 = \theta\nu_2$  d'où :

$$y_1(kT) = A'_1 \sin(2\pi\nu_1 kT - \theta\nu_1) = A'_1 \sin[2\pi\nu_1 (k - n)T]$$

$$y_2(kT) = A'_2 \sin(2\pi\nu_2 kT - \theta\nu_2) = A'_2 \sin[2\pi\nu_2 (k - n)T]$$

Les 2 signaux de fréquence  $\nu_1$  et  $\nu_2$  sont retardés du même temps  $nT = \frac{\theta}{2\pi}$ .

### 6. Système à TD à phase minimale

Un système de FT  $H(z)$  est dit à phase minimale si tous les zéros de  $H(z)$  ont un module inférieur à 1, pour un système causal.

Les systèmes physiques étant généralement à retard de phase (temps de calcul du filtre), un déphasage  $\varphi$  minimal indique un retard  $\tau$  minimal engendré par le filtre.

Un filtre à déphasage minimal a donc pour propriété de limiter le retard occasionné par la traversée du filtre (l'introduction d'un zéro de module  $> 1$  dans la FT du filtre ralentirait le filtre).

*Déphasage minimal  $\equiv$  retard minimal*

Un zéro de module  $> 1$  de la FT  $H(z)$  d'un filtre linéaire (encore appelé abusivement zéro « instable » par analogie avec le critère de stabilité) provoque un retard ( $\equiv$  un déphasage) supplémentaire lors de la traversée du filtre :

Soit  $H(z)$  un système comportant un zéro « instable » :  $H(z) = (z - z_0)G(z)$

On a vu pour un système causal à TC, qu'un zéro « instable » ( $\equiv \text{Re}(p_0) > 0$ ) accroît le déphasage de la FT:

$$H(p) = (p - p_0)G(p)$$

Du fait de la relation de passage TC  $\rightarrow$  TD :  $z = e^{pT}$  (séquence échantillonnée), on a bien :

$$p_0 = a + jb \rightarrow z_0 = \underset{\text{module}}{e^{aT}} \cdot \underset{\text{phase}}{e^{jbT}} \text{ et } \text{Re}(p_0) > 0 \rightarrow a > 0 \rightarrow |z_0| = e^{aT} > 1.$$

Un zéro « instable » accroît le déphasage de  $\varphi (= \omega \tau = 2\pi \nu \tau) = \pi$  et inflige donc un retard supplémentaire de  $\tau = \pi / \omega$  à un signal d'entrée sinusoïdal de pulsation  $\omega$ .

On peut remarquer que si on veut accroître la rapidité d'un filtre (diminuer son temps de réponse), il faut lui procurer une avance de phase. Un retard de phase ralentit un filtre.

### 7. Système à TD à retard pur

Le dictionnaire donne immédiatement la traduction d'un retard temporel  $\tau$  en fréquentiel :

$$\text{Si } f(kT) \xrightarrow{TZ} F(z) \text{ alors } f[(k - m)T] \xrightarrow{TZ} z^{-m} \cdot F(z)$$

Un facteur  $z^{-m}$  dans une fonction  $H(z)$  indique un retard de  $m$  échantillons de la séquence  $TZ^{-1}[H(z)]$  donc un retard d'un temps  $\tau = mT$  pour une séquence échantillonnée  $h(kT) = TZ^{-1}[H(z)]$ .

### 8. Réponse indicielle d'un système à TD

La réponse indicielle, c'est-à-dire la réponse  $r(n)$  au signal échelon  $x(n) = \Gamma(n)$ , a pour TZ :

$$R(z) = H(z) \cdot \frac{z}{z-1} \text{ si le système a pour FT } H(z) \text{ (la TZ de } \Gamma(n) \text{ est } \frac{z}{z-1} \text{)}.$$

Le théorème de la valeur finale :  $\lim_{n \rightarrow \infty} r(n) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)R(z)$  donne :  $\lim_{n \rightarrow \infty} r(n) = H(1)$  :

le régime permanent de la réponse indicielle :  $\lim_{n \rightarrow \infty} r(n)$  est égal à la valeur de la FT  $H(z)$  en  $z = 1$ .

Une autre façon d'établir ce résultat est d'exprimer directement  $H(1)$  à partir de la définition de la TZ :

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n} \rightarrow H(1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) \text{ où } h(n) \text{ est la RI du système.}$$

La réponse indicielle  $r(n)$  s'obtient par la relation de convolution :

$$r(n) = h(n) * \Gamma(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k)\Gamma(k) = \sum_{k=0}^{\infty} h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^n h(k)$$

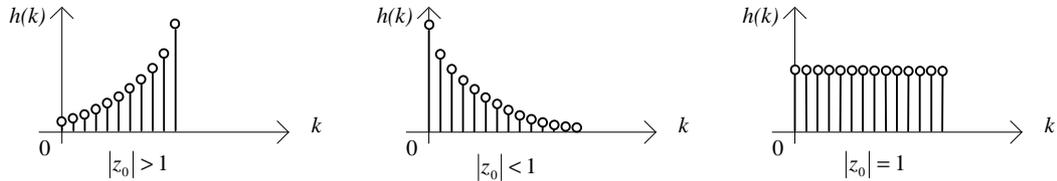
Le régime permanent de la réponse indicielle  $r_{rp}(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} r(n)$  est donc égal à  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) = H(1)$ .

### 9. Modes d'un Système à TD

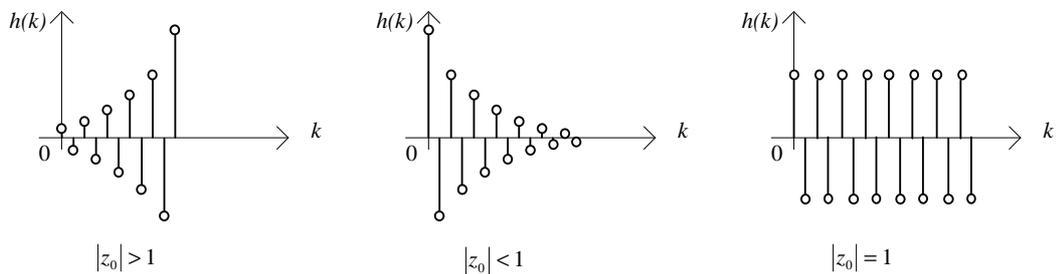
Un mode est la RI d'un système élémentaire canonique ( $\equiv$  système du 1er ordre pour des FT fractionnelles).  
 Un système quelconque d'ordre  $n$ , décomposé en somme de  $n$  sous-systèmes élémentaires (d'ordre 1) comprend donc  $n$  modes.

Classification des modes :

- Mode  $h(k)$  de pôle  $z_0$  réel  $> 0$  : (mode non oscillant ou encore non alterné)



- Mode  $h(k)$  de pôle  $z_0$  réel  $< 0$  : (mode oscillant ou encore alterné)



### 10. Représentations Fréquentielles z de Systèmes à TD modélisés

#### SYSTEMES ECONOMIQUES

Caisse d'épargne à TD    Entrée : investissement mensuel  $u(k)$     -    Sortie : capital fructifié mensuel  $y(k)$

$I$  : Taux d'intérêt mensuel. Equation de fonctionnement de la caisse d'épargne :

$$y(k) = y(k - 1) + I y(k - 1) + u(k) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} y(k) = (1 + I)y(k - 1) + u(k) & (1) \\ \text{CI } y(-1) & u(k < 0) = 0 \quad (u(k) \text{ causal}) \end{cases}$$

- 1er cas : Capital initial nul :  $y(-1) = 0$  (CI nulles)

$$\text{TZ(1)}: Y(z) = (1 + I)z^{-1}Y(z) + U(z) \quad \rightarrow \quad \boxed{H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1}{1 - (1 + I)z^{-1}}}$$

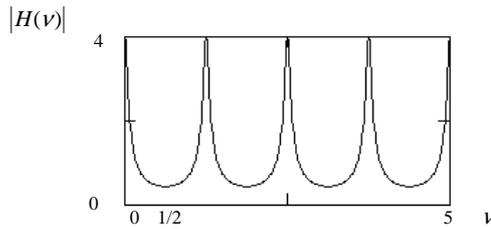
- 2nd cas : Capital initial non nul :  $y(-1) = y_{-1}$  (CI non nulles)

$$\text{TZ(1)}: Y(z) = (1 + I)(z^{-1}Y(z) + y_{-1}) + U(z) \quad \rightarrow \quad \boxed{Y(z) = H(z)U(z) + H(z)(1 + I)y_{-1}}$$

Réponse fréquentielle

$$H(v) = \frac{1}{1 - (1 + I)e^{-i2\pi v}} = \frac{1}{[1 - (1 + I)\cos(2\pi v)] + i[(1 + I)\sin(2\pi v)]}$$

$$|H(\nu)| = \frac{1}{\sqrt{[1 - (1+I)\cos(2\pi\nu)]^2 + [(1+I)\sin(2\pi\nu)]^2}} \quad \text{Arg}[H(\nu)] = -\text{Arctg}\left(\frac{(1+I)\sin(2\pi\nu)}{1 - (1+I)\cos(2\pi\nu)}\right)$$



(tracé pour I = 25% !)

Système du **1er ordre** et de nature **passé-bas** (élimination des composantes de  $u(k)$  de fréquence élevée).

Le système étant passé-bas, les fluctuations rapides de l'investissement (HF, Hautes Fréquences) ne seront pas prises en compte (filtrage passé-bas).

**SYSTEMES DEMOGRAPHIQUES**

*Elevage d'animaux à TD*      *Entrée : croisement / mortalité  $u(k)$  - Sortie : nombres de couples  $y(k)$*

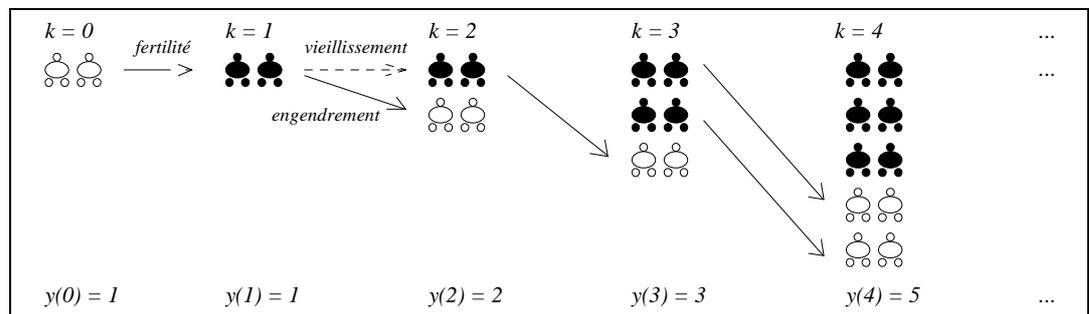
On observe un élevage d'animaux qui obéit aux lois suivantes : chaque mois un couple, s'il est fertile, engendre (après une gestation d'1 mois) 1 couple nouveau-né, et cela indéfiniment. Un couple nouveau-né devient fertile au bout d'1 mois et le reste constamment.

La mortalité et le croisement sont supposés ne concerner que les nouveaux-nés.

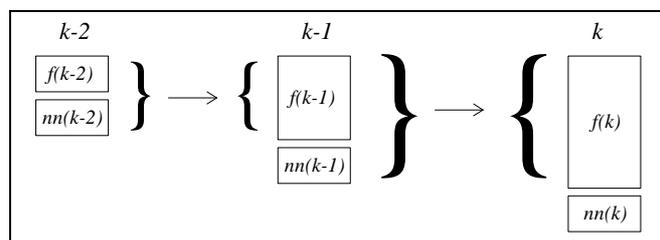
Un nombre de couples  $u(k) < 0$  traduit la mortalité (ou la vente !) des couples nouveaux-nés.  $u(k) > 0$  indique un croisement (immigration, introduction d'une population extérieure de couples nouveaux-nés). L'élevage débute au mois numéro 0.

On cherche à déterminer le nombre de couples  $y(k)$  le  $k$ -ième mois, présents dans l'élevage.

Exemple : avec  $u(k) = \delta(k)$  :



Soient :  $f(k)$  les couples fertiles et  $nn(k)$  les couples nouveau-nés, au mois  $k$  :



$$\text{On a : } \begin{cases} y(k) = y(k-1) + nn(k) \\ nn(k) = f(k-1) + u(k) \\ f(k) = y(k-1) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y(k) = y(k-1) + y(k-2) + u(k) \\ \text{avec } y(k < 0) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Les Conditions Initiales (CI)  $y(-2)$  et  $y(-1)$  étant nulles, la TZ(1) donne :

$$Y(z) = z^{-1}Y(z) + z^{-2}Y(z) + U(z) \quad \rightarrow \quad H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1}{1 - z^{-1} - z^{-2}}$$

## TD 4. Représentations Fréquentielles des Signaux & des Systèmes à TD

### I. SIGNAUX

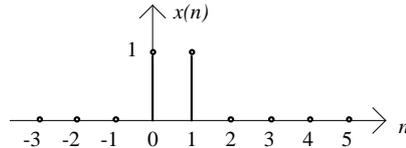
#### 0. Transformée en z de signaux élémentaires

Calculer la TZ de :

- $\delta(n)$
- $\Gamma(n)$

#### 1. Transformée en z d'une séquence

Calculer de 3 façons la TZ de la séquence :



#### 2. Résolution d'une équation aux différences par la Transformée en z

A l'aide de la TZ, résoudre l'équation aux différences :  $x(k+2) - 3x(k+1) + 2x(k) = u(k)$

où  $x(k) = 0$  pour  $k < 0$  et l'entrée  $u(k) = \delta(k)$

( $x(k < 0) = 0$  constitue les CI requises au démarrage, l'entrée  $u(k)$  permettant ensuite de déterminer la sortie  $x(k)$ ).

#### 3. Transformée en z monolatérale - Conditions Initiales

A l'aide de la TZ, résoudre l'équation aux différences :  $x_{k+1} + ax_k = 0$  pour  $k \geq 0$  avec :

$x_k = 0$  pour  $k < 0$ ,  $x_0 = 1$  et  $a = 0.5$ .

### II. SYSTEMES

#### 1. Versions causale et non causale d'un même filtre [voir TP]

On considère le filtre numérique de FT :  $H(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$  où  $\alpha$  est un paramètre réel du filtre.

1. Donner l'équation aux différences du filtre.
2. En déduire sa version causale.
3. Donner la version non causale du même filtre.
4. On prend  $\alpha = 0.7$ . Vérifier la stabilité du filtre causal et l'instabilité du filtre non causal :
  - en appliquant le critère général de stabilité
  - en traçant la RI de chacun des 2 filtres.
5.  $\alpha = 0.7$  : Vérifier la stabilité/instabilité du filtre respectivement causal/non causal sur signal parole (TP).
6. Appliquées sur le signal parole, les versions causale/non causale du filtre produisent-elles le même résultat (TP) ?

#### 2. Filtre récursif [voir TP]

Soit le système :  $y(n) = 4x(n) - 4x(n-1) - 0.1 y(n-1)$

- Donner le schéma fonctionnel ( $\equiv$  schéma-bloc)

- Calculer sa FT :  $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$

- Donner sa RI :  $h(n)$

- Vérifier la causalité

- Vérifier la stabilité

- Calculer la valeur de l'échantillon de sortie  $y(n=3)$  du système à l'entrée  $\Gamma(n)$ .

- Vérifier les résultats à l'aide du programme (cf. TP).

## TD 4 ANNEXE. Représentations Fréquentielles des Signaux & des Systèmes à TD

### I. SIGNAUX

#### 0. Transformée en z de $\delta(n)$

- Montrer que :  $TZ[\delta(n)] = 1$  et calculer la TZ de :  $1$  ( $= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{n,k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n-k)$ ).

- Calculer la TZ du peigne de Dirac causal de largeur  $M$  :  $\sum_{k=0}^{\infty} \delta_{n,kM} = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-kM)$  ( $M$  entier)

#### 1. Transformée en z inverse

Déterminer la  $TZ^{-1}$  de  $X(z) = \frac{A}{z - z_0}$

#### 2. Transformée en z inverse donnant une séquence causale

Calculer la  $TZ^{-1}$  (notée encore  $TZI$ ) de  $X(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-a)}$  avec :  $0 < a < 1$   
en recherchant une séquence  $x(n)$  causale.

#### 3. Transformée en z inverse donnant un signal causal

Calculer la  $TZ^{-1}$  de  $X(z) = \frac{z}{z-a}$  en recherchant une séquence causale.

#### 4. Transformée en z de l'échelon décalé

- Calculer la TZ de  $\Gamma(n-3)$
- Calculer la TZ de  $\Gamma(n-1)$  par la TZ bilatérale et la TZ monolatérale
- Calculer la TZ de  $\Gamma(n+1)$  par la TZ bilatérale et la TZ monolatérale

#### 5. Théorème de la somme en z

Montrer la propriété de la TZ sur la somme :

$$\text{si } x(n) \xrightarrow{TZ} X(z) \text{ alors } \sum_{k=-\infty}^n x(k) \xrightarrow{TZ} X(z) \cdot \frac{z}{z-1}$$

#### 6. Transformée en z du produit de convolution

Montrer que :  $TZ[h(n) * x(n)] = H(z)X(z)$

avec :  $X(z) = TZ[x(n)]$  et  $H(z) = TZ[h(n)]$

#### 7. Transformées en z monolatérale et bilatérale - Conditions Initiales

A l'aide de la TZ, résoudre l'équation aux différences :  $y_k - y_{k-1} = x_k$  avec :  
l'entrée  $x_k = \Gamma_k$  et la condition initiale  $y_{-1} = 1$  (ou même :  $y_{k \leq -1} = 1$ ).

**8. Résolution d'une équation aux différences par la Transformée en z**

Résoudre l'équation aux différences pour  $k \geq 0$  :  $(k + 1)x(k + 1) - kx(k) = 1$  à l'aide de la TZ  
avec  $x(k) = 0$  pour  $k < 0$ .

**9. Transformée en z de séquences**

Donner la TZ des signaux causaux suivants :

$u(k)$  tel que :  $u(0) = 1$   $u(1) = 4$   $u(2) = 16$   $u(3) = 64$   $u(k \neq 0, 1, 2, 3) = 0$

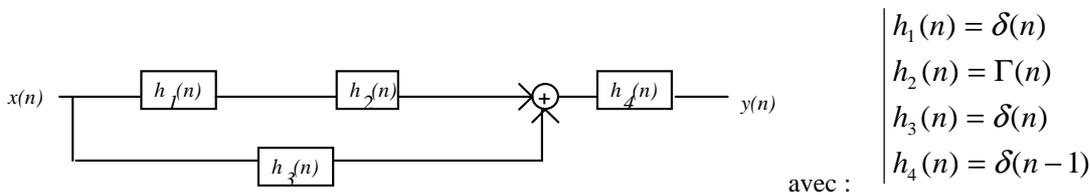
$v(k)$  tel que :  $v(0) = 0$   $v(1) = 0$   $v(2) = 1$   $v(3) = 4$   $v(4) = 16$   $v(5) = 64$   $v(6) = 256 \dots$

$w(k)$  tel que :  $w(0) = 16$   $w(1) = 64$   $w(2) = 256 \dots$

**II. SYSTEMES**

**1. Réponse Impulsionnelle d'un ensemble de systèmes**

Déterminer la RI  $h(n)$  du SLTI suivant :



**2. Générateur d'échos [voir TP]**

Soit le filtre défini par son équation aux différences :  $y(nT) = \frac{1}{2}[x(nT) + y(n - 1)T]$

- Déterminer la RI  $h(nT)$  de ce filtre :
  - en donnant sa forme non récursive
  - par la TZ (forme récursive)
  - par la TF en considérant le filtre continu correspondant (interpolation du filtre).

**3. Système Dynamique Discret (SDD)**

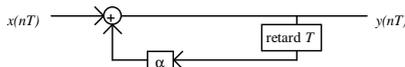
On considère une caisse d'épargne dans laquelle le client dépose chaque mois une somme d'argent  $u(k)$  (s'il s'agit d'un retrait,  $u(k)$  est négatif; si  $u(k) = \text{Constante}$ , on a un système dynamique) placée au taux d'intérêt mensuel  $I$ ; le calcul des intérêts est le suivant : le  $i^{\text{ième}}$  mois, l'intérêt est calculé sur l'argent (capital et intérêt) en dépôt à la fin du  $(i-1)^{\text{ième}}$  mois.

Chaque mois, le client dispose donc d'une somme d'argent  $y(k)$  qui représente la totalité de ses dépôts antérieurs augmentée des intérêts acquis.

1. Déterminer l'équation de fonctionnement de la caisse d'épargne, c'est-à-dire  $y(k)$  en fonction de  $y(k - 1)$ ,  $u(k)$  et  $I$ .
  - Quelle est la condition initiale  $y(-1)$ , sachant que le 1er dépôt intervient à partir du mois 0 ?
2. Le client dépose 100 € chaque mois dès le mois 0 (échelon de commande).
  - Donner  $y(k)$  en fonction de  $k$  et  $I$ .
  - Calculer  $y(11)$  : capital au bout d'un an (on prendra  $I = 0.005$  ( $\approx 5\%$  annuel)).
  - Exprimer  $Y(z)$  en fonction de  $U(z)$ . Retrouver  $y(k)$  par TZ Inverse.
3. Le client dépose 100 € chaque mois à partir du mois 0 mais pendant 3 mois seulement (impulsion de commande).
  - Calculer  $y(k)$ . En déduire  $y(11)$ .

**4. Générateur d'échos**

Soit le filtre (générateur d'échos) :



- Forme récursive de ce filtre ?
- Forme non récursive ?
- RI du filtre ?
- Réponse à l'échelon unité ?
- Réponse à  $x(nT) = A \cos(\omega nT) \Gamma(nT)$  avec  $A = 60$   $\omega = 2\pi f$   $f = 0.05$  Hz  $T = 1$  s et  $\alpha = 0.3$  ?
- Fonction de Transfert du filtre ?
- Condition de stabilité : - par la RI et - par la FT ?

**5. Modélisation d'une croissance de population d'animaux**

**Modèle d'évolution**

On appelle :  $p(n)$  : la population d'une espèce évaluée pour une année  $n$ .

On modélise la loi d'évolution de la population de façon précaire par le SDD linéaire du 1<sup>er</sup> ordre :

$$p(n + 1) = r p(n) \quad r : \text{taux de natalité} - \text{taux de mortalité.}$$

1. Pour quelles valeurs de  $r$  la population est-elle stable ? Quelle est la population d'équilibre ( $\equiv$  stable) ?  
(2 méthodes : utiliser la TZ ou faire la réalisation directe :  $p(n+1) = p(n)$ )

On modélise maintenant l'évolution de façon plus réaliste avec un SDD non linéaire du 1<sup>er</sup> ordre :

$$p(n + 1) = r p(n) - \alpha p^2(n) \quad \text{avec : } r = 1.2 \text{ et } \alpha = 0.025$$

2. Quelle est la population d'équilibre de la population, pour différentes valeurs de  $p(0)$  ?  
(résolution numérique car la TZ est linéaire alors que le système ne l'est pas  $\rightarrow$  TZ inutilisable, car la TZ de l'équation aux différences fait apparaître une convolution, donc pénible à résoudre).

3. On modélise sous la forme d'un système Entrée-Sortie à partir des relations précédentes :

$$p(n + 1) = r p(n) + u(n) \quad p(n) : \text{sortie} \quad u(n) : \text{entrée} = \text{population injectée d'« immigration»}$$

Donner la réponse  $p(n)$  - à une entrée impulsionnelle :  $u(n) = \delta(n)$

- à une entrée indicielle :  $u(n) = \Gamma(n)$

4. Mêmes questions avec le modèle d'Entrée-Sortie :

$$p(n + 1) = r p(n) - \alpha p^2(n) + u(n) \quad \text{avec : } r = 1.2 \text{ et } \alpha = 0.025$$

**6. Contrôle de population d'animaux**

On considère une population d'animaux  $p(k)$  évaluée en milliers d'unités périodiquement à la période  $T$  ( $T = 1$  an) et démarrant avec la population initiale  $p(-1)$ .

On suppose constants les paramètres  $\alpha$  (taux de natalité) et  $\beta$  (taux de mortalité) de cette population qui peut donc être modélisée comme issue d'un Système Linéaire à Temps Invariant (SLTI).

On donne le taux de reproduction de la population  $r = \alpha - \beta = 0.8$ . Celui-ci étant faible, on croise cette population avec une population  $u(k)$  (« immigrante ») ayant les mêmes paramètres de reproduction.

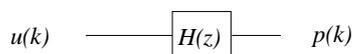
L'équation aux différences régissant le SLTI s'écrit donc :

$$p(k) = 0.8 p(k - 1) + u(k) \quad \text{pour } k \geq 0 \quad \text{avec : } p(k) = 0 \text{ pour } k < -1.$$

On rappelle qu'une Fonction de Transfert exprimée comme un rapport sortie sur entrée ne fait pas intervenir les Conditions Initiales qui sont alors prises nulles.

La population initiale  $p(-1) = 1$ .

On contrôle la population  $p(k)$  directement par la population  $u(k)$  selon le schéma suivant :



1. Donner la Fonction de Transfert  $H(z) = \frac{P(z)}{U(z)}$  de ce système numérique.
2. Ce système est-il stable, donnant alors une population  $p(k)$  bornée à partir d'une population d'entrée  $u(k)$  bornée ?
3. On commande le système en injectant la population  $u(k)$  uniquement au démarrage de l'élevage :  $u(k) = \delta(k)$ . Donner l'expression de la population  $p(k)$  et tracer l'allure de son évolution en précisant sur le tracé ses valeurs initiale  $p(0)$  et finale  $p(\infty)$ .
4. On commande le système en injectant la population  $u(k)$  régulièrement :  $u(k) = \Gamma(k)$ . Donner l'expression de la population  $p(k)$  et tracer l'allure de son évolution en précisant sur le tracé ses valeurs initiale  $p(0)$  et finale  $p(\infty)$ .

## 7. Stratégie de chasse

On considère une population  $p(k)$  de cerfs évaluée en milliers d'unités périodiquement à la période  $T$  ( $T = 1$  an) comme sortie d'un système. La stratégie de chasse consiste (c'est un minimum !) à ne pas faire que cette population tombe en extinction en limitant la population  $u(k)$  de cerfs tués chaque année.

$u(k)$  est donc ici considéré comme l'entrée du système modélisé par un Système Dynamique Discret non linéaire :

$$p(k+1) = 1.8p(k) - 0.8p^2(k) - u(k)$$

- La stratégie choisie consiste à effectuer une chasse fixe :  $u(k) = b\Gamma(k)$ .

Déterminer numériquement l'évolution de la population de cerfs  $p(k)$  avec  $b = 0.072$  puis  $b = 0.24$ .

- La stratégie choisie consiste maintenant à effectuer une chasse proportionnelle :  $u(k) = b p(k)$ .

Déterminer numériquement l'évolution de la population de cerfs  $p(k)$  avec  $b = 0.4$ ,  $b < 0.8$  puis  $b > 0.8$

## 8. Modélisation d'un système économique

### Loi de l'offre et de la demande

On appelle :  $o(n)$  : l'offre d'un produit de consommation, évalué pour une année  $n$ .

$d(n)$  : la demande de ce produit.

$p(n)$  : le prix de ce produit, de valeur initiale  $p(0)$ .

On modélise la loi de l'offre et de la demande par un Système Dynamique Discret (SDD) linéaire du 1<sup>er</sup> ordre avec les 3 relations :

$o(n+1) = \alpha p(n)$  (Ex. :  $\alpha = 0.8$ ) L'offre l'année suivante est directement proportionnelle au prix de cette année.

$d(n) = -\beta p(n) + \gamma$  (Ex. :  $\beta = 1.2$   $\gamma = 20$ ) Plus le prix est élevé, moins la demande est importante la même année.  
(ceci est caractérisé par le signe -)

$o(n+1) = d(n+1)$  Le prix l'année suivante sera ajusté de telle sorte que l'offre égale la demande.

1. - Déterminer l'équation aux différences récursive décrivant le prix d'un produit.  
- Résoudre cette équation aux différences en utilisant la TZ, ou résoudre numériquement.  
- Tracer l'évolution de  $p(n)$  suivant plusieurs prix initiaux  $p(0)$  et constater que les 2 méthodes donnent le même résultat.
2. - A quelle condition sur  $\alpha$  et  $\beta$  le prix d'un produit est-il stable ? (2 méthodes : TZ ou :  $p(n) = p(n-1)$ )  
- Quel est le prix d'équilibre ( $\equiv$  stable) du produit ? (2 méthodes : TZ et théorème de la valeur finale ou :  $p(n) = p(n-1)$ )  
- Tracer l'évolution de  $p(n)$ .

## 9. Condition de stabilité de filtrage causal et non causal

On considère les filtres numériques d'équation aux différences :

$$\text{Filtre causal : } y_n = x_n + \alpha y_{n-1}$$

$$\text{Filtre non causal : } y_n = x_n + \alpha y_{n+1}$$

- Vérifier que la condition de stabilité du filtre causal est que tous les pôles de sa FT aient un module  $< 1$ .
- Vérifier que la condition de stabilité du filtre non causal est que tous les pôles de sa FT aient un module  $> 1$ .
- Comparer avec les filtres non causal/causal obtenus par renversement du temps des filtres causal/non causal.

**TP 4 ANNEXE. Représentations Fréquentielles des Signaux & des Systèmes à TD****I. SIGNAUX****1. Programme de division de polynômes**

Programmer l'algorithme de division de polynômes en  $z$ , suivant les puissances croissantes de  $z^{-1}$ . Vérifier l'algorithme sur différents signaux.

*Exemple :*  $TZ^{-1} \left[ \frac{z}{z-1} \right] = \Gamma(n)$       Faire la division  $\frac{1}{1-z^{-1}}$  à la main pour vérification.

**II. SYSTEMES****1. Vérification des résultats**

Vérifier les résultats théoriques des exercices en déterminant et en traçant à chaque fois la réponse du système considéré :

- par programmation directe de l'équation aux différences récursive.
  - par programmation de l'expression non récursive du filtre.
  - par programmation de l'expression fournie par  $TZ^{-1}$  symbolique.
  - par programmation de l'expression obtenue par  $TZ^{-1}$  calculée.
  - par division de polynômes.
-

### TP 4. Représentations Fréquentielles des Signaux & des Systèmes à TD

#### II. SYSTEMES

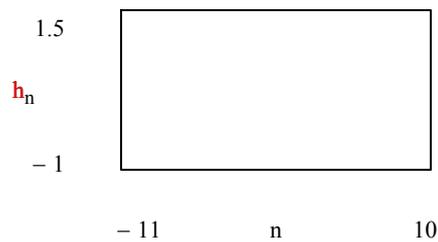
##### 1. Versions causale et non causale d'un même filtre [voir TD]

Soit le filtre défini par la FT  $H(z) := \frac{Y(z)}{X(z)}$  :  $H(z) := \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$  avec  $\alpha = 0.7$

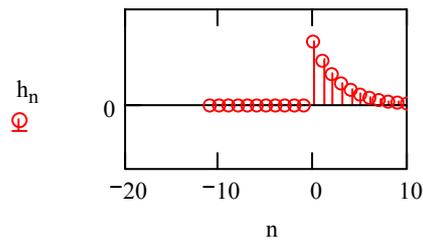
ORIGIN := -11      n := -11..10      d<sub>n</sub> := δ(n,0)      x<sub>n</sub> := d<sub>n</sub>      Γ<sub>n</sub> := Φ(n)      α := 0.7

RI du filtre causal :

$h_n := \blacksquare$



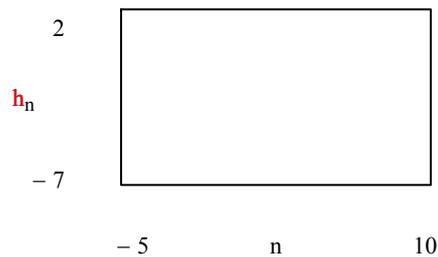
Vérification :  $h_n := \alpha^n \cdot \Gamma_n$



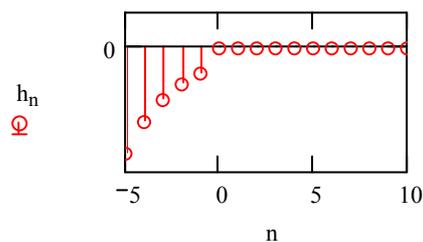
RI du filtre non causal :

n := 10, 10 - 1 .. -5

$h_n := \blacksquare$

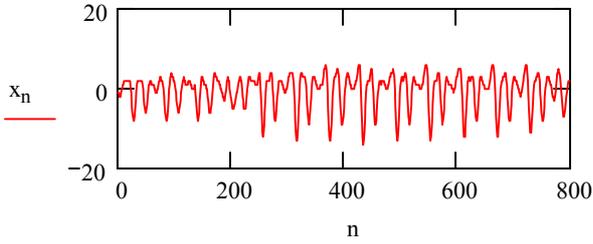


Vérification :  $h_n := -\alpha^n \cdot \Gamma_{-n-1}$



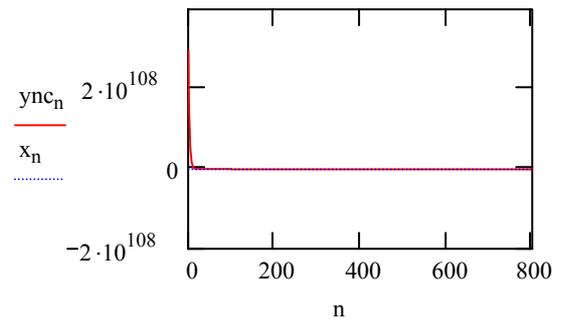
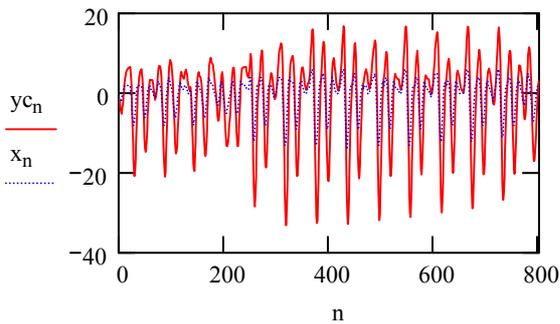
$\alpha = 0.7$  : Stabilité / instabilité du filtre respectivement causal/non causal sur signal parole :

```
ORIGIN := 0      x := READWAV("O1.wav")      x := x - 128      n := 0..length(x) - 1
```



$$\text{Causal}(u, \alpha) := \begin{cases} \text{for } n \in 0.. \text{length}(u) - 1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} v_n \leftarrow u_n \text{ if } n = 0 \\ v_n \leftarrow u_n + \alpha \cdot v_{n-1} \text{ otherwise} \end{array} \right. \\ v \end{cases} \quad \text{NonCausal}(u, \alpha, vN) := \begin{cases} \text{for } n \in \text{length}(u) - 1, \text{length}(u) - 2.. 0 \\ \quad \left| \begin{array}{l} v_n \leftarrow vN \text{ if } n = (\text{length}(u) - 1) \\ v_n \leftarrow \frac{1}{\alpha} \cdot (v_{n+1} - u_{n+1}) \text{ otherwise} \end{array} \right. \\ v \end{cases}$$

```
 $\alpha := 0.7$       yc := Causal(x,  $\alpha$ )      yN := yclength(x)-1      ync := NonCausal(x,  $\alpha$ , yN)
```



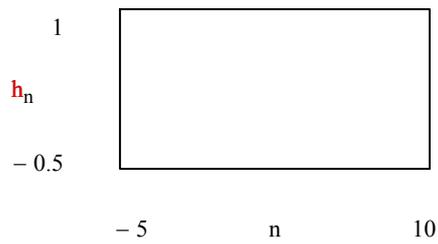
**3. Générateur d'échos** [voir TD]

Soit le filtre défini par l'équation aux différences :  $y_n = \frac{1}{2} \cdot (x_n + y_{n-1})$

ORIGIN := -5    n := -5..10     $d_n := \delta(n,0)$      $x_n := d_n$      $\Gamma_n := \Phi(n)$

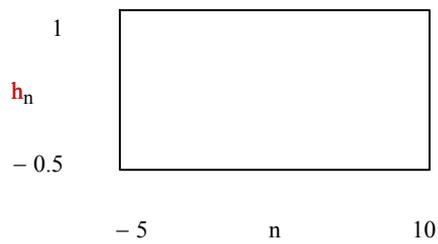
RI du filtre : forme récursive :

$$h_n := \begin{cases} \blacksquare & \text{if } n < 0 \\ \blacksquare & \text{if } n = 0 \\ \blacksquare & \text{if } n > 0 \end{cases}$$



RI du filtre : forme non récursive :

$$h_n := \blacksquare$$



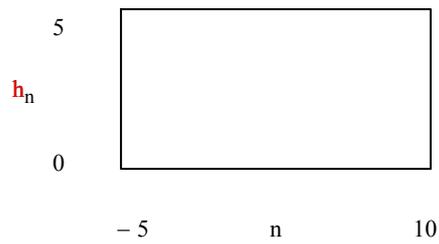
**4. Filre récursif** [voir TD]

Soit le filtre défini par l'équation aux différences :  $y_n = 4 \cdot x_n - 4 \cdot x_{n-1} - 0.1 \cdot y_{n-1}$  :

ORIGIN := -5      n := -5..10      d<sub>n</sub> := δ(n,0)      x<sub>n</sub> := d<sub>n</sub>      Γ<sub>n</sub> := Φ(n)

RI du filtre :

$h_n := \blacksquare$

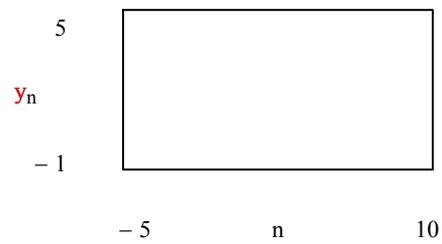


Réponse indicielle (réponse à Γ<sub>n</sub>) :

x<sub>n</sub> := Γ<sub>n</sub>

$y_n := \blacksquare$

$y_3 = \blacksquare$



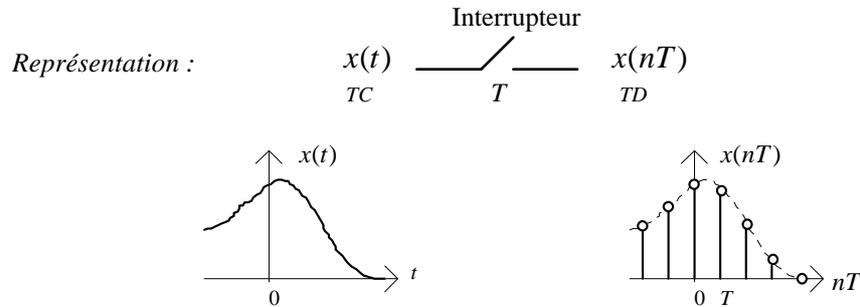
## 5. Echantillonnage - Interpolation - Quantification

### 1. Echantillonnage : du TC au TD

On va voir que l'échantillonnage d'un signal à TC revient à le multiplier par un peigne de Dirac.

#### 1.1. Signal échantillonné

Soit  $x(t)$  un signal à TC et  $x(nT)$  le signal à TD obtenu par échantillonnage périodique à la période  $T$  de  $x(t)$ .



L'échantillonnage consiste ainsi à remplacer  $t$  par  $nT$ .

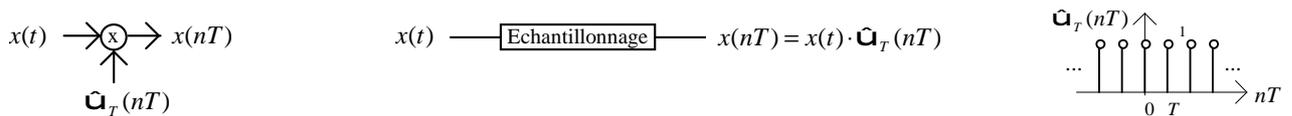
Pour caractériser l'opération d'échantillonnage et prédéterminer par exemple, le taux (vitesse, fréquence) d'échantillonnage requis pour l'acquisition numérique d'un signal, on peut aussi représenter l'échantillonnage comme un opérateur multiplicatif entre le signal à TC à échantillonner et un peigne de Dirac discret :

( $\delta_{n,k}$  représente le delta discret de Kronecker)

$$x(nT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t) \delta_{n,k} \quad (n \text{ variable})$$

$$\begin{cases} x(n=0) = x(t) \delta_{n,0} \\ x(n=1) = x(t) \delta_{n,1} \\ \dots \\ x(n=k) = x(t) \delta_{n,k} \end{cases}$$

soit :  $x(nT) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{n,k} = x(t) \cdot \hat{\mathbf{u}}_T(nT)$  avec  $\hat{\mathbf{u}}_T(nT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{n,k}$



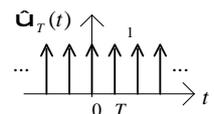
Pour caractériser fréquentiellement le signal échantillonné  $x(nT)$  (i.e. déterminer le spectre de  $x(nT)$ ), on peut déterminer la TF de  $x(nT)$ , obtenue comme la convolution de  $X(\nu) = TF[x(t)]$  et de la TF de  $\hat{\mathbf{u}}_T(nT)$ .

Pour n'avoir que des signaux de même nature (TC) et non de nature hybride (TC et TD) qui rend moins simple l'analyse spectrale, on peut aussi, ce qui revient au même, prendre l'équivalent continu  $x^*(t)$  du signal échantillonné  $x(nT)$  pour déterminer son spectre. Le signal échantillonné est alors vu comme un signal à TC :

( $\hat{\mathbf{u}}_T(t)$  représente un peigne de Dirac continu)

$$x^*(t) = x(t) \cdot \hat{\mathbf{u}}_T(t)$$

$$x^*(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT)$$



Le signal échantillonné à TC  $x^*(t)$  est bien l'équivalent continu du signal échantillonné à TD  $x(nT)$  car ils ont la même TL :  $TL[x^*(t)] = TL[x(nT)]$ . En effet :

$$x(nT) \xrightarrow{TL^*} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-nTp}$$

$$x^*(t) \xrightarrow{TL} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)e^{-pt} dt \stackrel{\nabla}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)e^{-pt} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)e^{-pt} dt$$

∇ : dans le domaine de convergence de la transformée

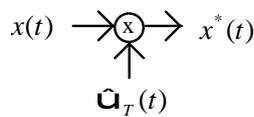
$$TL[x^*(t)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-pnT} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-pnT}$$

soit effectivement :  $TL^*[x(nT)] = TL[x^*(t)] \quad (= TZ[x(nT)])$

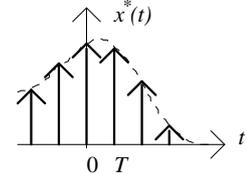
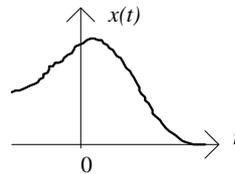
et on note :  $X^*(p) = TL^*[x(nT)] = TL[x^*(t)] = TZ[x(nT)] = X(z)$

Le signal échantillonné à TC  $x^*(t)$  apparaît comme le produit de 2 signaux à TC :

$$x^*(t) = x(t) \cdot \hat{\mathbf{u}}_T(t) \quad \text{où} \quad \hat{\mathbf{u}}_T(t) \text{ est le peigne de Dirac} \quad \hat{\mathbf{u}}_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$$



$$x(t) \xrightarrow{\text{Echantillonnage}} x^*(t) = x(t) \cdot \hat{\mathbf{u}}_T(t)$$



### 1.2. Théorème de Shannon

Le signal  $x^*(t)$ , signal  $x(t)$  échantillonné (vu comme un signal à TC) s'écrit :  $x^*(t) = x(t) \cdot \hat{\mathbf{u}}_T(t)$

On se propose de déterminer le spectre de  $x^*(t)$  :

$$TF[x^*(t)] = TF[x(t) \cdot \hat{\mathbf{u}}_T(t)] = TF[x(t)] * TF[\hat{\mathbf{u}}_T(t)] = X(\nu) * TF[\hat{\mathbf{u}}_T(t)]$$

Calculons tout d'abord  $TF[\hat{\mathbf{u}}_T(t)]$  en posant :  $g(t) = \hat{\mathbf{u}}_T(t)$

$g(t) = \hat{\mathbf{u}}_T(t)$  est périodique de période  $T \rightarrow$  Décomposition en série de Fourier :

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_k e^{ik\frac{2\pi}{T}t} \quad \text{et} \quad G_k = \frac{1}{T} \int_T g(t) e^{-ik\frac{2\pi}{T}t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\varepsilon}^{-\varepsilon+T} \delta(t) e^{-ik\frac{2\pi}{T}t} dt = \frac{1}{T} \quad (0 < \varepsilon \ll 1)$$

d'où :  $g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{ik\frac{2\pi}{T}t}$  et :

$$TF[g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{ik\frac{2\pi}{T}t} e^{-i2\pi\nu t} dt = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\left(\nu - \frac{k}{T}\right)t} dt = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\nu - \frac{k}{T}\right) \quad \text{car} \quad TF_{\nu_0}[1] = \delta(\nu - \nu_0)$$

On a donc :  $TF[\hat{\mathbf{u}}_T(t)] = F \hat{\mathbf{u}}_F(\nu)$  avec :  $F = 1/T$

et :  $TF[x^*(t)] = X(\nu) * F \hat{\mathbf{u}}_F(\nu) = X(\nu) * F \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - kF) = F \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\nu) * \delta(\nu - kF)$

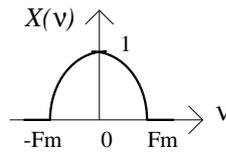
(la convolution est distributive par rapport à l'addition)

Comme  $X(\nu) * \delta(\nu - kF) = X(\nu - kF)$ , on a :

$$X^*(\nu) = TF[x^*(t)] = F \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\nu - kF)$$

L'échantillonnage de  $x(t)$  a donc pour conséquence de périodiser en fréquence le spectre de  $x(t)$  à la période  $F = \frac{1}{T}$ .

Supposons que  $x(t)$  ait le spectre  $X(\nu)$  suivant (le spectre d'un signal réel est pair) :



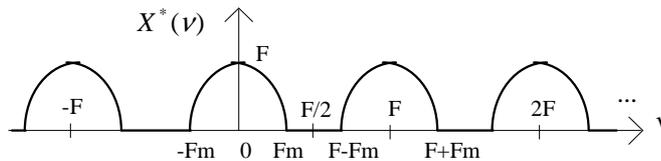
$F_m$  : fréquence maximale contenue dans le spectre de  $x(t)$

Exemple : Musique :  $F_m \approx 20$  kHz Parole :  $F_m \approx 3\,400$  Hz  $\approx 4$  kHz

Déterminons le spectre  $X^*(\nu)$  du signal échantillonné  $x^*(t)$  :

2 cas de figure :

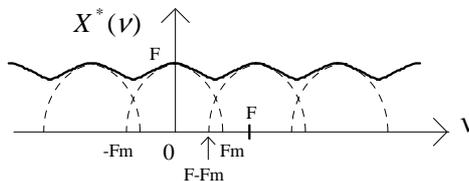
(1)  $F = \frac{1}{T} \geq 2F_m$  : La fréquence d'échantillonnage  $F = \frac{1}{T}$  est « assez » élevée :



Il n'y a pas de chevauchement :  $F - F_m \geq F_m \rightarrow F \geq 2F_m$

On peut reconstituer ensuite  $x(t)$  à partir de  $x^*(t)$  par filtrage passe-bas de  $x^*(t)$  : on coupe les fréquences  $\nu > F_m$

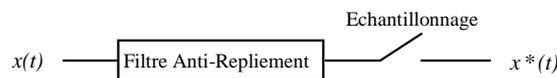
(2)  $F < 2F_m$  : Il y a sous-échantillonnage : le signal  $x(t)$  est trop rapide par rapport à la fréquence d'échantillonnage  $F$ .  
Vu en fréquence, il y a repliement de spectre (aliasing) :



Il y a impossibilité par simple filtrage passe-bas à reconstituer  $x(t)$  à partir de ses échantillons  $x^*(t)$  : il y a perte d'information.

Un filtre de Kalman, utilisant une connaissance a priori du signal à reconstruire (par son modèle) permettrait de retrouver les informations manquantes.

→ Si  $F$  est fixée on utilise généralement, pour éviter ce phénomène, un filtre anti-repliement ( $\equiv$  anti-aliasing) qui coupe les fréquences du signal  $x(t)$  à échantillonner à la valeur maximale  $F_m = F/2$  **avant** échantillonnage :



**Théorème de Shannon :** Soit  $x(t)$  un signal à TC possédant une fréquence maximale  $F_m$  dans son spectre (d'amplitude). Pour que l'échantillonnage à la fréquence  $F$  n'implique aucune perte d'information, il faut et il suffit que :  $F \geq 2F_m$ .

Qualitativement, ce résultat n'est pas surprenant.

Exemple 1 : Un automobiliste doit regarder la route (échantillonner les images de la route) suffisamment souvent pour ne pas perdre d'informations (suffisamment vite par rapport à la vitesse d'évolution de ces images, donc de la configuration du trafic).

Exemple 2 : Compact Disc Audio :  $F = 44.1$  kHz avec  $F_m \sim 20$  kHz

Application : Transmission de la parole en temps réel

Pour une transmission de la parole en temps réel (≡ en ligne, ≡ sans nécessité de mémoire tampon pour une gestion hors-ligne), un ligne de transmission doit avoir un débit d'au moins 64 kbit/s, car :  
 le spectre de la parole occupe la bande 300 Hz - 4000 Hz : →  $F_m = 4 \text{ kHz}$  → échantillonnage à  $F_e \geq 8 \text{ kHz}$ ,  
 soit un débit d'au moins 8000 échantillons/sec. et, avec une dynamique de 1 octet (8 bits) par échantillon, le débit minimal (en monophonie) est donc de 64 kbit/s.

**1.3. Résumé sur l'échantillonnage**

Echantillonnage comme passage du Temps Continu au Temps Discret

Le signal échantillonné peut être vu comme un signal à Temps Discret ( $\delta_{n,k}$  est le symbole de Kronecker)

$$x(t) \text{ — } x(nT) \quad x(nT) = \sum_k x(t)\delta_{n,k} = x(t) \sum_k \delta_{n,k} = x(t) \cdot \hat{\mathbf{u}}_T(nT) \quad (n \text{ variable})$$

(TC)  $t = nT$  (TD) avec :  $\hat{\mathbf{u}}_T(nT)$  peigne de Dirac discret : ( $T$  : période d'échantillonnage)

$$\hat{\mathbf{u}}_T(nT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{n,k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{nT,kT} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{(n-k)T} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{(n-k)T,0}$$

Le signal échantillonné peut aussi être vu comme un signal à Temps Continu ( $\delta(t)$  est la distribution de Dirac)

$$x(t) \text{ — } x^*(t) \quad x^*(t) = \sum_n x(nT)\delta(t-nT) = \sum_n x(nT)\delta(t-nT) = x(t) \sum_n \delta(t-nT) = x(t) \cdot \hat{\mathbf{u}}_T(t)$$

(TC) (TC) avec :  $\hat{\mathbf{u}}_T(t)$  peigne de Dirac à TC :  $\hat{\mathbf{u}}_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$

Transformée de Laplace (TL). Transformée de Laplace échantillonnée (TL\*). Transformée en z (TZ)

$$TL[x^*(t)] = \int x^*(t)e^{-pt} dt = \int \sum_n x(nT)\delta(t-nT)e^{-pt} dt = \sum_n \int x(nT)\delta(t-nT)e^{-pt} dt = \sum_n x(nT)e^{-pnT} \int \delta(t-nT) dt = \sum_n x(nT)e^{-pnT}$$

$$TL^*[x(nT)] = \sum_n x(nT)e^{-pnT} \text{ soit en posant } z = e^{pT} : TL^*[x(nT)] = \sum_n x(nT)z^{-n} \quad TZ[x(nT)] = \sum_n x(nT)z^{-n}$$

d'où les résultats : 
$$X^*(p) = TL[x^*(t)] = TL^*[x(nT)] = TZ[x(nT)] = X(z)$$

**1.4. Opérations sur l'échantillonnage**

Echantillonnage de la somme de signaux = Somme des signaux échantillonnés (Linéarité)

$$[x(t) + y(t)]^* = \sum_n [x(nT) + y(nT)]\delta(t-nT) = \sum_n x(nT)\delta(t-nT) + \sum_n y(nT)\delta(t-nT) = x^*(t) + y^*(t)$$

Echantillonnage du produit d'un signal par une Constante  $\lambda$  = Produit par  $\lambda$  du signal échantillonné (Linéarité)

$$[\lambda x(t)]^* = \sum_n [\lambda x(nT)]\delta(t-nT) = \lambda \sum_n x(nT)\delta(t-nT) = \lambda x^*(t)$$

Echantillonnage (synchrone) d'un signal échantillonné = Echantillonnage d'un signal non échantillonné

$$[x^*(t)]^* = \sum_k \left[ \sum_n x(nT)\delta(kT-nT) \right] \delta(t-kT) = \sum_k x(kT)\delta(t-kT) = x^*(t) \quad (\text{les échantillonneurs sont synchrones})$$

Convolution de signaux échantillonnés = Echantillonnage de la convolution entre un signal échantillonné et un signal non éch.

Convolution d'un signal échantillonné avec un signal non échantillonné

$$x^*(t) * y(t) = \int x^*(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int \sum_n x(nT)\delta(\tau-nT)y(t-\tau)d\tau = \int \sum_n x(nT)\delta(\tau-nT)y(t-nT)d\tau$$

$$x^*(t) * y(t) = \sum_n x(nT)y(t-nT) \int \delta(\tau-nT)d\tau = \sum_n x(nT)y(t-nT) \quad (1)$$

Convolution de signaux échantillonnés

$$x^*(t) * y^*(t) = \int x^*(\tau) y^*(t - \tau) d\tau = \int \sum_n x(nT) \delta(\tau - nT) \sum_k y(kT - \tau) \delta(t - kT) d\tau \quad \text{car } y^*(t - \tau) = \sum_k y(kT - \tau) \delta(t - kT)$$

$$x^*(t) * y^*(t) = \int \sum_n x(nT) \delta(\tau - nT) \sum_k y(kT - nT) \delta(t - kT) d\tau = \sum_n \sum_k x(nT) y(kT - nT) \delta(t - kT) \int \delta(\tau - nT) d\tau$$

$$x^*(t) * y^*(t) = \sum_n \sum_k x(nT) y(kT - nT) \delta(t - kT) = \sum_n \sum_k x(nT) y(t - nT) \delta(t - kT)$$

$$x^*(t) * y^*(t) = \sum_k \left[ \sum_n x(nT) y(t - nT) \right] \delta(t - kT) = \left[ \sum_n x(nT) y(t - nT) \right]^* = [x^*(t) * y(t)]^* \quad \text{d'après (1)}$$

Convolution de signaux échantillonnés  $\neq$  Echantillonnage de la convolution de signaux non échantillonnés  
(la démonstration peut aussi se faire en utilisant les tables de TZ en y prenant un contre exemple)

Echantillonnage de la convolution de signaux non échantillonnés

$$[x(t) * y(t)]^* = \left[ \int x(\tau) y(t - \tau) d\tau \right]^* = \sum_k \left[ \int x(\tau) y(kT - \tau) d\tau \right] \delta(t - kT)$$

Convolution de signaux échantillonnés

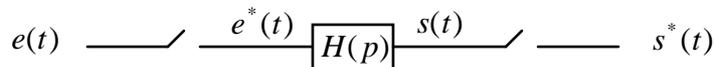
$$x^*(t) * y^*(t) = \sum_k \sum_n x(nT) y(t - nT) \delta(t - kT) \quad \rightarrow \quad [x(t) * y(t)]^* \neq x^*(t) * y^*(t)$$

1.5. Résumé des opérations sur l'échantillonnage

#	TEMPS	LAPLACE	Z
1	$[x(t) + y(t)]^* = x^*(t) + y^*(t)$	$[X(p) + Y(p)]^* = X^*(p) + Y^*(p)$	$Z[X(p) + Y(p)] = X(z) + Y(z)$
2	$[x^*(t)]^* = x^*(t)$	$[X^*(p)]^* = X^*(p)$	$Z[X(z)] = X(z)$
3	$[x^*(t) * y(t)]^* = x^*(t) * y^*(t)$	$[X^*(p) \cdot Y(p)]^* = X^*(p) \cdot Y^*(p)$	$Z[X(z) \cdot Y(p)] = X(z) \cdot Y(z)$
4	Par commutativité de la convolution $[x(t) * y^*(t)]^* = x^*(t) * y^*(t)$	Par commutativité de la convolution $[X(p) \cdot Y^*(p)]^* = X^*(p) \cdot Y^*(p)$	Par commutativité de la convolution $Z[X(p) \cdot Y(z)] = X(z) \cdot Y(z)$
5	$[x(t) * y(t)]^* \neq x^*(t) * y^*(t)$	$[X(p) \cdot Y(p)]^* \neq X^*(p) \cdot Y^*(p)$ $[X(p) \cdot Y(p)]^*$ noté $\overline{XY}^*(p)$	$Z[X(p) \cdot Y(p)] \neq X(z) \cdot Y(z)$ $Z[X(p) \cdot Y(p)]$ noté $\overline{XY}(z)$
	Sauf par approximation comme la TB par ex.	Sauf par approximation comme la TB par ex.	Sauf par approximation comme la TB par ex.

TB : Transformation Bilineaire (cf. chapitre 9)

1.6. Application



Soit le système :

Dès lors qu'il y a un échantillonneur dans un système, on ne peut avoir de relation permettant de calculer  $s(t)$ , (donc de connaître le signal à TC  $s(t)$  à tout instant) car l'expression de  $S(p) = TL[s(t)]$  n'est pas exploitable pour donner l'original  $s(t)$  (pas de possibilité d'utiliser les tables de  $TL$ ) du fait qu'elle fait intervenir

$$E^*(p) = E(z) = TZ[e(nT)] :$$

En Fréquence  $S(p) = H(p) \cdot E^*(p)$  avec :  $E^*(p) = TL[e^*(t)] = TL^*[e(nT)]$

En Temps  $s(t) = h(t) * e^*(t)$  avec :  $e^*(t) = \sum_n e(nT) \delta(t - nT)$

On échantillonne alors la  $TL$  pour pouvoir utiliser la  $TZ$  et ses tables :

**(Echantillonner la TL revient évidemment à échantillonner le signal temporel)**

En Fréquence  $S^*(p) = [H(p) \cdot E^*(p)]^* = H^*(p) \cdot E^*(p) \rightarrow S(z) = H(z)E(z)$

et :  $S^*(p) = TL[s^*(t)] = TL^*[s(nT)] = TZ[s(nT)] = S(z)$

En Temps  $s^*(t) = [h(t) * e^*(t)]^* = h^*(t) * e^*(t) \rightarrow s(nT) = h(nT) * e(nT)$

L'utilisation de la  $TZ$  fait que, bien qu'à TC, le signal  $s(t)$  ne sera ainsi déterminé qu'aux seuls instants

d'échantillonnage, par la connaissance du signal  $s(nT) = TZ^{-1}[S(z)]$  correspondant à la version à TD du signal à TC

$$s^*(t) = \sum_n s(nT)\delta(t - nT).$$

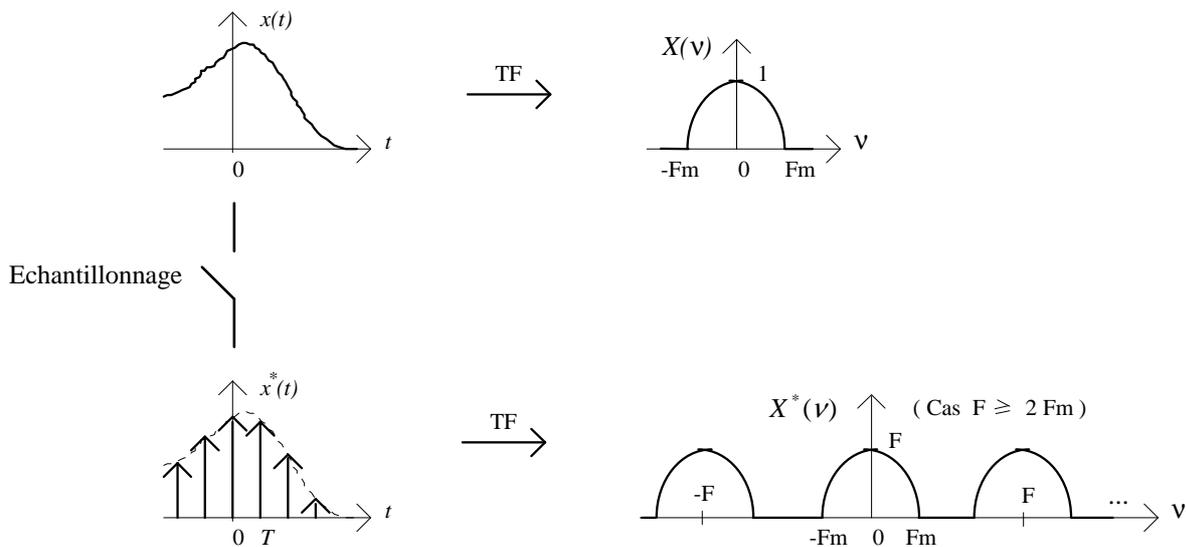
(La  $TZ$  modifiée permettant de connaître un signal entre les instants d'échantillonnage pourrait être utilisée mais les progrès technologiques font que l'accroissement de la période d'échantillonnage est généralement faisable permettant ainsi d'utiliser exclusivement la  $TZ$ ).

**2. Interpolation (≡ Reconstitution) : du TD au TC**

On va voir que l'interpolation d'un signal à TD consiste en un filtrage passe-bas.

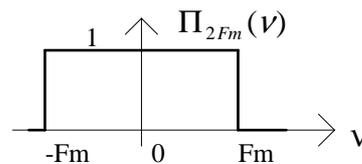
**2.1. Interpolateur idéal et Bloqueur d'ordre 0**

On a vu que le signal  $x(t)$  après échantillonnage à la fréquence  $F = \frac{1}{T}$  et noté alors  $x^*(t)$  présente un spectre périodique, de période  $F$  :

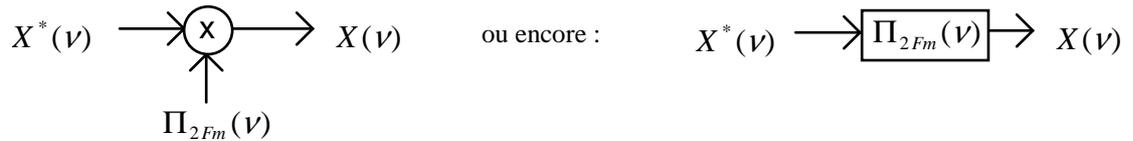


Dans le cas où  $F \geq 2F_m$ , on peut reconstituer  $x(t)$  à partir de ses échantillons  $x^*(t)$ , il suffit pour cela de filtrer le signal  $x^*(t)$  avec le filtre passe-bas idéal de Fonction de Transfert  $\Pi_{2F_m}(v)$  (au facteur d'atténuation  $1/F$  près):

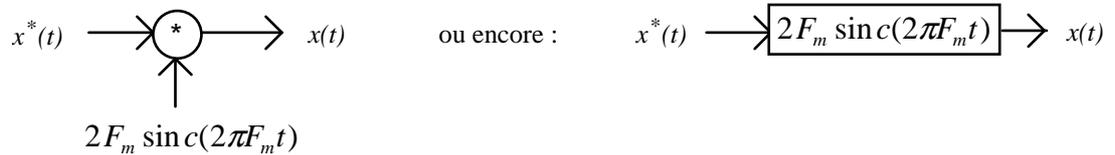
FT du filtre interpolateur idéal



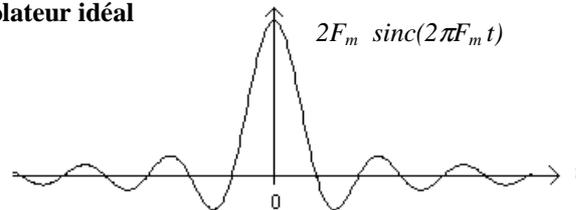
Vu en fréquence, le filtrage s'écrit :



En temps, on a, sachant que  $TF^{-1}[\Pi_{2F_m}(\nu)] = 2F_m \operatorname{sinc}(2\pi F_m t)$  :



RI du filtre interpolateur idéal



Le filtre  $\Pi_{2F_m}(\nu)$  constitue l'interpolateur idéal. (Il reconstitue  $x(t)$  à partir de ses échantillons → interpolateur).

Remarques :

- Un filtre passe-bas de raideur infinie comme  $\Pi_{2F_m}(\nu)$  n'existe pas, il peut être approché par un filtre passe-bas d'ordre élevé.
- L'interpolateur idéal est impossible à utiliser en Temps Réel car pour filtrer par  $\Pi_{2F_m}(\nu)$ , il faut connaître  $F_m$  donc le spectre de  $x(t)$ , qui se calcule pour  $t$  allant de  $-\infty$  à  $+\infty$  (une solution consiste à calculer le spectre à court terme de  $x(t)$ , i.e. sur une durée réduite, par morceaux).
- D'autre part, le filtrage de  $x^*(t)$  avec  $2F_m \operatorname{sinc}(2\pi F_m t)$  est non causal, car la convolution fait appel aux valeurs passées et futures de  $x^*(t)$  et de  $2F_m \operatorname{sinc}(2\pi F_m t)$  (RI non causale du filtre interpolateur idéal).

→ Dans la pratique,  $F_m$  est estimée à priori (ou déterminée à court terme) et l'interpolateur est réalisé avec un Bloqueur d'ordre 0, filtre passe-bas interpolateur le plus simple et causal :

Bloqueur d'ordre 0 :

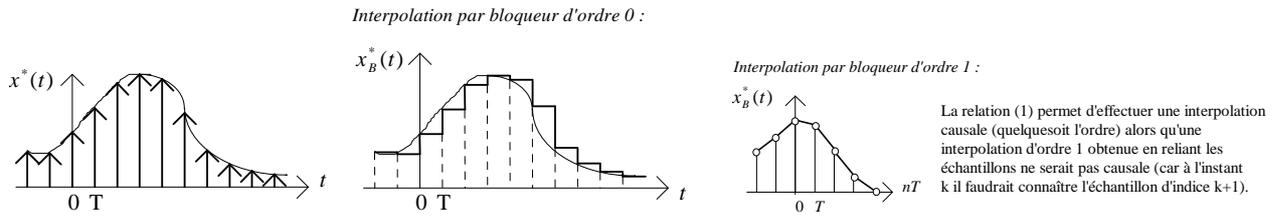
L'interpolation entre une série de points est donnée autour du point  $x(t = nT)$  par un développement en série de Taylor autour de  $t = nT$  :

$$\begin{aligned} x(t) &= x(nT + \tau) \quad \text{avec} \quad 0 \leq \tau < T \\ &= x(nT) + \tau \dot{x}(nT) + \frac{\tau^2}{2!} \ddot{x}(nT) + \dots \quad (1) \end{aligned}$$

Si on se contente de l'approximation au 1er terme, on a le Bloqueur d'ordre 0 ( $B_0$ ) :

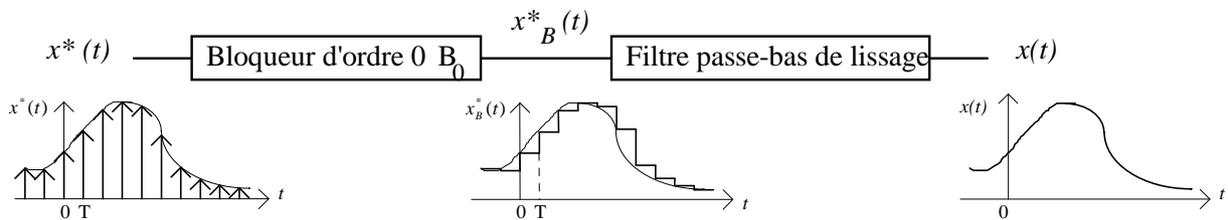
$$x(t) = x(nT + \tau) = x(nT) \quad \text{pour} \quad 0 \leq \tau < T$$

La réponse du Bloqueur d'ordre 0 à  $x^*(t)$  est notée  $x_B^*(t)$  :  
 (mémorisation de la valeur de l'échantillon pendant la période d'échantillonnage  $T$ )



Pour obtenir  $x(t)$  à partir des échantillons bloqués à la sortie du Bloqueur d'ordre 0, il suffit alors d'appliquer un second filtre passe-bas dit de lissage pour éliminer les Hautes Fréquences du signal bloqué constituées par les fronts raides ( $\equiv$  rapides) du signal.

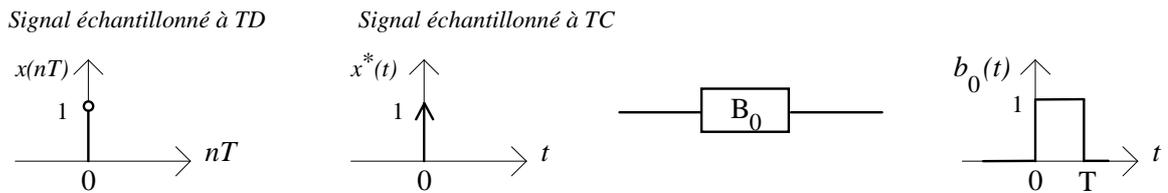
On a le même problème qu'avec l'interpolateur idéal pour déterminer la Fréquence de coupure du filtre  $F_m$ .  $F_m$  est donc prédéterminée (déterminée a priori) par la connaissance du type de signal (Ex. Parole :  $F_m \approx 3.4$  kHz), ou bien évaluée à court terme, mais cette fois le filtrage est causal (on va d'ailleurs voir que la RI du filtre bloqueur  $B_0$  est causale).



**2.2. Propriétés du Bloqueur d'ordre 0  $B_0$**

- Réponse Impulsionnelle  $b_0(t)$  du Bloqueur  $B_0$  :

L'entrée est  $x^*(t) = \delta(t)$  Impulsion de Dirac (TC) représentatif du signal à TD (delta discret)  $x(nT) = \delta(nT)$



La RI  $b_0(t)$  est causale.

- Fonction de Transfert :

La FT (de Laplace) est :  $B_0(p) = TL[b_0(t)] = \int_0^T 1 \cdot e^{-pt} dt = \frac{1 - e^{-pT}}{p}$

- Spectre :

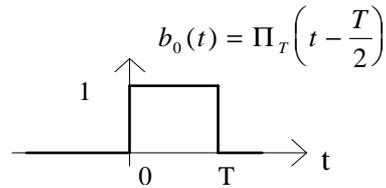
$TF[b_0(t)] = B_0(\nu) = \int_0^T 1 \cdot e^{-i2\pi\nu t} dt = T \cdot e^{-i\pi\nu T} \cdot \text{sin} c(\nu T)$

2.3. Interpolateur réel

L'interpolateur réel est donc pour l'essentiel constitué d'un bloqueur d'ordre 0 :

RI du filtre interpolateur réel

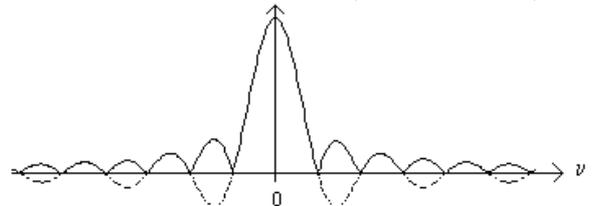
$$b_0(t) = \Pi_T\left(t - \frac{T}{2}\right)$$



FT du filtre interpolateur réel

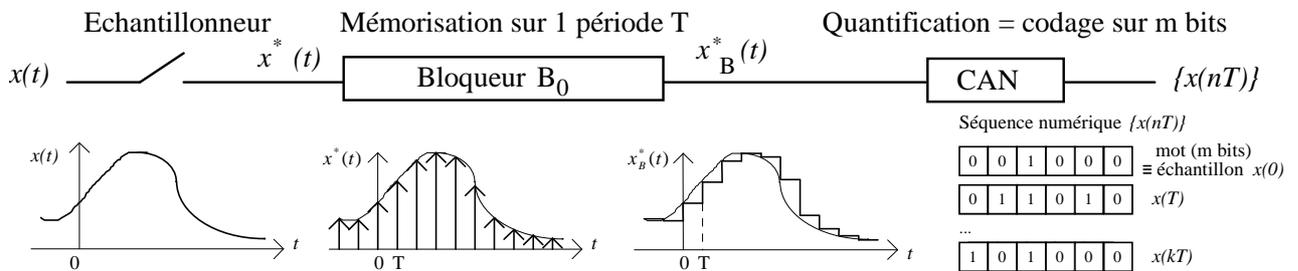
$$|B_0(\nu)| = |TF[b_0(t)]| = |Te^{-i\nu T} \text{sinc}(\nu T)|$$

$$B_0(\nu) = Te^{-i\nu T} \text{sinc}(\nu T)$$

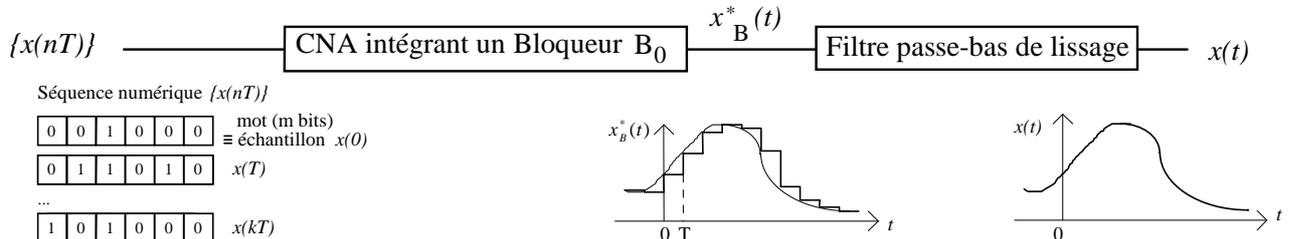


2.4. Chaîne d'acquisition numérique et de restitution d'un signal

- Acquisition :



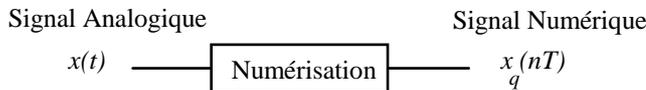
- Restitution :



3. Quantification - Codage

On va voir que la quantification se traduit par l'addition d'un bruit.

3.1. Numérisation



$$\text{Numérisation} \equiv \left\{ \begin{array}{l} \text{Echantillonnage : } x(t) \xrightarrow{(TC)} x(nT) \\ \text{et} \\ \text{Quantification : } x(nT) \rightarrow x_q(nT) \end{array} \right.$$

La Quantification transforme les valeurs continues de  $x(nT)$  en valeurs discrètes : elle peut s'écrire sous la forme d'une fonction  $Q : [x_{\min}, x_{\max}] \rightarrow \{I_p\}_{0 \leq p \leq P}$  qui transforme :  $x(t) \rightarrow x_p$  où :

- l'ensemble  $\{I_p\}_{0 \leq p \leq P}$  est une famille d'intervalles disjoints formant une partition de l'intervalle  $[x_{\min}, x_{\max}]$  ( $P \in \mathbf{N}$ )

-  $x(t)$  est un réel, représentant la valeur du signal à l'instant  $t$ , supposé appartenir à l'intervalle  $[x_{\min}, x_{\max}]$

La quantification apparaît donc comme une opération irréversible car elle fait intervenir une fonction non injective entraînant une perte d'information (bruit de quantification).

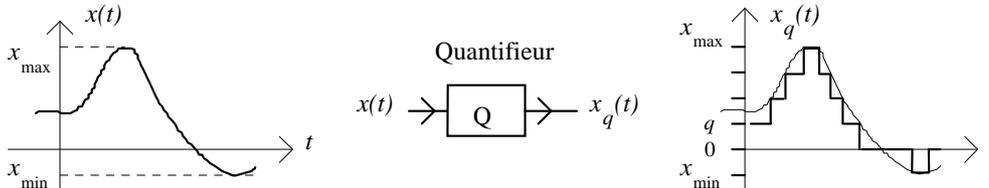
L'opération inverse de la quantification consiste à appliquer à chacun des termes d'une suite d'intervalles une fonction de la forme :

$$I_p \rightarrow x_q \quad \text{où } x_q \text{ est un réel représentant l'intervalle } I_p, \text{ par exemple la valeur de son milieu.}$$

Appelons  $q$  un échelon de quantification, c'est-à-dire la plus petite valeur fournie par le quantifieur.

Exemple : Quantification sur  $n = 8$  bits  $\rightarrow q = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2^8} = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{256}$

Quantification par troncature :



### 3.2. Quantification

L'opération de Quantification consiste à remplacer chaque valeur  $x(nT)$  des échantillons du signal  $x(t)$ , par un multiple entier  $x_q(nT)$  de l'échelon de quantification  $q$  (quantification linéaire) :

$$x(nT) \rightarrow x_q(nT) = mq \quad (\text{quantification linéaire}) \quad (m \text{ entier } \geq 0 \text{ ou } < 0)$$

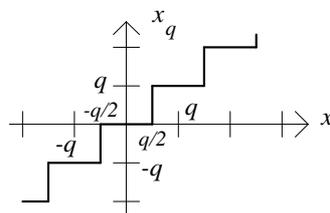
La quantification est généralement effectuée par arrondi plutôt que par défaut ( $\equiv$  troncature) car l'erreur commise par arrondi est plus faible.

Quantification par arrondi :

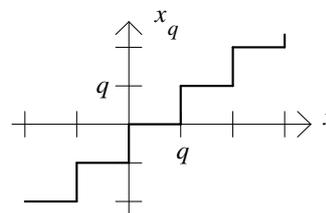
Toute valeur  $x(nT)$  du signal  $x$  telle que :  $\left(m - \frac{1}{2}\right)q \leq x(nT) < \left(m + \frac{1}{2}\right)q$  est arrondie à  $mq$ .

Quantification par troncature :

Toute valeur  $x(nT)$  du signal  $x$  telle que :  $mq \leq x(nT) < (m+1)q$  est tronquée à  $mq$ .



Quantification par Arrondi



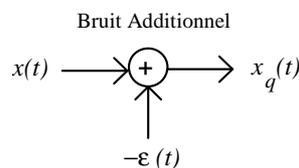
Quantification par Troncature

### 3.3. Bruit de Quantification

On peut écrire :  $x(t) = x_q(t) + \mathcal{E}(t) \rightarrow x_q(t) = x(t) - \mathcal{E}(t)$

avec  $\mathcal{E}(t)$  : signal d'erreur : écart entre  $x(t)$  et  $x_q(t)$  :

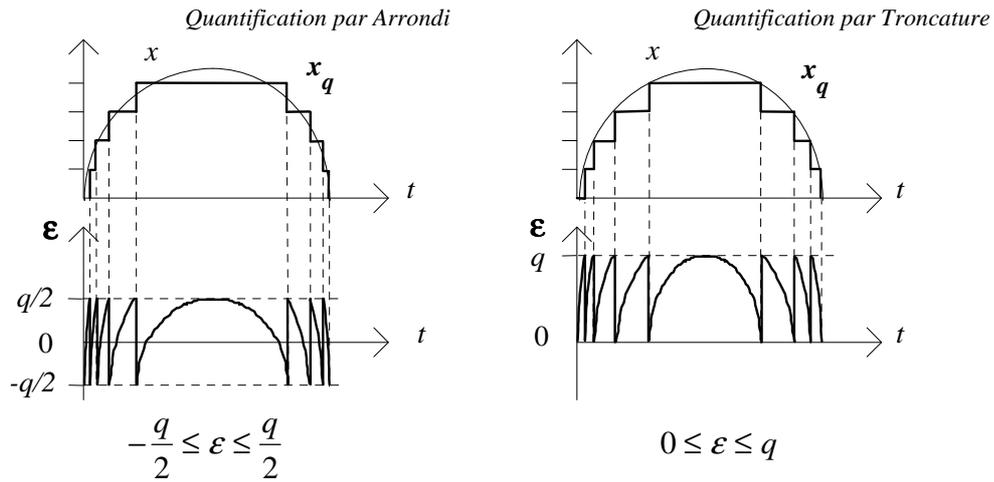
$$\mathcal{E}(t) = x(t) - x_q(t) \quad \text{Bruit (ou encore distorsion) de quantification.}$$



Le propre du numérique est d'ajouter un bruit lors de la numérisation d'un signal analogique. Les traitements ultérieurs n'introduisant plus de bruit. En analogique, le bruit s'ajoute à chaque traitement.

La numérisation qui consiste en échantillonnage et quantification peut donc en 1ère approximation se réduire à l'étape d'échantillonnage, tout au moins du point de vue formel.

En effet, l'échantillonnage implique une modification spectrale du signal (périodisation), alors que la quantification se réduit à l'addition d'un bruit qu'on sera souvent amené à négliger dans des considérations formelles. Ainsi, un CAN sera souvent ramené à un simple échantillonneur (bruit de quantification négligé).



- Valeur moyenne de  $\epsilon_{\text{arrondi}} = 0$  alors que : Valeur moyenne de  $\epsilon_{\text{troncature}} \neq 0$  :  
Le quantifieur par troncature introduit un biais systématique contrairement au quantifieur par arrondi.
- La puissance ( $\equiv$  valeur efficace) de  $\epsilon_{\text{arrondi}}$  est inférieure à celle de  $\epsilon_{\text{troncature}}$  :  
La puissance du bruit du quantifieur par troncature est plus importante que celle du quantifieur par arrondi.

**3.4. Choix du pas de quantification**

Le Rapport Signal sur Bruit RSB (*SNR : Signal to Noise Ratio*) désiré fixe le nombre de bits pour la quantification. Le RSB = 6 dB pour 1 bit de codage. Le RSB est accru de 6 dB par bit de codage supplémentaire. Un excellent RSB est de 100 dB, nécessitant alors de l'ordre de 16 bits de codage pour un échantillon.

*Démonstration :*

Plaçons nous dans le pire des cas en majorant le bruit de quantification par  $q$ . Pour un codage issu d'une résolution de 8 bits, on a :  $RSB8 = 2^8 = 256$ . Avec une dynamique de 9 bits, on a :  $RSB9 = 2^9 = 512 = 2 \cdot RSB8$  soit en dB, du fait que  $(RSB)_{dB} = 20 \log(RSB)$  :  $(RSB9)_{dB} = (RSB8)_{dB} + 6 \text{ dB}$  car  $20 \log 2 = 6 \text{ dB}$

**3.5. Codage**

Après échantillonnage et quantification, le signal  $x_q(nT)$  est représenté par une séquence de valeurs numériques.

*Codage binaire linéaire :*

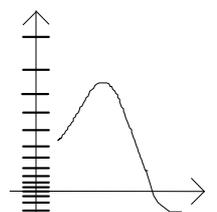
Si la gamme des variations du signal  $x_q$  couvre le champ  $[x_{\min}, x_{\max}]$  on a :  $x_{\max} - x_{\min} = 2^n \cdot q$  si on code les valeurs de  $x_q$  sur  $n$  bits.

*Codage non linéaire :*

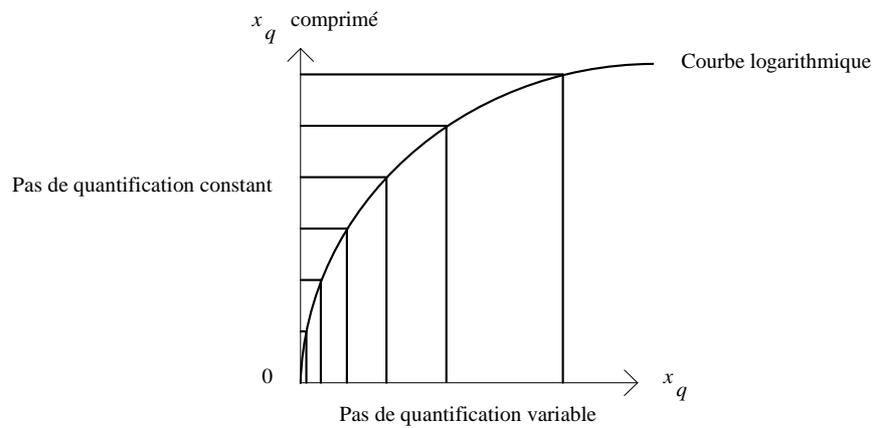
Il est préférable de faire varier l'échelon de quantification  $q$  avec l'amplitude du signal.  
→ les signaux n'étant pas souvent à leurs valeurs extrémales (cas général) sont codés avec une meilleure précision ( meilleur rapport S/B (Signal/Bruit) ).

$$q \neq C^{te} \neq \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2^n}$$

*Pas de quantification augmentant avec l'amplitude du signal*

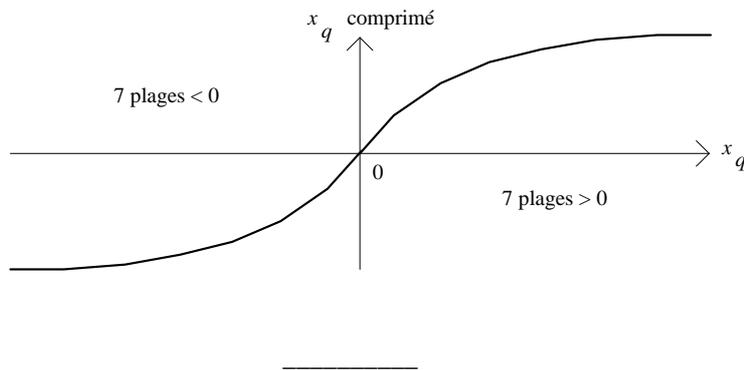


- La variation du pas de quantification en fonction de l'amplitude est choisie le plus souvent exponentielle.
- Coder le signal  $x_q$  avec un pas de quantification  $q$  exponentiel revient à comprimer le signal  $x_q$  sur les faibles amplitudes et le quantifier avec un pas constant :



On a alors : Codage non linéaire de  $x_q =$  Compression (log.) de  $x_q$  suivie d'un codage linéaire de  $x_q$  .

Exemple : Téléphone : la courbe log. de compression est approchée par un polygone à 13 segments :



## TD 5. Echantillonnage - Interpolation - Quantification

### 1. Echantillonnage - Théorème de Shanonn

Soit le signal :  $x(t) = \sin c(2\pi\nu_0 t)$

- Quel spectre de fréquences occupe-t-il ?
- Quelle fréquence d'échantillonnage minimale  $F$  choisir ?
- Quelle occupation mémoire en résulte-t-il pour mémoriser 1 seconde du signal en se limitant à une dynamique de 8 bits (1 échantillon est stocké sur 1 octet) ?

A.N :  $\nu_0 = 20 \text{ kHz}$  (occupation fréquentielle du signal de musique).

### 2. Echantillonnage - Repliement des fréquences (forme temporelle) $\equiv$ sous-échantillonnage

Soit un signal  $x(t)$  harmonique ( $\equiv$  sinusoïdal) de fréquence  $f$ . Représenter le signal échantillonné à la fréquence d'échantillonnage  $F = \frac{4}{3} f$ . Mettre en évidence le repliement des fréquences sous forme temporelle (**fausse image du signal**).

### 3. Echantillonnage - Repliement des fréquences (forme fréquentielle)

Supposons que se superpose au signal parole (spectre de 300 Hz à 3 kHz) une interférence sinusoïdale  $f_i = 6 \text{ kHz}$ . La transmission numérique téléphonique s'effectue à la fréquence d'échantillonnage  $F = 8 \text{ kHz}$ . Mettre en évidence le repliement des fréquences sous forme fréquentielle. Solutions ?

### 4. Interpolation

a) Montrer, en déterminant  $Y(\nu)$ , que le Bloqueur d'ordre 0 ( $B_0$ ) n'est pas un interpolateur idéal car :

$$x^*(t) \xrightarrow{\text{B}_0} y(t) \neq x(t)$$

b) Montrer l'intérêt du filtre passe-bas nécessaire en sortie du Bloqueur  $B_0$  pour restituer  $x(t)$  plus précisément.

c) Montrer l'intérêt de la correction de la RI du Bloqueur  $B_0$  par une fenêtre de pondération pour restituer  $x(t)$  plus précisément.

### 5. Bruit de quantification

On utilise une dynamique ( $\equiv$  résolution) de 8 bits pour coder les échantillons d'un signal numérique.

- Dans quelle proportion le rapport Signal/Bruit est-il accru si l'on ajoute 1 bit de dynamique supplémentaire ?

## TD 5 ANNEXE. Echantillonnage - Interpolation - Quantification

### 1. Quantification

Montrer que, en considérant le cas simple où les variations du signal à quantifier sont grandes par rapport à l'échelon de quantification  $q$ , la quantification par arrondi est meilleure que celle par troncature; c'est-à-dire que si on appelle  $\varepsilon$  le bruit de quantification, on a :

*Quantification par arrondi :*

Valeur moyenne de  $\varepsilon = 0$

Valeur efficace de  $\varepsilon = q / \sqrt{12}$

*Quantification par troncature :*

Valeur moyenne de  $\varepsilon = q / 2$

Valeur efficace de  $\varepsilon = q / \sqrt{3}$

## TP 5 ANNEXE. Echantillonnage - Interpolation - Quantification

### 1. Filtre récursif

Programmer le filtre déjà rencontré:  $y(n) = x(n) + \alpha y(n-1)$  et comparer avec la théorie.

### 2. Filtre récursif

Programmer le filtre défini par l'équation aux différences:  $y(n) = 4x(n) - 4x(n-1) - 0.1y(n-1)$  déjà rencontré, et comparer avec la théorie.

### 3. Echantillonnage - Filtre 1er ordre

Soit le filtre du 1er ordre :  $H(\nu) = \frac{1}{1+i(\nu/10)}$ . Quelle période d'échantillonnage T choisir ?

Vérifier en traçant la Réponse Impulsionnelle du filtre.

### 4. Quantification

Soit le signal:  $x_1(nT) = \sin(2\pi f nT) e^{nT/10}$  avec  $f = 0.1$  Hz et  $T = 1$  s.

Visualiser les effets de la quantification linéaire avec une dynamique sur 8 niveaux en programmant :

a) Sa quantification par arrondi  $x_{1a}$ , et le bruit de quantification  $\mathcal{E}_{1a} = x - x_{1a}$

b) Sa quantification par troncature  $x_{1t}$ , le bruit de quantification  $\mathcal{E}_{1t}$  correspondant :  $\mathcal{E}_{1t} = x - x_{1t}$

Mêmes questions a) b) pour le signal :  $x_2(nT) = \sin(2\pi f nT)$  avec  $f = 0.1$  Hz et  $T = 1$  s.

---

## 6. Transformation de Fourier Discrète (TFD - DFT) - Transformation de Fourier Rapide (TFR - FFT)

### 1. TFD

La TFD est utilisée pour calculer la TF par calculateur numérique d'un signal  $x(t)$  :

$$TF[x(t)] = X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-i2\pi ft} dt \quad : \quad \text{Formule non implémentable sur calculateur numérique.}$$

$f$  est la fréquence

3 problèmes sont à résoudre pour pouvoir programmer cette formule :

1)  $x(t) \rightarrow x^*(t)$

Le calculateur n'a pas accès au signal  $x(t)$  d'origine, mais au signal  $x^*(t)$  représentant la séquence temporelle  $\{x_n\}$  des échantillons  $\{x(nT)\}$  obtenus par échantillonnage périodique à période  $T$  du signal  $x(t)$ .

2)  $\int_{-\infty}^{\infty} \rightarrow \sum_{\text{sur } M \text{ échantillons}}$

L'intégrale ou somme continue n'est pas programmable (et l'intervalle infini non plus); il faut la remplacer par une somme discrète et sur un nombre fini  $M$  d'échantillons.

3)  $X(f) \rightarrow X_k$

Le calculateur ne peut fournir une expression à fréquence continue  $X(f)$  du résultat, mais seulement un nombre limité de valeurs  $X_k$  : la fréquence  $f$  ne peut prendre que des valeurs discrètes : il y a échantillonnage en fréquence.

Regardons l'influence de ces 3 problèmes :

#### 1.1. TF du signal échantillonné (problème 1)

Le calcul de  $X(f) = TF[x(t)]$  ne peut être obtenu, mais seulement celui de  $X^*(f) \stackrel{\Delta}{=} TF[x^*(t)]$  avec :

$$x^*(t) = x(t) \cdot \text{II}_T(t) \quad \text{et} \quad \text{II}_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

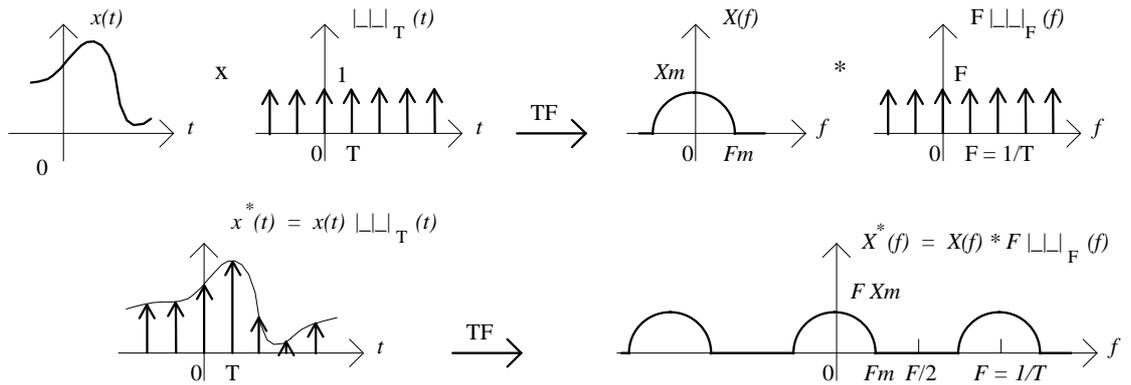
On a, en posant  $F = 1/T$ :  $X^*(f) = TF[x(t) \cdot \text{II}_T(t)] = X(f) * TF[\text{II}_T(t)] = F X(f) * \text{II}_F(f) = F \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nF)$

On en tire  $X(f)$  recherchée en faisant  $n = 0$  ( $f \in [-F/2, F/2]$ ) :

$$\boxed{\begin{matrix} X(f) = T \cdot X^*(f) \\ \text{pour } f \in \left[-\frac{F}{2}, \frac{F}{2}\right] \end{matrix}} \quad (1)$$

$$\left| \begin{matrix} X(f) = T \cdot X^*(f) = T \int_{-\infty}^{\infty} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT) \right) e^{-i2\pi ft} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T \cdot x(nT) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) e^{-i2\pi ft} dt = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \cdot e^{-i2\pi fnT} = T \cdot X^*(f) \\ \text{pour } f \in \left[-\frac{F}{2}, \frac{F}{2}\right] \end{matrix} \right.$$

Représentation spectrale :



Si  $F \geq 2 F_m$ , on a bien :

$$X(f) = T X^*(f)$$

dans le domaine  $f \in \left[-\frac{F}{2}, \frac{F}{2}\right]$

1.2. Influence de la limitation du nombre d'échantillons (problème 2)

La mémoire du calculateur numérique est limitée → utilisation d'un nombre limité M d'échantillons.

Le calcul de l'expression précédente :

$$X(f) = T X^*(f) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{-i2\pi f n T}$$

$$f \in \left[-\frac{F}{2}, \frac{F}{2}\right]$$

devient :

$$X_M(f) = T \cdot \sum_{n=-(M-1)/2}^{(M-1)/2} x(nT) e^{-i2\pi f n T} \quad (M \text{ impair})$$

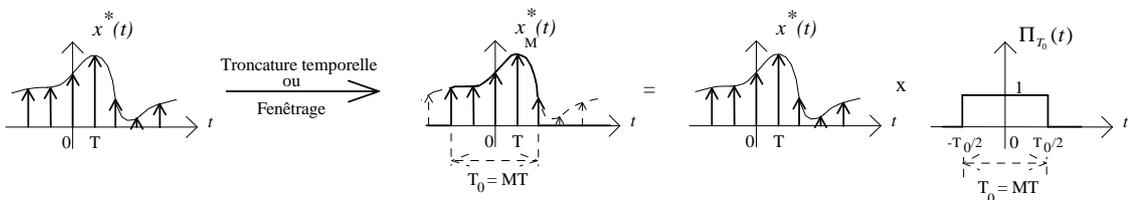
$$f \in \left[-\frac{F}{2}, \frac{F}{2}\right]$$

Le calculateur n'a donc accès qu'aux échantillons d'une séquence  $x_M^*$  de durée  $T_0 = MT$  du signal  $x^*(t)$

et on a :  $x_M^*(t) = x^*(t) \Pi_{T_0}(t)$  où  $\Pi_{T_0}(t)$  est la fonction Porte (ou Fenêtre) de largeur  $T_0$  :

$$\Pi_{T_0}(t) = 1 \quad \text{si} \quad -\frac{T_0}{2} < t < \frac{T_0}{2}$$

$$= 0 \quad \text{sinon}$$



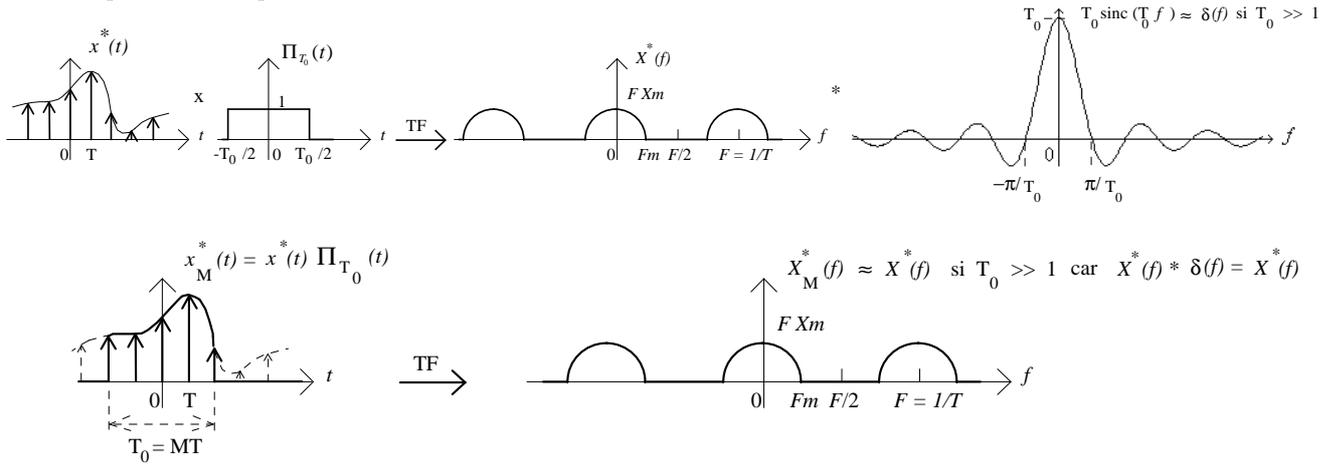
Cette troncature temporelle (≡ fenêtrage) du signal  $x^*(t)$  se traduit en fréquence par une convolution avec

$$TF[\Pi_{T_0}(t)] = T_0 \text{sinc}(T_0 f)$$

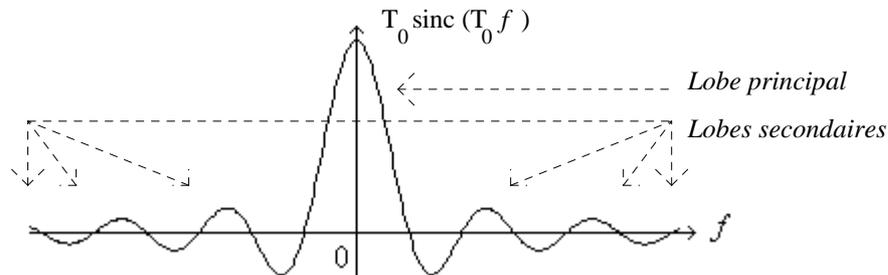
Si  $T_0$  est suffisamment grand (fenêtre de troncature assez large), on peut faire l'approximation :

$$\Pi_{T_0}(t) = 1 \quad \forall t \quad \text{et donc} \quad TF[\Pi_{T_0}(t)] \approx TF[1] = \delta(f)$$

Représentation spectrale :



L'effet du fenêtrage ( $\equiv$  troncature temporelle), d'autant plus important que  $T_0$  est faible, est de déformer (élargir)  $X^*(f)$ , à cause de l'action des lobes secondaires de  $T_0 \text{sinc}(T_0 f)$  :



Cet effet de troncature temporelle lié à la limitation du nombre  $M$  d'échantillons pour le calcul de la TF peut être corrigé en superposant à cette fenêtre **rectangulaire**  $\Pi_{T_0}(t)$ , une autre fenêtre,  $f(t)$ , dite de pondération. Cette dernière ayant une durée égale à  $T_0$ , on peut dire plutôt qu'elle remplace la fenêtre naturelle  $\Pi_{T_0}(t)$  de troncature initiale.

Cette fenêtre doit être telle que sa TF présente :

- un lobe principal le plus étroit possible.
- peu ou pas de lobes secondaires.

pour tendre vers  $\delta(f)$  (convoluer avec  $\delta(f) \equiv$  ne rien faire).

Il existe de nombreuses fenêtres de troncature  $f(t)$  de pondération (voir § 1.4) :

Fenêtres de Bartlett (triangulaire), de Hann, de Hamming (la plus connue), de Hanning, de Blackman, de Kaiser, etc...

En négligeant la déformation causée par la troncature due au fenêtrage lié à la limitation du nombre d'échantillons  $M$ , on a donc finalement :

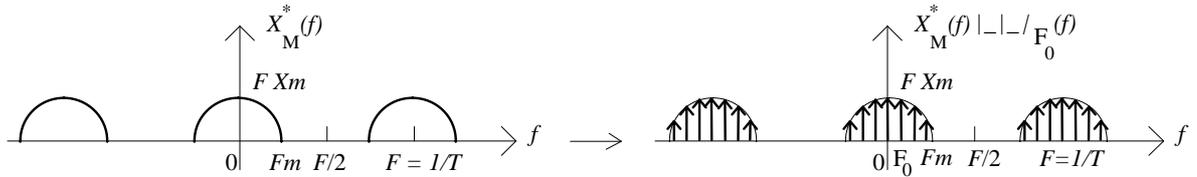
$$\boxed{
 \begin{aligned}
 X(f) &= T X^*(f) = T X_M^*(f) = T \sum_{n=-(M-1)/2}^{(M-1)/2} x(nT) \cdot e^{-i2\pi f n T} \quad \text{avec } T_0 \gg 1 \\
 \text{dans } &\left[ -\frac{F}{2}, \frac{F}{2} \right]
 \end{aligned}
 } \tag{2}$$

1.3. Echantillonnage de la TF d'un signal échantillonné (problème 3)

Dans l'expression précédente  $TX^*(f)$ , la variable  $f$  est continue, non dénombrable et le calculateur numérique ne peut fournir de résultats que pour un nombre limité de valeurs de la fréquence  $f$ ;  $f$  ne peut prendre que des valeurs discrètes :

$$\begin{cases} f = kF_0 \\ f \in \left[-\frac{F}{2}, \frac{F}{2}\right] \end{cases} \quad \text{avec :} \quad F_0 : \text{période (fréquentielle) d'échantillonnage de } X^*(f).$$

→  $X_M^*(f)$  se trouve multiplié par un peigne  $\text{III}_{F_0}(f)$  :



- Résumons les 3 problèmes 1) 2) et 3) :

$$x(t) \xrightarrow{TF} X(f)$$

Problème 1) :

$$x^*(t) = x(t) \cdot \text{III}_T(t) \xrightarrow{TF} X^*(f) = FX(f) * \text{III}_{F_0}(f) = \begin{cases} FX(f) \\ \text{sur } f \in \left[-\frac{F}{2}, \frac{F}{2}\right] \end{cases}$$

Problème 2) :

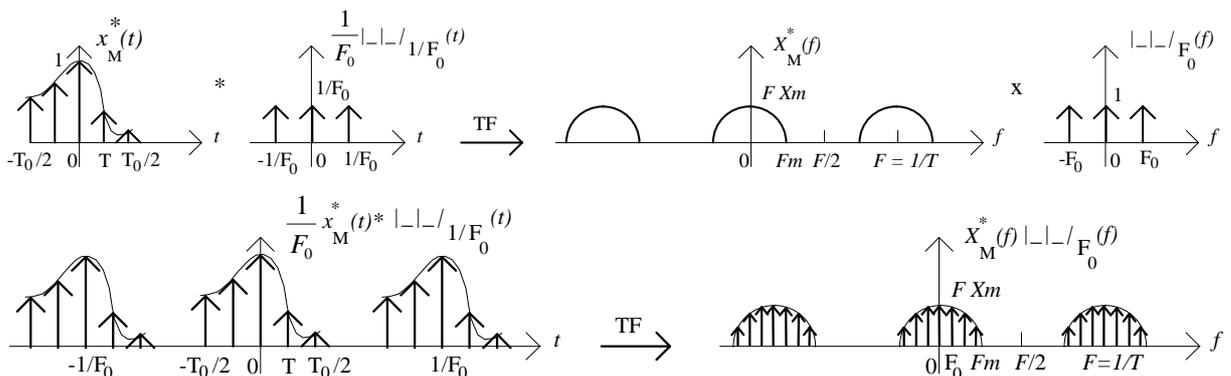
$$\begin{cases} x^*(t) = x_M^*(t) \\ \text{sur une durée } T_0 \end{cases} \xrightarrow{TF} \begin{cases} X_M^*(f) \approx X^*(f) \\ \text{avec } T_0 \gg 1 \end{cases} = \begin{cases} FX(f) \\ \text{sur } f \in \left[-\frac{F}{2}, \frac{F}{2}\right] \end{cases}$$

Problème 3) :

$$X_M^*(kF_0) = X_M^*(f) \text{III}_{F_0}(f) \xrightarrow{TF^{-1}} x_M^*(t) * \frac{1}{F_0} \text{III}_{1/F_0}(t) = \begin{cases} \frac{1}{F_0} x_M^*(t) \\ \text{sur } \left[-\frac{1}{2F_0}, \frac{1}{2F_0}\right] \text{ si } \frac{1}{F_0} \geq T_0 \text{ (condition de Shannon)} \end{cases}$$

(Condition de Shannon « temporelle »)

$$\text{Donc, si } \frac{1}{F_0} \geq T_0 : \begin{cases} FX(f) \xrightarrow{TF^{-1}} \frac{1}{F_0} x_M^*(t) \text{ sur } \left[-\frac{1}{2F_0}, \frac{1}{2F_0}\right] \\ f \in \left[-\frac{F}{2}, \frac{F}{2}\right] \end{cases}$$



On a donc :

$$\left| \begin{array}{l} X_M^*(kF_0) = X_M^*(f) = F X(f) \\ f \in \left[-\frac{F}{2}, \frac{F}{2}\right] \text{ avec } f = kF_0 \text{ si } \frac{1}{F_0} \geq T_0 \end{array} \right. \xrightarrow{TF^{-1}} \left| \begin{array}{l} \frac{1}{F_0} \cdot x_M^*(t) \\ \text{sur une durée } \frac{1}{F_0} \end{array} \right.$$

Le fait d'avoir échantillonné en fréquence a divisé par  $F_0$  en temps. Il suffit donc dans l'expression (2) de multiplier par  $F_0$  et de faire  $f = kF_0$  :

$$\left| \begin{array}{l} X(kF_0) = TF_0 \sum_{n=-\frac{(M-1)}{2}}^{(M-1)/2} x(nT) \cdot e^{-i2\pi knF_0T_0} \\ \text{dans } \left[-\frac{F}{2}, \frac{F}{2}\right] \text{ si } \frac{1}{F_0} \geq T_0 \end{array} \right. \text{ avec } -\frac{1}{2F_0} \leq nT \leq \frac{1}{2F_0}$$

En choisissant  $\frac{1}{F_0} = T_0 (= MT)$  (cas limite imposé par la condition de Shannon), on a la simplification :

$$X(kF_0) = \frac{1}{M} \sum_{n=-\frac{(M-1)}{2}}^{(M-1)/2} x(nT) e^{-\frac{i2\pi kn}{M}} \text{ avec } \left| \begin{array}{l} -\frac{1}{2F_0} \leq nT \leq \frac{1}{2F_0} \\ -\frac{F}{2} \leq kF_0 \leq \frac{F}{2} \\ F = \frac{1}{T} \\ \frac{1}{F_0} = T_0 = MT \end{array} \right.$$

Comme  $-\frac{F}{2} \leq kF_0 \leq \frac{F}{2}$  et  $F = \frac{1}{T}$  et  $F_0 = MT$  on a :

$x(nT)$  qui comporte  $M$  termes et  $X(kF_0)$  qui comporte  $M$  termes aussi.

On a donc :

$TFD\{x(nT)\} = X(k) = X(kF_0) = \frac{1}{M} \sum_{n=-\frac{(M-1)}{2}}^{(M-1)/2} x(nT) e^{-\frac{i2\pi kn}{M}} \text{ avec}$	<p>Duree <math>T_0 = MT = 1/F_0</math>  <math>M</math>: nombre d'échantillons de <math>x(nT)</math> et de <math>X(kF_0)</math></p> $\left  \begin{array}{l} -\frac{1}{2F_0} \leq nT \leq \frac{1}{2F_0} \\ -\frac{F}{2} \leq kF_0 \leq \frac{F}{2} \\ F = \frac{1}{T} \end{array} \right.$
--	--

La séquence  $\{x(nT)\}$  de  $M$  valeurs a donc pour TFD la séquence  $X(k)$  de  $M$  valeurs aussi, représentant la TF de  $x(t)$ , donnée par la relation :

$$X(k) = \frac{1}{M} \sum_{n=-\frac{(M-1)}{2}}^{(M-1)/2} x(nT) e^{-i2\pi kn/M}$$

Relations pour des séquences discrètes  $\{x(n)\}$  causales :

$x(n)$ M termes et causale	$\xrightarrow{TFD}$	$X(k) = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} x(n)e^{-i2\pi kn/M} = TFD[x(n)]$ M termes
-------------------------------	---------------------	---

avec :

Si les  $M$  échantillons de  $\{x(n)\}$  [ $0 \leq n \leq M-1$ ] représentent la durée  $T_0$  [ $0 \leq nT < 1/F_0 = T_0 = MT$ ], la bande de fréquences  $kF_0$  calculée pour la TFD  $X(k)$  est :

$$[0 \leq kF_0 < F=1/T \text{ avec } 0 \leq k < M] \text{ soit } F = M/T_0.$$

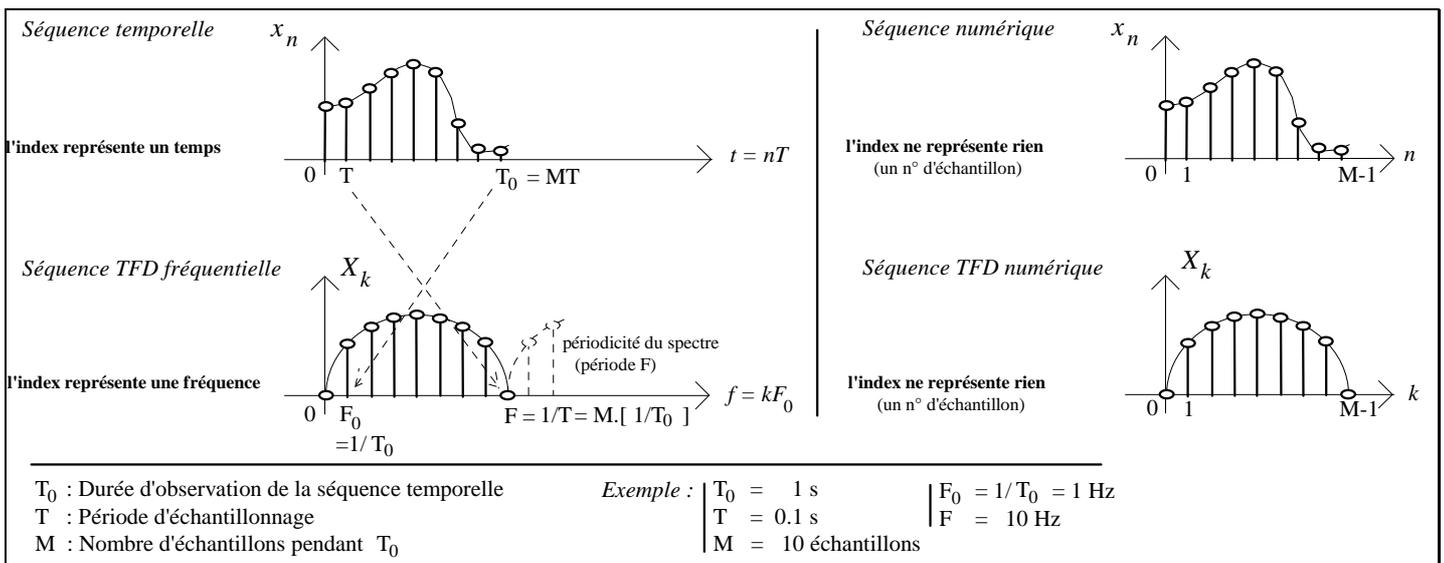
**TFD Inverse (TFDI) :**

Elle est donnée par la relation :

$$\begin{matrix} x(n) \\ M \text{ termes} \end{matrix} = \begin{matrix} \sum_{k=0}^{M-1} X(k)e^{i2\pi kn/M} \\ M \text{ termes} \end{matrix} = TFDI[X(k)]$$

**Interprétation**

$$t = nT \rightarrow f = kF/M$$



$$F_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{F}{M}$$

- Si l'on veut espérer « voir » des composantes spectrales  $X(f)$  d'un signal  $x(t)$  jusqu'à une fréquence  $F$ , il faut échantillonner  $x(t)$  au moins à la fréquence d'échantillonnage  $F$ , soit au plus à la cadence  $T = 1/F$ .

- L'incrément fréquentiel du spectre  $X(f)$  de  $x(t)$  est  $1/T_0$  où  $T_0$  est la durée d'observation, de fenêtrage, de  $x(t)$ .

**Variante**

On rencontre d'autres définitions de la TFD, notamment celle proposant un passage direct - inverse symétrique :

$$TFD : X(k) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{n=0}^{M-1} x(n)e^{-i2\pi kn/M}$$

$$TFDI : x(n) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{k=0}^{M-1} X(k)e^{i2\pi kn/M}$$

**Propriété de symétrie de la TFD d'une séquence réelle (symétrie Hermitique)**

La relation de définition (cas causal par exemple) :  $\left\{ \begin{array}{l} x_n \\ M \text{ termes} \end{array} \right. \xrightarrow{TFD} \left\{ \begin{array}{l} X_k = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} x_n e^{-i2\pi kn/M} \\ M \text{ termes} \end{array} \right.$  possède la

propriété suivante (symétrie) dans le cas particulier de signaux réels :  $(\bar{X}_k \text{ représente le complexe conjugué de } X_k)$

$$\boxed{x_n \text{ réel} \xrightarrow{TFD} X_{M-k} = \bar{X}_k \text{ pour } k = 1 \rightarrow M/2}$$
 d'où :

$$\boxed{x_n \text{ réel} \xrightarrow{TFD} |X_k| = |X_{M-k}| \text{ pour } k = 1 \rightarrow M/2}$$
 et aussi :

$$x_n \text{ réel} \xrightarrow{TFD} \text{Arg } X_k = -\text{Arg } X_{M-k} \text{ pour } k = 1 \rightarrow M/2$$

Cette propriété de **symétrie du spectre d'un signal échantillonné** traduit directement la **périodisation du spectre pour un signal échantillonné**.

*Démonstration*

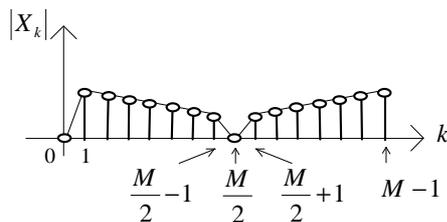
$$X_{M-k} = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} x_n e^{-i2\pi(M-k)n/M} = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} x_n e^{i2\pi kn/M}$$

$$\rightarrow X_{M-k} = \bar{X}_k \text{ si } x_n \text{ réel}$$

$$\rightarrow |X_k| = |X_{M-k}| \text{ si } x_n \text{ réel}$$

*Application 1 : Symétrie Hermitique*

Soit le spectre d'amplitude suivant d'un signal réel : ( $M$  points de  $X_k$ ,  $k = 0 \rightarrow M-1$  :  $|X_{M-1}| = |X_1|$ ,  $|X_{\frac{M}{2}+1}| = |X_{\frac{M}{2}-1}|$ , ...)



La partie de  $|X_k|$  pour  $k = \frac{M}{2} \rightarrow M-1$  s'obtient à partir de celle de  $|X_k|$  ( $k = 0 \rightarrow \frac{M}{2}-1$ ) par la relation :

$$|X_k| = |X_{M-k}| \quad (\text{renversement de la fréquence, miroir par rapport à } k = \frac{M}{2})$$

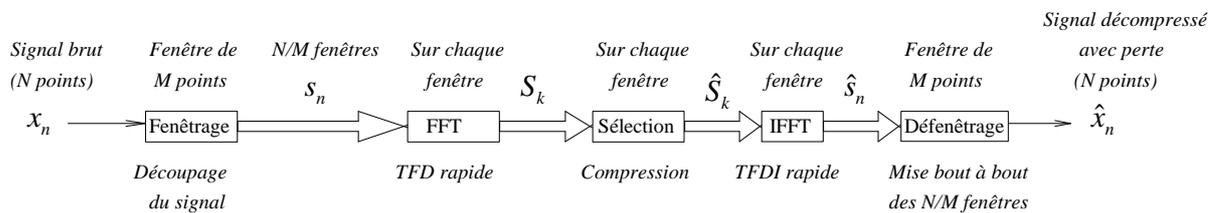
$\rightarrow$  Seule la connaissance de  $X_k$  de  $k = 0 \rightarrow \frac{M}{2}$  (soit les  $\frac{M}{2} + 1$  premiers points de  $X_k$ ) est nécessaire à calculer (les points restants se déduisent par la relation  $|X_k| = |X_{M-k}|$ ).

Application 2 : Compression de signal

- Compression sans perte : Les propriétés précédentes :  $\begin{cases} |X_k| = |X_{M-k}| \\ \text{Arg } X_k = -\text{Arg } X_{M-k} \end{cases}$  pourraient laisser croire qu'une

compression sans perte d'un facteur 2 est possible en caractérisant une séquence réelle  $x_n$  par sa TFD  $X_k$  (la décompression consiste alors un simple calcul de TFDI), mais pour représenter les  $M$  points de la séquence initiale  $x_n$ , il faut stocker  $M/2$  points du module et  $M/2$  points de l'argument, soit  $M$  points au total, ce qui n'apporte aucune compression.

- Compression avec perte : Par contre, on peut effectuer une compression  $\hat{x}_n$  (avec perte) du signal  $x_n$  selon le schéma suivant :



- Fenêtrage : Fenêtrage rectangulaire, glissant et sans recouvrement, sur  $M$  points (valeur typique :  $M = 256$ )  
 Variante : un autre fenêtrage (Hamming, Blackman ...) peut aussi être réalisé à la place du fenêtrage triangulaire.

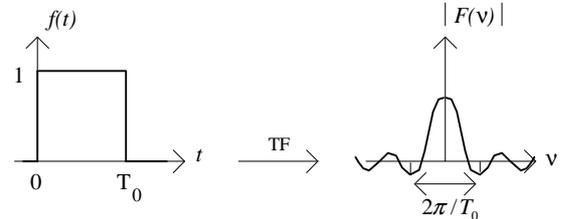
- Sélection : Sur les  $\frac{M}{2} + 1$  premiers points de  $|S_k|$ , on ne garde que les  $D$  plus grandes valeurs de  $|S_k|$  (Dominantes harmoniques), le reste des points de  $S_k$  est mis à 0 (valeur typique :  $D = 64$ )

Variante : A la place de retenir les  $D$  dominantes de  $|S_k|$ , on peut aussi retenir les  $D$  premiers points de  $|S_k|$  si le signal est à basses fréquences (il est en tout cas impossible d'avoir des fréquences infiniment élevées dans le signal, car celui-ci ne peut être infiniment rapide (théorie de la relativité)).

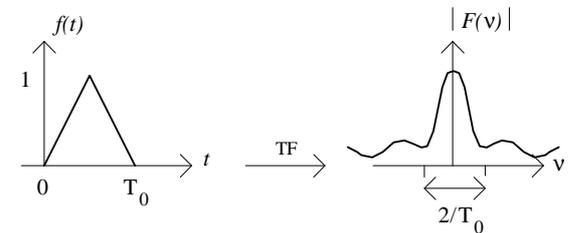
1.4. Fenêtres de troncature de pondération (fenêtres de compensation)

La fenêtre de troncature à utiliser, lorsqu'on prélève une partie d'un signal pour extraire les caractéristiques fréquentielles (≡ spectrales) du signal entier, doit être telle que sa TFD doit se rapprocher le plus possible de  $\delta$ , avec un lobe principal le plus étroit possible et des lobes secondaires le plus plat possible, la fenêtre se comportant alors de façon la plus transparente, la moins déformante possible. Malheureusement, on ne peut avoir ces 2 performances maximales pour une fenêtre donnée, et on doit faire un compromis entre ces 2 performances, conduisant ainsi non pas à une fenêtre unique de troncature d'un signal mais à différentes fenêtres.

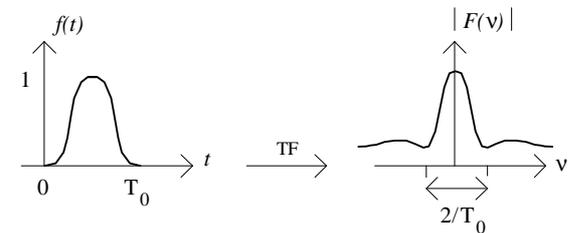
. Fenêtre rectangulaire (basique) :  $f(t) = \Pi_{T_0}\left(t - \frac{T_0}{2}\right)$



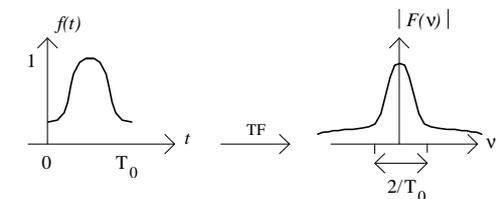
. Fenêtre de Bartlett (triangulaire) :  $f(t) = 1 - \frac{|t - \frac{T_0}{2}|}{\frac{T_0}{2}}$



. Fenêtre de Hann :  $f(t) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \cos\left(2\pi \frac{(t - \frac{T_0}{2})}{T_0}\right) \right]$



. Fenêtre de Hamming :  $f(t) = 0.54 + 0.46 \cos\left[2\pi \frac{(t - \frac{T_0}{2})}{T_0}\right]$



(améliore celle de Hann)

. Fenêtre de Blackman :

. Fenêtre de Kaiser :

. Fenêtre de de Hanning ...

1.5. Applications

1.5.1. Spectrogramme

La TFD est évidemment utilisée pour le calcul de spectre :

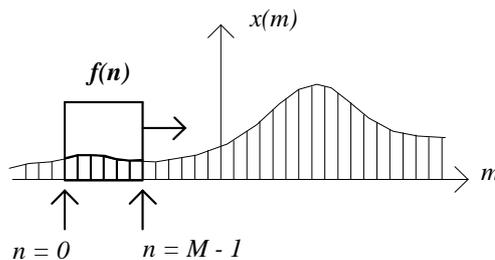
- Amplitude  $|X(k)|$
- Phase  $Arg X(k)$
- Puissance  $|X(k)|^2 = Re^2[X(k)] + Im^2[X(k)]$

La TFD donne l'occupation en fréquence d'un signal. Elle n'est pas adaptée aux signaux non stationnaires et, par exemple, la visualisation de la TFD s'un signal ne permet pas directement de savoir à quel instant de ce signal se produit, correspond, un pic de fréquence donnée de son spectre (même si on sait qu'un signal rapide occupe des fréquences d'autant plus élevées que le signal est rapide).

La visualisation dynamique (≡ en fonction du temps) des fréquences occupées par le signal (analyse temps-fréquence) peut néanmoins être réalisée en découpant le signal à caractériser en plusieurs fenêtres et en calculant la TFD sur chacune de ces fenêtres. C'est le spectrogramme.

Spectrogramme

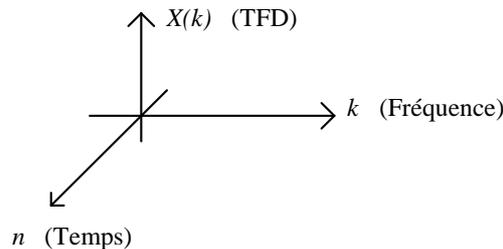
Une application importante est la TFCT (TF à court terme) utilisée en Traitement de la Parole : on applique la TFD au signal  $x(n)$  en faisant glisser la fenêtre  $f(n)$  de prise d'échantillons :



On obtient alors, pour chaque indice  $n$  de fenêtre  $f(n)$ , une TFD :

$$X(k) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} x(m) e^{-i2\pi km/M}$$

et au total, non plus un spectre (2D), mais un spectrogramme (3D) (*Représentation Temps-Fréquence*) :

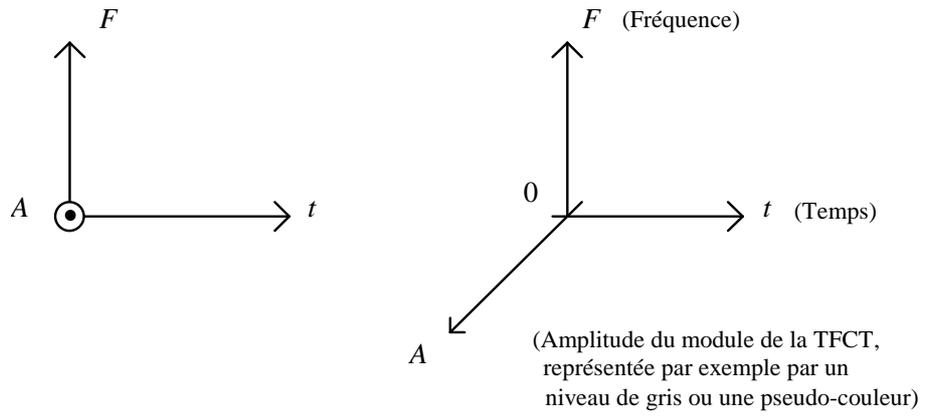


On a la relation de définition de la TFCT :

$$X(n, k) = \frac{1}{M} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) f(n-m) e^{-\frac{i2\pi km}{M}}$$

$f(n)$  pouvant être une fenêtre de pondération (Blackman, Bartlett ...) plutôt qu'une simple fenêtre rectangulaire de troncature.

Représentation 3D du spectrogramme



**"EVERY SALT BREEZE COME FROM THE SEA"**

Frequency (kHz)



**WIDEBAND (Nombre d'échantillons  $M$  grand)**

Frequency (kHz)

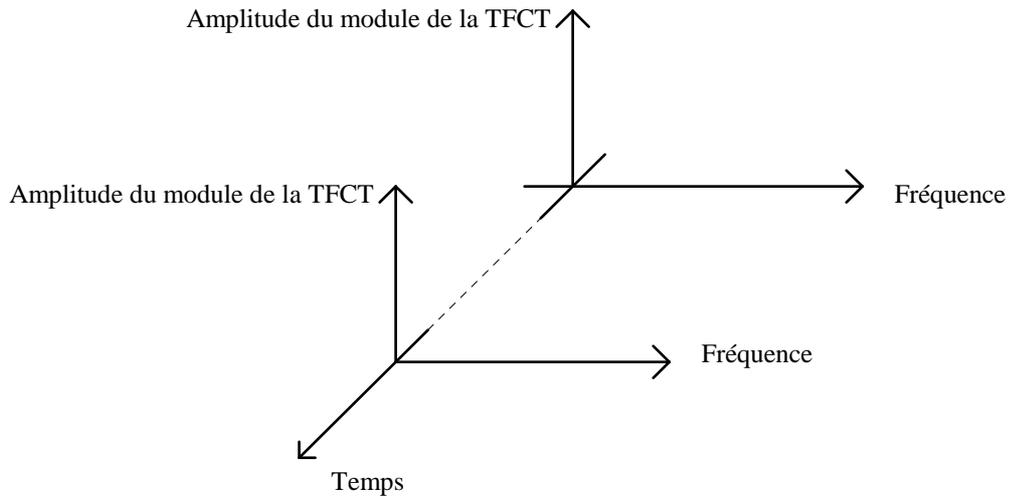


**NARROWBAND (Nombre d'échantillons  $M$  petit)**

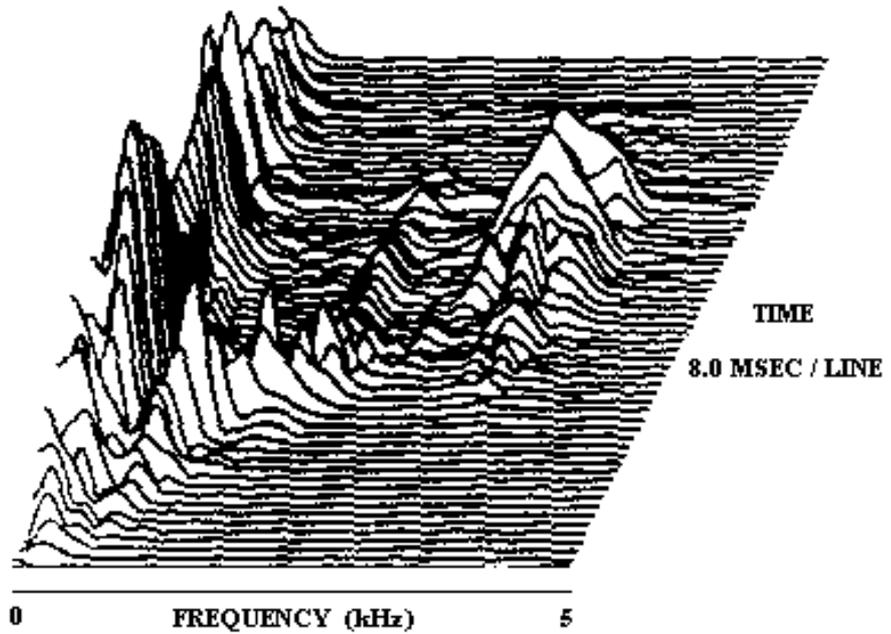
0 1.0 2.0  
Time (sec.)

Wideband and narrowband 3D spectrograms of a sentence.

*Spectrogramme comme graphes 2D*



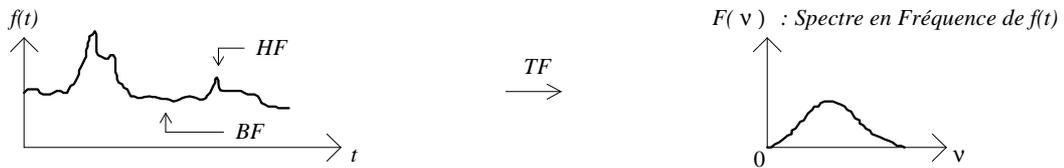
**60 DFT PASSES OF SPOKEN WORD "READ"**



*Spectrogram (from 2D graphs) of the word "READ" computed from contiguous 8 msec. speech segments.*

1.5.2. Analyse spectrale : intégration / dérivation d'un signal

*Intégration / Dérivation d'un signal*

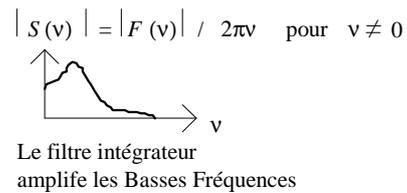
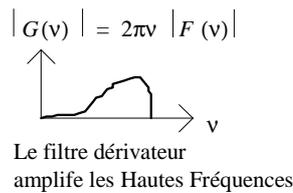


HF : le signal occupe des Hautes Fréquences (HF) (signal rapide) car :  $TF[\delta(t)] = 1$   
 BF : le signal occupe des Basses Fréquences (BF) (signal lent) car :  $TF[C] = C\delta(v)$

Signal initial :  $f(t) \xrightarrow{TF} F(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi vt} dt$

Signal dérivé :  $g(t) = \frac{df(t)}{dt} \xrightarrow{TF} G(v) = i2\pi v F(v)$

Signal intégré :  $s(t) = \int_{t_0}^{t_0+t} f(u)du \xrightarrow{TF} S(v) = \frac{F(v)}{i2\pi v} + C\delta(v)$  (C: C<sup>te</sup> d'intégration)

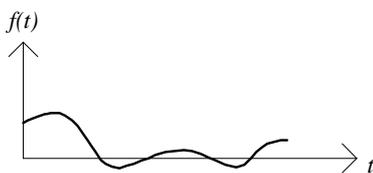


1.5.3. Analyse spectrale : rapidité d'un signal

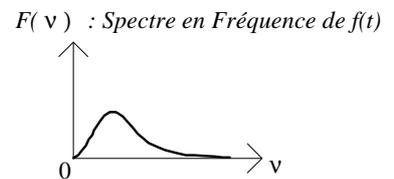
*Signal*

*Spectre*

Signal lent, (assez prédictible s'il est aléatoire)

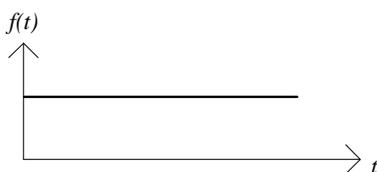


Spectre occupant les Basses Fréquences (BF)

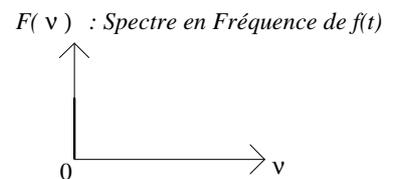


Signal constant (infiniment lent)

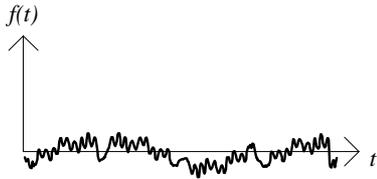
(un signal Constant peut être considéré comme périodique de période  $\infty$  et donc de fréquence nulle)



Spectre n'occupant que la fréquence 0



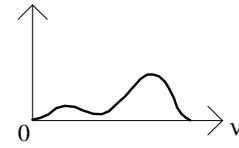
Signal rapide, (peu prédictible s'il est aléatoire)



TF  
→

Spectre occupant les Hautes Fréquences (HF)

$F(\nu)$  : Spectre en Fréquence de  $f(t)$



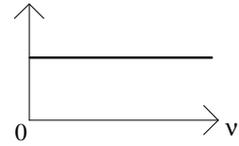
Signal impulsion (infiniment rapide)



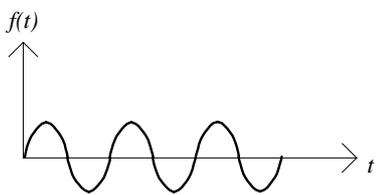
TF  
→

Spectre occupant toutes les fréquences

$F(\nu)$  : Spectre en Fréquence de  $f(t)$



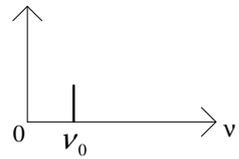
Signal sinusoïdal (de fréquence  $\nu_0$ )



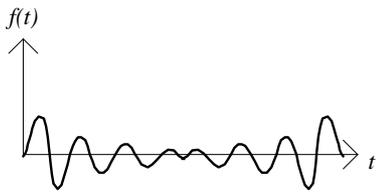
TF  
→

Spectre occupant une seule fréquence ( $\nu_0$ )

$F(\nu)$  : Spectre en Fréquence de  $f(t)$



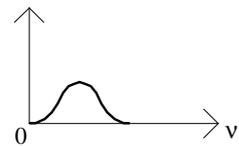
Signal à bande de fréquence dominante



TF  
→

Spectre occupant une bande de fréquence

$F(\nu)$  : Spectre en Fréquence de  $f(t)$



1.5.4. TFCT

La TF d'un signal  $f(t)$ , qui le décompose sur la base de sinusoides de fréquence  $\nu$  variable :

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi\nu t} dt \quad (1)$$

donne un spectre  $F(\nu)$  incalculable en Temps Réel, car l'opérateur (1) n'est pas causal :

sur le signal parole par ex., à un instant donné  $t_0$ , on ne connaît que la partie passée du signal, i.e. pour  $t \leq t_0$ .

On détermine plutôt un spectre à court terme, calculé par l'expression causale :

$$F(\nu, t) = \int_{-\infty}^t f(\tau)h(t-\tau)e^{-i2\pi\nu\tau} d\tau$$

obtenue en « fenêtrant » le signal (i.e. en multipliant le signal  $f(t)$  par un signal causal  $h(t)$  de durée limitée).

Le spectre à court terme apparaît comme le produit de convolution :  $F(\nu, t) = [f(t)e^{-i2\pi\nu t}] * h(t)$

La quantité :  $|F(\nu, t)|^2$  (notée aussi  $\|F(\nu, t)\|^2$ ) est le spectre de puissance à court terme.

La fenêtre de troncature  $h(t)$  est simplement rectangulaire ou mieux, constituée d'une fenêtre sinusoïdale de Hamming pour atténuer la perturbation exercée sur le signal  $f(t)$ .

Des algorithmes rapides (FFT) permettent de calculer la transformée  $F(\nu, t)$  dans le cas discret. Si  $T$  est la période d'échantillonnage de  $f(t)$ , le spectre à court terme peut s'écrire :

$$F(\nu, nT) = \sum_{k=-\infty}^n f(kT)h(nT - kT)e^{-i2\pi\nu kT}$$

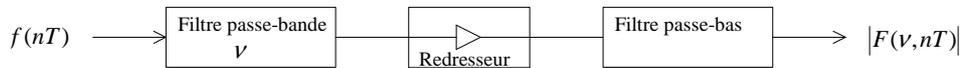
Le spectre à court terme peut aussi être obtenu en décomposant  $F(\nu, nT)$  en parties réelle et imaginaire :

$$F(\nu, nT) = Re(\nu, nT) + i Im(\nu, nT) \quad \text{avec :}$$

$$Re(\nu, nT) = \sum_{k=-\infty}^n f(kT)h(nT - kT)\cos(2\pi\nu kT) = [f(nT)\cos(2\pi\nu nT)] * h(nT)$$

$$Im(\nu, nT) = -\sum_{k=-\infty}^n f(kT)h(nT - kT)\sin(2\pi\nu kT) = -[f(nT)\sin(2\pi\nu nT)] * h(nT)$$

A partir de ces relations, on peut déterminer le spectre à court terme pour différentes fréquences  $2\pi\nu n$  à l'aide d'un banc de filtres constitué d'autant de canaux qu'il y a de fréquences d'observation du spectre :



1.5.5. Analyse cepstrale

Si l'on prend l'exemple d'une application en traitement de la parole, un modèle de production de la parole consiste dans la relation suivante, où  $f(nT)$  est le signal vocal échantillonné à la période  $T$ ,  $h(nT)$ , la Réponse Impulsionnelle du conduit vocal (caractérisant ce dernier dans un laps de temps) et  $e(nT)$ , le signal d'excitation permettant de synthétiser le signal vocal :

$$f(nT) = h(nT) * e(nT)$$

La méthode de calcul des coefficients cepstraux conduit à effectuer dans la fenêtre temporelle d'analyse une déconvolution de la relation précédente afin de séparer les contributions du conduit vocal et de l'excitation.

L'analyse cepstrale procède de la façon suivante pour transformer le produit de convolution en addition :

- Pour transformer le produit de convolution de la relation précédente en produit simple, elle opère une TFD

de  $f(nT)$ , soit : 
$$F(\omega_k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(nT)e^{-i\omega_k nT/N} = \sum_{n=0}^{N-1} f(nT)e^{-i\omega_n kT/N}$$

avec :  $N$  le nombre de points de la TFD,  $\omega = \frac{2\pi}{N}$ ,  $\omega_n = n\omega$ ,  $\omega_k = k\omega$ .

(On note indifféremment la TFD de  $f(nT)$  par :  $F(k)$ ,  $F(kT)$ ,  $F(\omega_k)$ ,  $F(\omega_k T)$ ,  $F(e^{\omega_k})$  ...)

On a, en notant  $H(\omega_k)$  et  $E(\omega_k)$ , les TFDs respectives de  $h(nT)$  et  $e(nT)$  :

$$F(\omega_k) = H(\omega_k)E(\omega_k)$$

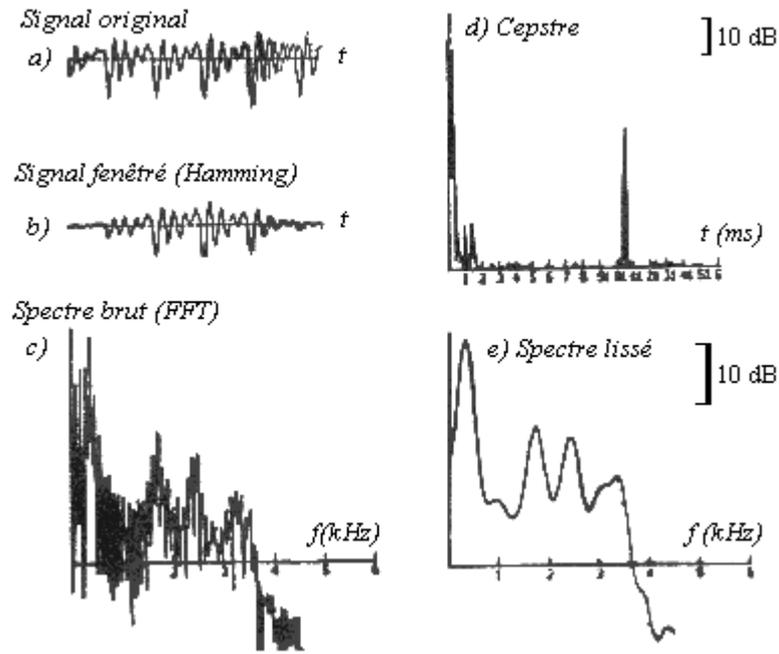
- Elle applique le logarithme à la relation précédente, pour transformer le produit en addition :

$$\log|F(\omega_k)| = \log|H(\omega_k)| + \log|E(\omega_k)|$$

- Elle revient au domaine temporel pour donner le cepstre caractérisant le signal  $f(nT)$  défini par :

$$TF^{-1}[\log|F(\omega_k)|]$$

L'analyse cepstrale est une analyse temporelle (le cepstre bien qu'anagramme du mot « spectre », n'est pas une sorte de spectre). Elle donne les coefficients cepstraux.

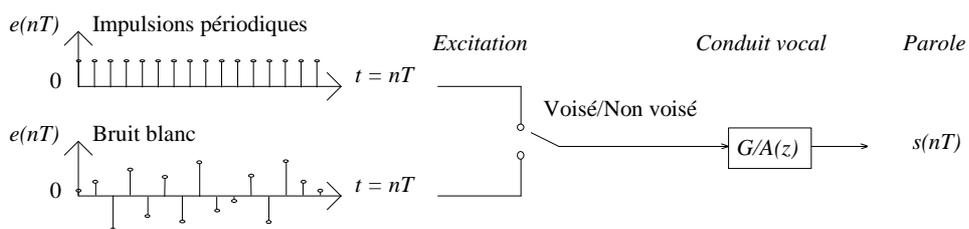


Les différentes étapes d'une analyse cepstrale

**1.5.6. Analyse LPC (Codage Prédiction Linéaire)**

L'analyse LPC est une analyse temporelle, mais de nombreux paramètres peuvent être établis dans le domaine fréquentiel.

Dans une application de traitement de la parole par exemple, la méthode LPC calcule des coefficients sur un échantillon de parole par prédiction à partir d'une pondération linéaire d'un nombre fini d'échantillons le précédant. Cette méthode utilise le modèle suivant de production de la parole : ( $T$  : période d'échantillonnage)



Le conduit vocal, qui filtre le signal d'excitation  $e(nT)$ , peut être assimilé à un filtre récursif. Avec une bonne approximation, le signal  $s(nT)$  qu'il émet à un instant peut être calculé à partir des valeurs qu'il a prises aux  $m$  instants précédents. A l'instant  $nT$ , le signal  $s(nT)$  peut donc s'exprimer comme issu d'une combinaison linéaire de son passé aux  $m$  instants précédents, et d'un terme d'erreur  $e(nT)$  à cet instant (représenté par le signal d'excitation du modèle de production de parole) :

$$s(nT) = \sum_{i=1}^m a'_i s[(n-i)T] + Ge(nT)$$

$G$  : gain de réglage

$Ge(nT)$  : erreur de prédiction

$\sum_{i=1}^m a'_i s[(n-i)T]$  : partie prédite

$a'_i \equiv -a_i \quad \forall i \in [1 .. m]$  : coefficients de prédiction

Le modèle de production de la parole s'écrit :

$$S(z) = \frac{G}{A(z)} E(z)$$

$G$  : gain de réglage

$G/A(z)$  : FT du conduit vocal

$E(z)$  : TZ de l'excitation

$S(z)$  : TZ de la sortie du conduit vocal (signal de parole)

Modèle :  $A(z) = \sum_{i=0}^m a_i z^{-i}$  d'où :  $GE(z) = S(z)A(z) = S(z) \sum_{i=0}^m a_i z^{-i}$  soit dans le domaine temporel:

$$Ge(nT) = \sum_{i=0}^m a_i s[(n-i)T] \quad \text{soit, en prenant } a_0 = 1 : \quad Ge(nT) = s(nT) - \left( - \sum_{i=1}^m a_i s[(n-i)T] \right)$$

Le terme  $Ge(nT)$  est l'erreur de prédiction, erreur entre l'échantillon de parole réel et l'échantillon prédit.

La prédiction linéaire de  $s(nT)$  est donnée par :

$$s(nT) = - \sum_{i=1}^m a_i s[(n-i)T]$$

Pour déterminer les coefficients  $a_i$ , on peut minimiser l'énergie  $W$  de l'erreur sur l'intervalle de temps

$$[pT, rT] : \quad W = \sum_{n=p}^r [Ge(nT)]^2$$

$$\text{On a : } W = \sum_{n=p}^r \left[ \sum_{i=0}^m a_i s[(n-i)T] \right]^2 = \sum_{n=p}^r \left[ \sum_{i=0}^m a_i s[(n-i)T] \sum_{j=0}^m a_j s[(n-j)T] \right]$$

$$\text{soit : } W = \sum_{n=p}^r \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m a_i a_j s[(n-i)T] s[(n-j)T] = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m a_i a_j \sum_{n=p}^r s[(n-i)T] s[(n-j)T]$$

$$\text{et : } W = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m a_i a_j C_{ij} \quad \text{avec : } C_{ij} = \sum_{n=p}^r s[(n-i)T] s[(n-j)T]$$

Pour minimiser l'énergie  $W$  de l'erreur, on peut utiliser la méthode des moindres carrés :

En écrivant que la dérivée partielle de  $W$  par rapport à  $a_k$  est nulle, on a l'équation suivante :

$$\sum_{i=0}^m a_i C_{ik} + \sum_{j=0}^m a_j C_{kj} = 0$$

Comme on a fixé  $a_0 = 1$ , on obtient  $m$  relations du type :

$$\sum_{i=1}^m a_i C_{ik} = -C_0$$

L'intervalle de sommation  $[pT, rT]$  peut être défini de 2 façons selon que l'on utilise l'une ou l'autre des 2 méthodes suivantes :

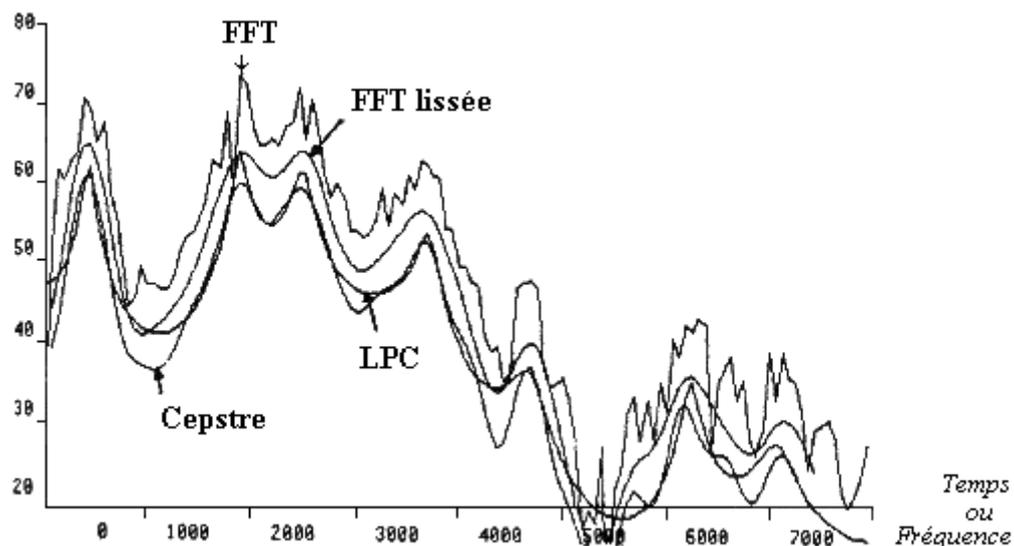
- *Méthode d'autocorrélation* : l'intervalle de temps  $[pT, rT]$  va de  $-\infty$  à  $+\infty$  et on considère le signal nul hors de l'intervalle d'échantillons  $[0, N]$  où  $N$  est le nombre de points considérés pour le signal de parole.
- *Méthode de covariance* : l'intervalle de temps  $[pT, rT]$  est limité à  $[0, (N-1)T]$ .

Les coefficients de prédiction  $a_k$  représentent une estimation du spectre de parole une fois l'influence de l'excitation éliminée.

L'analyse LPC présente principalement 2 avantages :

- Elle est adaptée à l'étude de phénomènes évoluant rapidement au contraire des méthodes fréquentielles qui doivent être effectuées sur une durée suffisamment longue si l'on veut que le spectre soit connu avec une précision convenable.
- La prédiction permet d'éliminer une part importante de la redondance du signal. La redondance est caractérisée par l'arrivée d'échantillons ne fournissant pas d'informations nouvelles; prédire la valeur du signal en fonction de ses valeurs passées permet de débarrasser le signal de ses pseudo-informations. Cette redondance n'est qu'éphémère (locale) et les coefficients de prédiction linéaire doivent être réajustés régulièrement.

Coefficients cepstraux, de FFT et de LPC



Exemple de filtrage LPC, FFT et Cepstre sur la voyelle « ei » du mot « soleil » dans la phrase parlée :  
« La bise et le soleil se disputaient ».

2. TFR

Le calcul direct de chaque terme de la TFD : 
$$X(k) = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} x(n)e^{-i2\pi kn/M} \quad (1)$$

nécessite, en prenant le cas général où  $x(n)$  est complexe, le nombre suivant d'opérations **par terme** :

.  $M$  multiplications (x) complexes  $\equiv \begin{cases} 4M : x \text{ reelles} \\ 2M : + \text{ reelles} \end{cases}$   
 .  $M-1$  additions (+) complexes  $\equiv 2(M-1) : + \text{ reelles}$

Soit au total, **pour M termes** : 
$$\begin{cases} 4M^2 : x \text{ reelles} \\ 2M(2M-1) : + \text{ reelles} \end{cases} \quad (\text{idem pour la TFDI})$$

Exemple :

Pour  $M = 1024$  points ( $\equiv 1$  kO de mémoire sur 8 bits)  $\rightarrow \begin{cases} 4\ 194\ 304 : x \\ 4\ 192\ 256 : + \end{cases}$

Avec un Processeur spécialisé en Traitement du Signal (*Digital Signal Processor* (DSP) ), on peut faire une addition - multiplication (+ et x groupées) en 300 ns.

$\rightarrow$  Temps de Calcul de la TFD  $\equiv 1.2$  s

$\rightarrow$  Pour effectuer un calcul en Temps Réel, il faut  $F = \frac{1}{T} = \frac{M}{T_0} = \frac{1\ 024}{1.2} \approx 1\ \text{kHz}$

$\rightarrow$  On ne peut calculer en Temps Réel la TFD de signaux ayant des composantes spectrales de fréquence  $> F_m = 500$  Hz !

Pour diminuer ce temps calcul, il faut programmer (1) en réduisant le nombre d'opérations par terme.

$\rightarrow$  Algorithme TFR :

le plus employé est l'algorithme de Cooley (1963) : facile à mettre en oeuvre lorsque le nombre d'échantillons  $M$  est une puissance de 2 :  $M = 2^m \rightarrow m = \log_2 M$   
 (Condition peu contraignante, quitte à majorer  $M$ ).

Algorithme de Cooley : (Entrelacement Temporel) :

Principe (partitionnement) :

Le principe permettant d'accroître la rapidité du calcul de la TFD repose sur le *partitionnement* de l'ensemble de la séquence  $\{x(n)\}$ .

On décompose la séquence initiale  $\{x(n)\}$  de  $M$  valeurs, en 2 séquences  $\{x_1(n)\}$  et  $\{x_2(n)\}$  de  $\frac{M}{2}$

termes chacune, et on calcule leur Transformée respective  $\{X_1(k)\}$  et  $\{X_2(k)\}$  de  $\frac{M}{2}$  termes chacune.

L'opération est ensuite répétée  $m$  fois jusqu'aux Transformées d'ordre 1.

$\{x(n) \text{ à } M \text{ termes}\} \begin{matrix} \swarrow \\ \searrow \end{matrix} \begin{cases} \{x_1(n)\} : \text{termes de rang pair} : x_1(i) = x(2i) \\ \{x_2(n)\} : \text{termes de rang impair} : x_2(i) = x(2i+1) \end{cases}$   
 avec :  $0 \leq i \leq \frac{M}{2}$

Exemple :  $M = 8$

$$\begin{aligned} \{x(n)\} &= \{x(0), x(1), x(2), x(3), x(4), x(5), x(6), x(7)\} \\ \{x_1(n)\} &= \{x(0), x(2), x(4), x(6)\} = \{x_1(0), x_1(1), x_1(2), x_1(3)\} \\ \{x_2(n)\} &= \{x(1), x(3), x(5), x(7)\} = \{x_2(0), x_2(1), x_2(2), x_2(3)\} \end{aligned}$$

$$TFD\{x_1(n)\} = X_1(k) = \frac{2}{M} \sum_{p=0}^{\frac{M}{2}-1} x_1(p) e^{-\frac{i2\pi kp}{M/2}} = \frac{2}{M} \sum_{p=0}^{\frac{M}{2}-1} x(2p) e^{-\frac{i4\pi kp}{M}} = \begin{cases} X_1(k) \text{ d'ordre } \frac{M}{2} \\ \left( X_1(k) \text{ à } \frac{M}{2} \text{ termes} \right) \end{cases} \quad (2)$$

$$TFD\{x_2(n)\} = X_2(k) = \frac{2}{M} \sum_{p=0}^{\frac{M}{2}-1} x_2(p) e^{-\frac{i2\pi kp}{M/2}} = \frac{2}{M} \sum_{p=0}^{\frac{M}{2}-1} x(2p+1) e^{-\frac{i4\pi kp}{M}} = X_2(k) \text{ d'ordre } \frac{M}{2} \quad (3)$$

$$\rightarrow TFD\{x(n)\} = X(k) = \frac{1}{M} \sum_{p=0}^{M-1} x(p) e^{-\frac{i2\pi kp}{M}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x(p) \\ p: 0 \rightarrow M-1 \end{cases} = \begin{cases} x(2q) + x(2q+1) \\ q: 0 \rightarrow \frac{M}{2}-1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} X(k) &= \frac{1}{M} \sum_{q=0}^{\frac{M}{2}-1} x(2q) e^{-\frac{i2\pi k 2q}{M}} + \frac{1}{M} \sum_{q=0}^{\frac{M}{2}-1} x(2q+1) e^{-\frac{i2\pi k(2q+1)}{M}} \\ X(k) &= \frac{1}{M} \sum_{p=0}^{\frac{M}{2}-1} x(2p) e^{-\frac{i2\pi kp}{M}} + \frac{1}{M} \sum_{p=0}^{\frac{M}{2}-1} x(2p+1) e^{-\frac{i4\pi kp}{M}} \cdot e^{-\frac{i2\pi k}{M}} \quad (4) \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{cases} X(k) = \frac{1}{2} X_1(k) + \frac{1}{2} X_2(k) \cdot e^{-\frac{i2\pi k}{M}} \\ 0 \leq k \leq \frac{M}{2}-1 \end{cases} \quad \text{car} \quad \begin{cases} X_1(k) \\ X_2(k) \end{cases} \text{ ne sont définies que pour } \frac{M}{2} \text{ valeurs.}$$

Pour obtenir les  $\frac{M}{2}$  valeurs restantes, on calcule  $X\left(k + \frac{M}{2}\right)$  :

$$(4) \rightarrow X\left(k + \frac{M}{2}\right) = \frac{1}{M} \sum_{p=0}^{\frac{M}{2}-1} x(2p) e^{-\frac{i4\pi kp}{M}} e^{-i2\pi p} + \frac{1}{M} \sum_{p=0}^{\frac{M}{2}-1} x(2p+1) e^{-\frac{i4\pi kp}{M}} e^{-\frac{i2\pi k}{M}} e^{-i2\pi p} e^{-i\pi}$$

$$\text{d'où :} \quad \begin{cases} X\left(k + \frac{M}{2}\right) = \frac{1}{2} X_1(k) - \frac{1}{2} X_2(k) \cdot e^{-\frac{i2\pi k}{M}} \\ 0 \leq k \leq \frac{M}{2}-1 \end{cases} \quad \text{du fait que :} \quad \begin{cases} e^{-i\pi} = -1 \\ \text{et } e^{-i2\pi p} = 1 \quad \forall p \in \mathbf{Z} \end{cases}$$

En posant  $W_M = e^{-i2\pi/M}$ , on a les relations de définition de la TFR :

$$X(k) = \frac{1}{2} X_1(k) + \frac{1}{2} W_M^k X_2(k)$$

$$X\left(k + \frac{M}{2}\right) = \frac{1}{2} X_1(k) - \frac{1}{2} W_M^k X_2(k)$$

$$0 \leq k \leq \frac{M}{2} - 1$$

$$W_M = e^{-i2\pi/M}$$

ou encore (coeff 1/2 non représentés) et  $\bigcirc \equiv \oplus$  :

*Représentation graphique du graphe élémentaire : Papillon ou encore Croisillon*

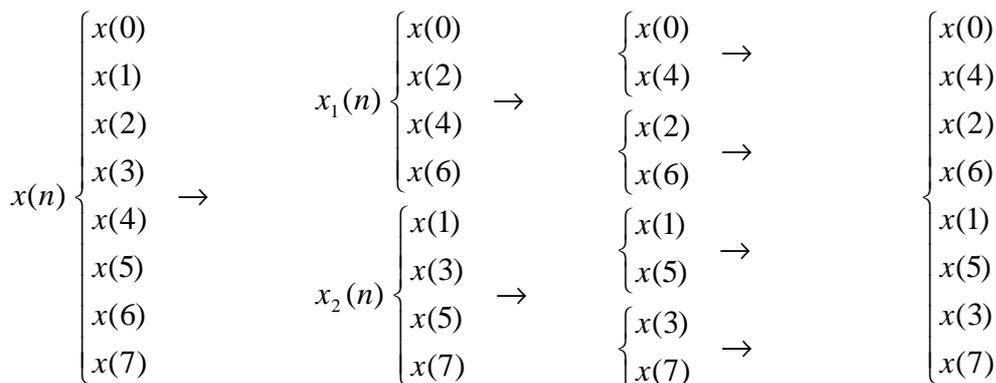
→ La TFD d'ordre  $M \equiv 2$  TFD d'ordre  $\frac{M}{2} \equiv 2^m$  TFD d'ordre  $\frac{M}{2^m} = 1$  ( $M = 2^m$ )

Les  $M$  TFD d'ordre 1 se réduisent aux  $M$  valeurs de la séquence de départ  $\{x(n)\}$  :

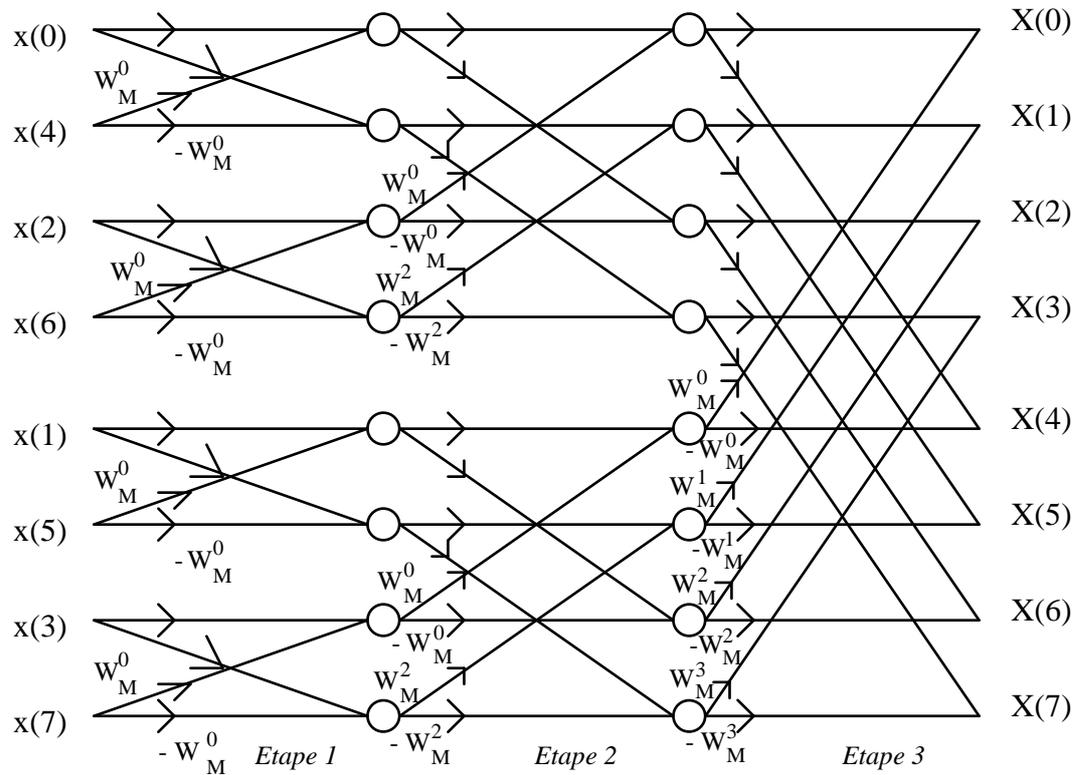
$$\text{TFD d'ordre 1 d'après (2) : } \left\{ \begin{array}{l} X_1(k) = \frac{2^m}{M} \sum_{p=0}^{\frac{M}{2^m}-1} x(2^m p) e^{-\frac{i2\pi kp}{M/2^m}} = 1 \sum_{p=0}^0 x(2^m p) e^{-i2\pi kp} = x(0) \\ \text{d'ordre 1} = M / 2^m \end{array} \right.$$

Ces TFD d'ordre 1 sont les  $M$  valeurs de la séquence  $\{x(n)\}$  mais dans un ordre résultant des  $m$  dédoublements successifs :

*Exemple :  $M = 8$*



On a alors l'algorithme : (Coefficients 1/2 non représentés et  $\ominus \equiv \oplus$ )



Algorithme (code C) (traduit du Fortran) :

```

/* _____ */
void TFR() /* Module X[k] du Spectre (TFR) de x[n] */
/* x[n] (signal reel) -> X[k] */
/* M : nombre de points de la sequence x[n] (donc par consequent de X(k)) */
/* M doit etre une puissance de 2 : M= 2^m */
/* Tableaux : as (sequence x[n]), Ar (Partie reele de X[k]), Ai (Partie imaginaire de X[k]), Tr et Ti (Tampons) */
{
int k, m, n, M1, M2, i, j, l, L, L2, ip;
float Wr, Wi, Tr, Ti, Ur, Ui, UUr, *as, *Ar, *Ai;

as = (float *) malloc (M*sizeof(float));
Ar = (float *) malloc ((M+1)*sizeof(float));
Ai = (float *) malloc ((M+1)*sizeof(float));

M2= M/2;
M1= M-1;
j= 1;

/* Sauvegarde de x[n] et copie de x[n] dans Ar[k] */
for (n=0; n<M; n++)
{
as[n]= x[n];
Ar[n+1]= x[n]; /* les tableaux Ar[] et Ai[] sont utilises a partir de l'indice 1 */
Ai[n+1]= 0;
}
}

```

```

/* Algo */
for (i=1; i<=M-1; i++)
{
  if (i<j)
  {
    Tr= Ar[j]; Ti= Ai[j];
    Ar[j]= Ar[i]; Ai[j]= Ai[i];
    Ar[i]= Tr; Ai[i]= Ti;
  }
k= M2;
  while (k<j)
  {
    j= j-k;
    k= k/2;
  }
j= j+k;
}

for (l=1; l<=m; l++)
{
  L= pow(2,l);
  L2= L/2;
  Ur= 1.0; Ui= 0.0;
  Wr= cos(PI/L2); Wi= -sin(PI/L2);
  for (j=1; j<=L2; j++)
  {
    for (i=j; i<=M; i=i+L)
    {
      ip= i+L2;
      Tr= Ar[ip]*Ur - Ai[ip]*Ui; Ti= Ar[ip]*Ui + Ai[ip]*Ur;
      Ar[ip]= Ar[i] - Tr; Ai[ip]= Ai[i] - Ti;
      Ar[i]= Ar[i] + Tr; Ai[i]= Ai[i] + Ti;
    }
    UUr= Ur*Wr - Ui*Wi; Ui= Ur*Wi + Ui*Wr; Ur= UUr;
  }
}

for (i=1; i<=M; i++)
{
  Ar[i]= Ar[i]/(float)M; Ai[i]= Ai[i]/(float)M;
}

/* Module X[k] et Restitution des x[n] */
for (k=0; k<M; k++)
{
  X[k]= sqrt( Ar[k+1]*Ar[k+1] + Ai[k+1]*Ai[k+1]);
  x[k]= as[k];
}
}
/* _____ */

```

Temps calcul

L'algorithme comporte  $m = \log_2 M$  étapes. Chaque étape nécessite :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{M}{2} : x \text{ complexes} \quad (\text{car } W_M^k X_2(k) \text{ intervient à 2 reprises}) \\ M : + \text{ complexes} \end{array} \right.$$

Or, du fait que :  $W_M^k = e^{-\frac{i2\pi k}{M}} = \cos \frac{2\pi k}{M} - i \sin \frac{2\pi k}{M}$  l'algorithme peut aussi s'écrire, avec  $0 \leq k \leq \frac{M}{2} - 1$  :

$$\frac{M}{2} \text{ points} \left\{ \begin{array}{l} \text{Re}[X(k)] = \frac{1}{2} \left[ \text{Re}[X_1(k)] + \text{Re}[X_2(k)] \cos \frac{2\pi k}{M} + \text{Im}[X_2(k)] \sin \frac{2\pi k}{M} \right] \\ \text{Im}[X(k)] = \frac{1}{2} \left[ \text{Im}[X_1(k)] + \text{Im}[X_2(k)] \cos \frac{2\pi k}{M} - \text{Re}[X_2(k)] \sin \frac{2\pi k}{M} \right] \end{array} \right.$$

$$\frac{M}{2} \text{ points} \left\{ \begin{array}{l} \text{Re} \left[ X \left( k + \frac{M}{2} \right) \right] = \frac{1}{2} \left[ \text{Re}[X_1(k)] - \text{Re}[X_2(k)] \cos \frac{2\pi k}{M} + \text{Im}[X_2(k)] \sin \frac{2\pi k}{M} \right] \\ \text{Im} \left[ X \left( k + \frac{M}{2} \right) \right] = \frac{1}{2} \left[ \text{Im}[X_1(k)] - \text{Im}[X_2(k)] \cos \frac{2\pi k}{M} + \text{Re}[X_2(k)] \sin \frac{2\pi k}{M} \right] \end{array} \right.$$

Par étape, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} 4 \frac{M}{2} = 2M : x \text{ réelles} : \text{les } \frac{M}{2} \text{ points d'indice } k + \frac{M}{2} \text{ utilisent les memes multiplications} \\ 2 \frac{M}{2} + 2M = 3M : + \text{ réelles} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} (+) \text{ et } (-) \rightarrow 2 : + \text{ pour } \frac{M}{2} \text{ points car les points d'indice } k + \frac{M}{2} \text{ utilisent les memes } + \\ \text{et } 2 : + \text{ pour } \frac{M}{2} \text{ points et } 2 : - \text{ pour } \frac{M}{2} \text{ points,} \\ \rightarrow \text{ soit } 2M : + \text{ pour } M \text{ points} \end{array} \right.$$

Au total : ( $m$  étapes) :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2(m-1)M = 2M \log_2 \left( \frac{M}{2} \right) : x \text{ réelles} \\ 3mM = 3M \log_2 M : + \text{ réelles} \end{array} \right.$$

(on ne compte pas la 1ère étape car  $W_N^0 = 1$ )

Exemple :

Pour  $M = 1024$  points : (Comparaison avec la TFD calculée pour  $M = 1024$  en Temps Réel :  $F_m < 500$  Hz)

On a :  $\left\{ \begin{array}{l} 18\,432 \quad x \\ 30\,720 \quad + \end{array} \right. \rightarrow$  Avec le même DSP que précédemment (300 ns pour 1 addition-multiplication)

il faut un temps calcul de 5.5 ms environ soit  $\frac{1.2 \text{ s}}{200}$

$\rightarrow$  Pour  $M = 1024$  points, la TFR est 200 fois plus rapide que la TFD.

La TFR peut traiter en Temps Réel des signaux de Fréquence Maximale  $F_m = 100$  kHz !

**TFR Inverse :**

L'algorithme est le même que la TFR Directe :

Il suffit de changer le signe des exposants de l'exponentielle, et de multiplier par  $M$ .

*Rangement des données :*

$\{x(n)\}$  doit être disposée selon l'ordre fourni par les  $m$  dédoublements. La méthode de rangement associée est la méthode dite du « bit inversé » : les indices de la séquence  $\{x(n)\}$  initiale, sont codés en binaire pur. Les indices de la séquence ordonnée s'obtiennent en lisant le nombre binaire à l'envers.

*Exemple :*

$M = 8$  : les indices 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 doivent être disposés en :  $\rightarrow 0, 4, 2, 6, 1, 5, 3, 7$  :

Codage sur 3 bits ( $8 = 2^3$ ) :

$0 = 000 \rightarrow 000 = 0$
$1 = 001 \rightarrow 100 = 4$
$2 = 010 \rightarrow 010 = 2$
$3 = 011 \rightarrow 110 = 6$
$4 = 100 \rightarrow 001 = 1$
$5 = 101 \rightarrow 101 = 5$
$6 = 110 \rightarrow 011 = 3$
$7 = 111 \rightarrow 111 = 7$

---

## TD 6 ANNEXE. Transformation de Fourier Discrète (DFT) et Rapide (FFT)

### 1. Programme de TFD

A l'aide du programme SIGTP6, programmer l'algorithme de calcul de la TFD d'une séquence causale  $x_n$  comportant  $M$  échantillons.

Vérifier en calculant la TFD des signaux suivants, sur une fenêtre  $M = 50$  points par exemple (durée  $T_0 = MT$ ) où  $T$  est la période d'échantillonnage :

$$x_n = \delta_n$$

$$x_n = \Gamma_n$$

$$x_n = \Pi_L(nT) \quad (L \text{ est la largeur de la porte})$$

$$x_n = \sin(\omega nT) \quad (\omega = 2\pi f, f \text{ est la fréquence de la sinusoïde})$$

$$x_n = \text{sinc}(\omega nT) \quad (\omega = 2\pi f, f \text{ est la pseudo-fréquence du sinus cardinal})$$

Faire varier  $M$  pour visualiser l'effet de la fenêtre de troncature sur le spectre. Faire varier aussi les paramètres des signaux (fréquence ...). Comparer à la théorie les caractéristiques spectrales obtenues.

Quelle valeur de compromis donner à  $M$  ? (compromis Erreur de troncature / Temps calcul).

### 2. Interprétation de la TFD

Soit  $x_n$  un signal causal à TD, d'une certaine durée  $D$ .

La séquence  $x_n$  désigne par exemple un signal de parole (fichier BLA10) enregistré pendant la durée  $D = 1$  s, à la fréquence d'échantillonnage  $F = \frac{1}{T} = 10 \text{ kHz}$ . ( $x_n$  comporte donc 10 000 échantillons) et avec une dynamique de codage ( $\equiv$  résolution, définition) de 1 octet par échantillon ( $x_n$  occupe donc 10 kO en mémoire).

Calculer la TFD de  $x_n$  (programme SIGTP6) sur une fenêtre de durée  $T_0 = 100$  ms, soit  $M = 1\,000$  termes, fenêtre glissante sur le signal  $x_n$ .

Interpréter et donner les valeurs numériques des fréquences maximales occupées par le signal  $x_n$ , au regard du spectre  $X_k$  de  $x_n$  pour une fenêtre donnée.

### TP 6. Transformation de Fourier. DFT. FFT

Note : Pour une meilleure lisibilité, certains signaux à TD (resp. à FD) seront tracés à TC (resp. à FC).

#### 1. Programme de TFD

M nombre d'échantillons, de points du signal d'entrée (ainsi que du signal TFD)

n indice temporel des échantillons du signal  $x_n$

k indice fréquentiel des échantillons de la TFD  $X_k$

Programme de calcul de la TFD  $X_k$  d'une séquence causale  $x_n$  comportant M échantillons :

TFD(x) := 

à utiliser ainsi :  $X := \text{TFD}(x)$  

Programme de calcul de la TFDI  $x_n$  d'une séquence  $X_k$  comportant M échantillons :

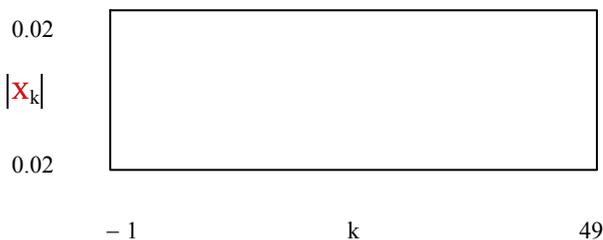
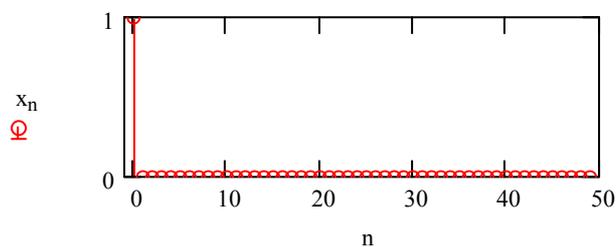
TFDI(X) := 

#### 2. TFD de signaux tests

2.1. Delta discret : M := 50 n := 0..M - 1 k := 0..M - 1

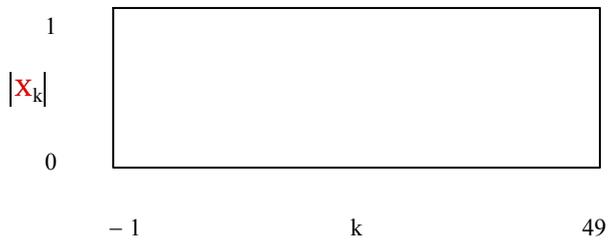
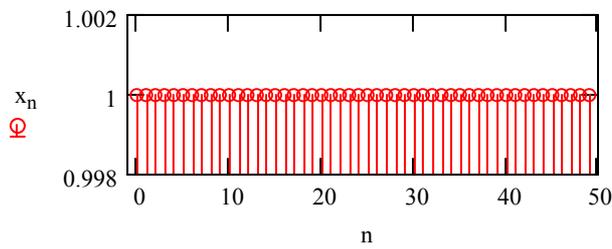
$x_n := \delta(n, 0)$

X := TFD(x)



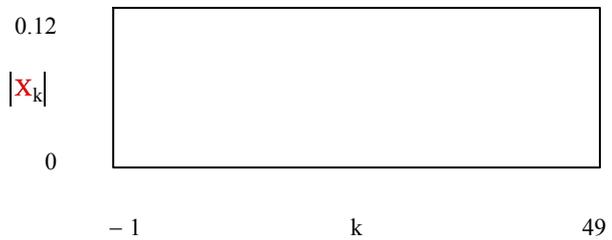
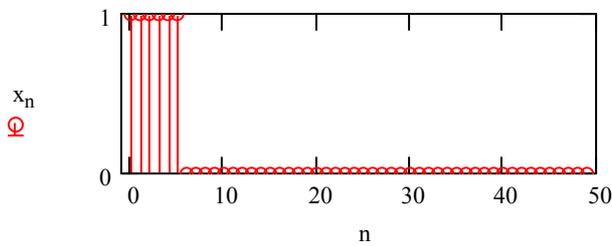
Faire varier M. Conclusions ???

2.2. Echelon :  $M := 50$   $n := 0..M - 1$   $k := 0..M - 1$   $\Gamma_n := \Phi(n)$   $x_n := \Gamma_n$   $X := \text{TFD}(x)$



Faire varier M. Conclusions ???

2.3. Fenêtre (porte) :  $M := 50$   $n := 0..M - 1$   $k := 0..M - 1$   $\Pi_n := \begin{cases} 1 & \text{if } n \leq 5 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$   $x_n := \Pi_n$   $X := \text{TFD}(x)$

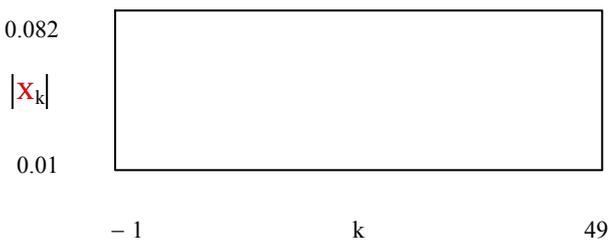
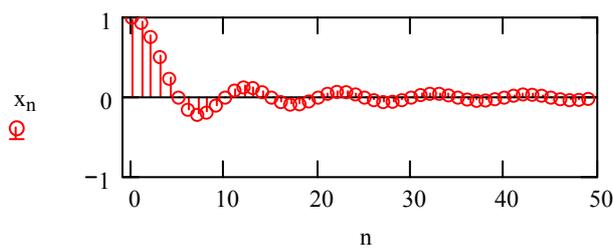


Faire varier M. Conclusions ???. Propriété de la TFD ???

2.4. Sinus cardinal : Pseudo fréquence :  $f := 0.1\text{Hz}$

Période d'échantillonnage :  $T := 1\text{ s}$   
(elle doit vérifier la condition de Shannon)

$M := 50$   $n := 0..M - 1$   $k := 0..M - 1$   $\text{sinc}_n := \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0 \\ \frac{1}{2\pi \cdot f \cdot n \cdot T} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot n \cdot T) & \text{otherwise} \end{cases}$   $x_n := \text{sinc}_n$   $X := \text{TFD}(x)$



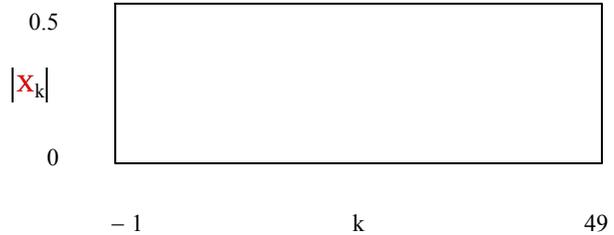
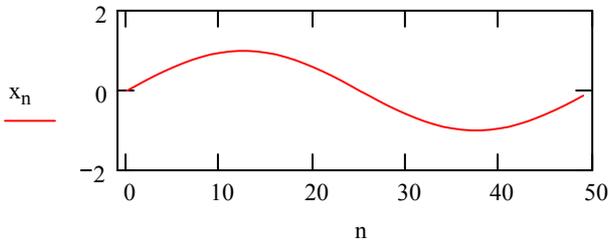
Conclusions ???. Propriété de la TFD ???

2.5. Sinus1 : Fréquence :  $f := 0.02\text{Hz}$

Période d'échantillonnage :  $T := 1\text{ s}$   
(elle doit vérifier la condition de Shannon)

$M := 50$   $n := 0..M - 1$   $k := 0..M - 1$

$\text{sinus}_n := \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot n \cdot T)$   $x_n := \text{sinus}_n$   $X := \text{TFD}(x)$



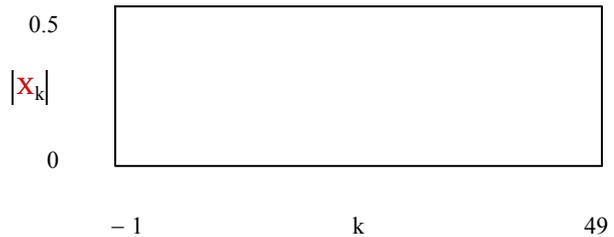
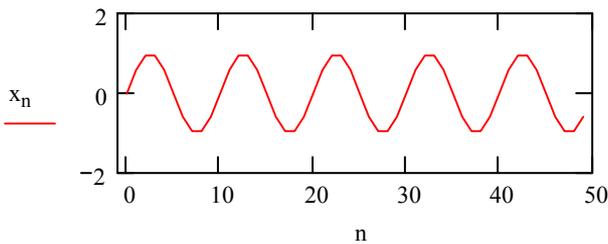
Conclusions ??? . Propriété de la TFD ???

2.6. Sinus2 : Fréquence :  $f := 0.1\text{Hz}$

Période d'échantillonnage :  $T := 1\text{ s}$   
(elle doit vérifier la condition de Shannon)

$M := 50$   $n := 0..M - 1$   $k := 0..M - 1$

$\text{sinus}_n := \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot n \cdot T)$   $x_n := \text{sinus}_n$   $X := \text{TFD}(x)$



Interprétation ??? :

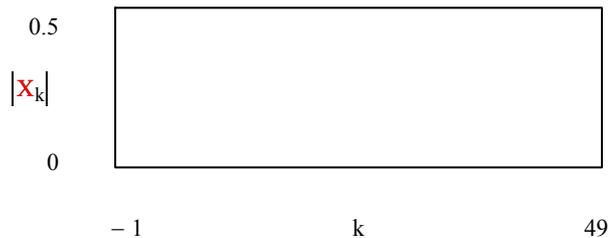
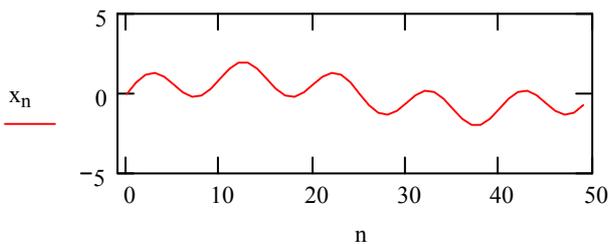
A quelle fréquence correspond le pic de la TFD ??? Conclusion ???

2.7. Sinus 1 & 2 : Fréquences :  $f1 := 0.02\text{Hz}$   
 $f2 := 0.1\text{ Hz}$

Période d'échantillonnage :  $T := 1\text{ s}$   
(elle doit vérifier la condition de Shannon)

$M := 50$   $n := 0..M - 1$   $k := 0..M - 1$

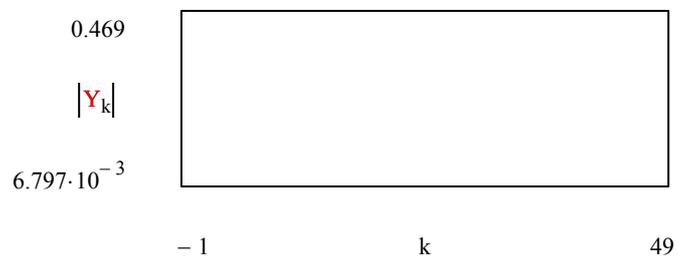
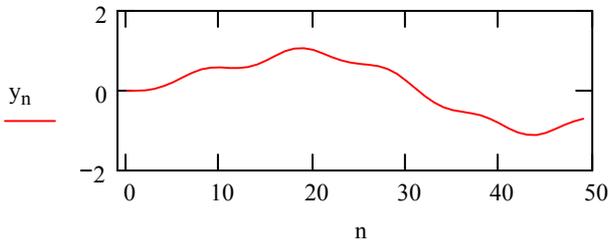
$\text{sin1}_n := \sin(2 \cdot \pi \cdot f1 \cdot n \cdot T)$   $\text{sin2}_n := \sin(2 \cdot \pi \cdot f2 \cdot n \cdot T)$   $x := \text{sin1} + \text{sin2}$   $X := \text{TFD}(x)$



Conclusion ???

Filtrage de  $x_n$  de la fréquence  $f_2$  par filtrage passe-bas (filtre Butterworth d'ordre 3) coupant les fréquences  $> \text{CutOff}$

```
CutOff := 0.05 lowpassfilter := iirlow(butter(3), CutOff) y := response(x, lowpassfilter, M) Y := TFD(y)
```



Conclusion ???

### 3. Interprétation de la TFD

$x_n = x(nT)$  : Signal à TD, échantillonné à la cadence  $T$ , et d'une certaine durée  $T_0 := M \cdot T$

Il s'agit d'un signal de parole (enregistrement de la voyelle "a").

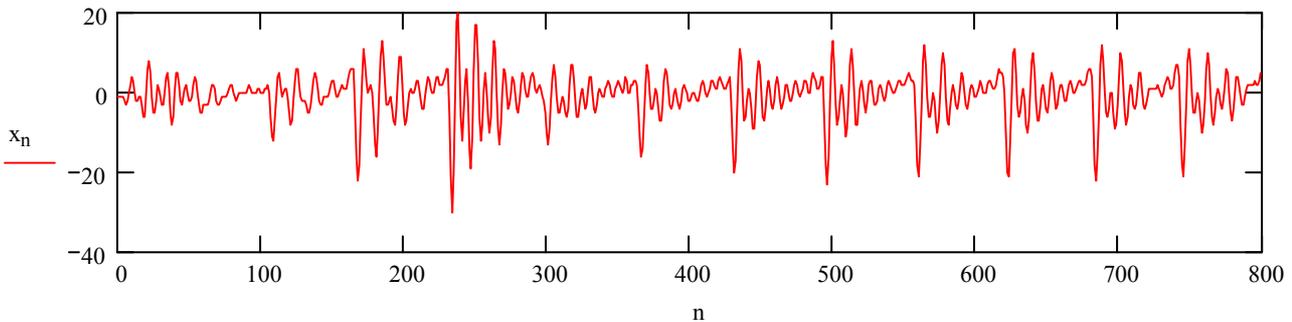
La fréquence d'échantillonnage est :  $F = 1/T = 8 \text{ kHz}$ .

Le nombre d'échantillons est :  $M = 800$ .

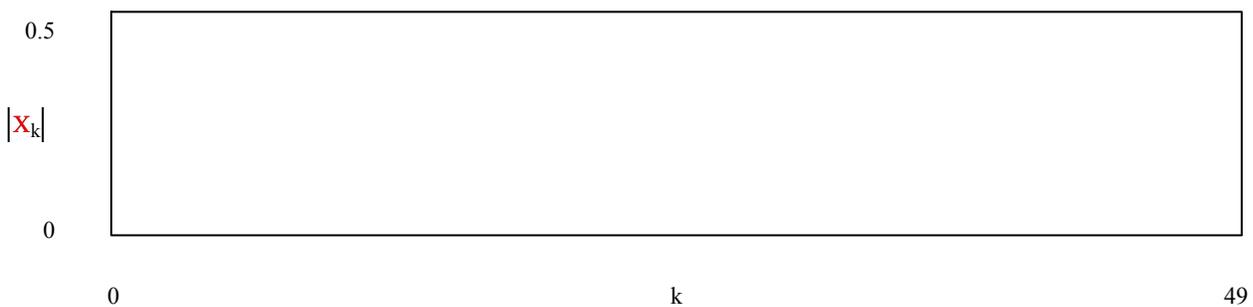
La durée de l'enregistrement est :  $T_0 = 0.1 \text{ s}$ .

Chaque échantillon est codé en mono sur 1 octet.

```
.Fichier : M := 800 n := 0..M - 1 k := 0..M - 1 file := READWAV("a1.wav") x := file - 128
```



```
X := TFD(x)
```



Calcul de la fréquence du pic de la TFD :

kmax : index de l'échantillon de  $|X_k|$  tel que  $|X_{kmax}|$  est maximum :

```

MX_k := |X_k|
kmax :=
  for k ∈ 0..M/2 - 1
    kmax ← k if MX_k = max(MX)
  return kmax
kmax = ■
    
```

Interprétation :

Quelle est la gamme des fréquences observables, du fait de la cadence d'échantillonnage choisie ???

A quelle fréquence correspond le pic maximum de la TFD ???

4. TFD et TFR

$x_n = x(nT)$  : Signal à TD, échantillonné à la cadence T, et d'une certaine durée  $T_0 := M \cdot T$

Il s'agit d'un signal de parole (enregistrement de la voyelle "a").

La fréquence d'échantillonnage est :  $F = 1/T = 8$  kHz.

Le nombre d'échantillons est :  $M = 800$ .

La durée de l'enregistrement est :  $T_0 = 0.1$  s.

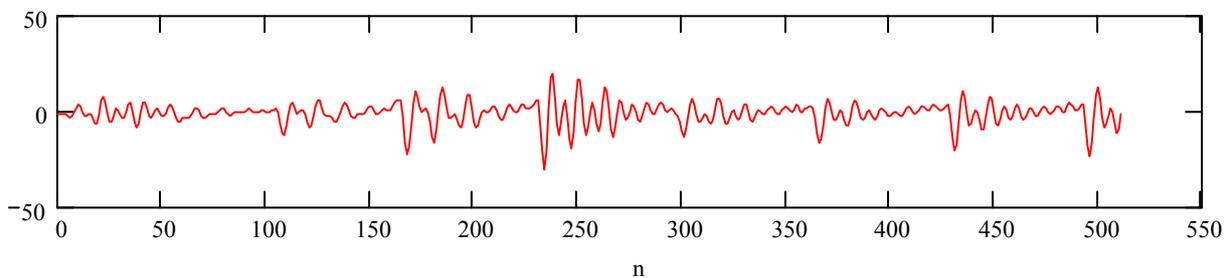
Chaque échantillon est codé en mono sur 1 octet.

La représentation temporelle (chronogramme) de  $x_n$  montre que, au-delà des 512 premiers points, on observe une répétition du passé du signal, impliquant de ce fait une redondance spectrale : la TFD sur les 512 premiers points doit donner un **spectre similaire** à celui obtenu sur la totalité des 800 points.

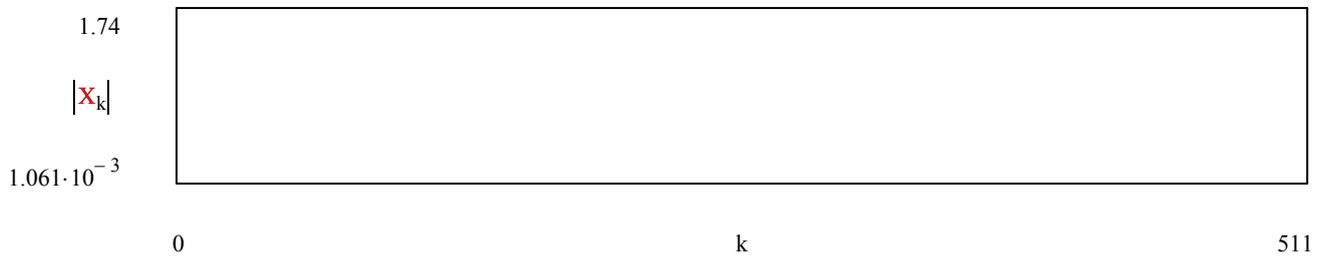
4.1. TFD sur un nombre de points égal à une puissance de 2

```

.Fichier : m := 9      M := 2^m      file := READWAV("a1.wav")      x := file - 128
           M = 512     n := 0..M - 1  k := 0..M - 1      x := submatrix(x,0,M - 1,0,0)
    
```



$X := \text{TFD}(x)$



Calcul de la fréquence du pic de la TFD :

kmax : index de l'échantillon de  $|X_k|$  tel que  $|X_{kmax}|$  est maximum :

```

MX_k := |X_k|
module de X_k
    kmax :=
    for k ∈ 0.. M/2 - 1
        kmax ← k if MX_k = max(MX)
    return kmax
    kmax = ■
    
```

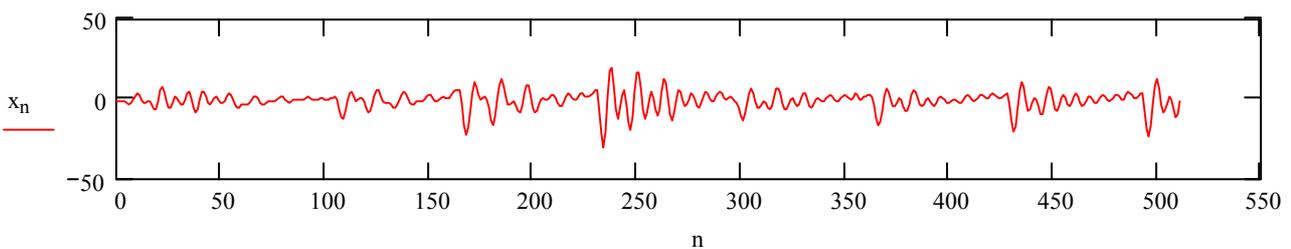
Interprétation :

A quelle fréquence correspond le pic maximum de la TFD ???

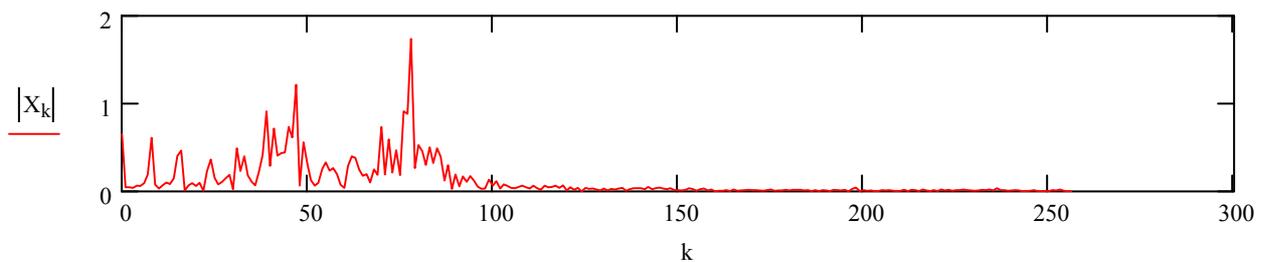
4.2. TFR (FFT) : le nombre de points est nécessairement égal à une puissance de 2

. Fichier : m := 9 M := 2<sup>m</sup>

M = 512 n := 0..M - 1 k := 0..M - 1 x := READWAV("a1.wav") x := submatrix(x, 0, M - 1, 0, 0) - 128



$X := \text{FFT}(x)$



Calcul de la fréquence du pic de la TFR :

kmax : index de l'échantillon de  $|X_k|$  tel que  $|X_{kmax}|$  est maximum :

$$X := \text{submatrix}(X, 0, 2^{m-1}, 0, 0)$$

$$MX := \text{submatrix}(MX, 0, 2^{m-1}, 0, 0)$$

$$k := 0..2^{m-1} \quad MX_k := |X_k|$$

module de  $X_k$

```
kmax :=
| for k ∈ 0..2m-1
|   kmax ← k if MXk = max(MX)
| return kmax
```

kmax = 78

Propriété de la fonction FFT de MathCad ???

5. TF de fenêtres de troncature

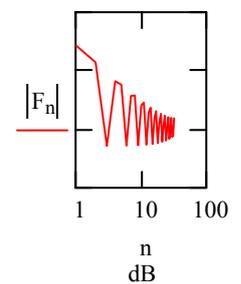
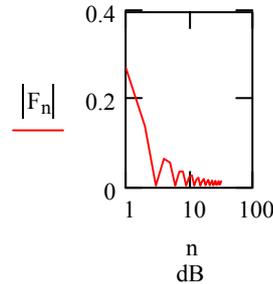
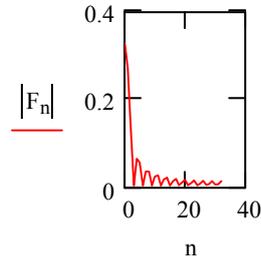
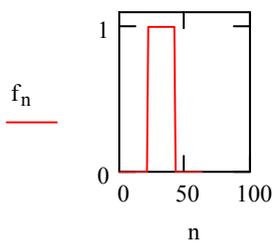
Quelle qualité doit posséder une fenêtre de troncature ???

Comparer les différentes fenêtres ci-dessous.

. Fenêtre rectangulaire

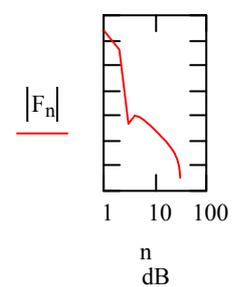
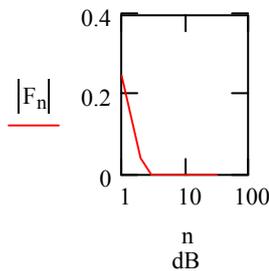
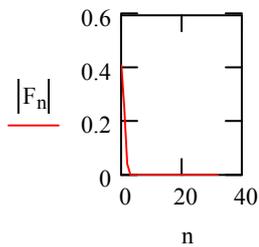
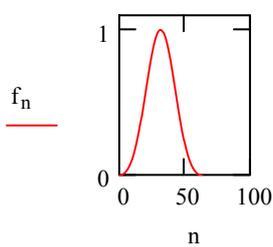
$$m := 64 \quad n := 0..m-1 \quad \Pi_n :=$$

$$\Pi_n := \begin{cases} 0 & \text{if } n < \frac{m}{3} \\ 1 & \text{if } n > \frac{m}{3} \\ 0 & \text{if } n > \frac{2 \cdot m}{3} \end{cases} \quad f_n := \Pi_n \quad F := \text{FFT}(f)$$



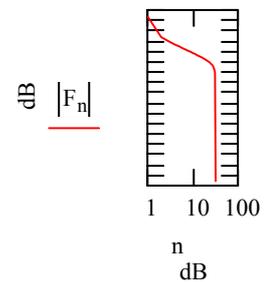
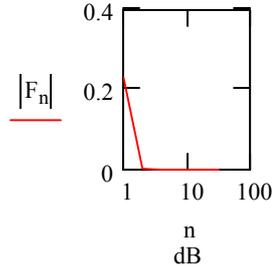
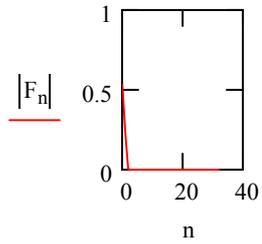
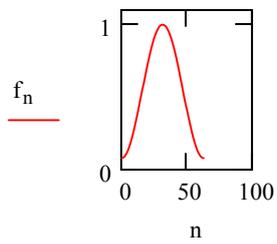
. Fenêtre de Blackmann

$$m := 64 \quad f := \text{blackman}(m) \quad F := \text{FFT}(f)$$



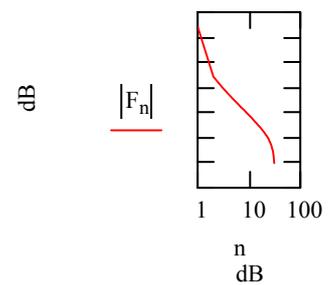
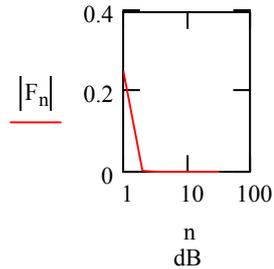
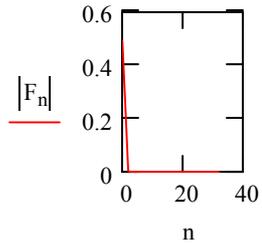
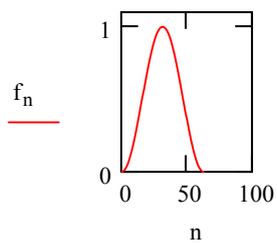
. Fenêtre de Hamming

```
m := 64      f := hamming(m)      F := FFT(f)
```



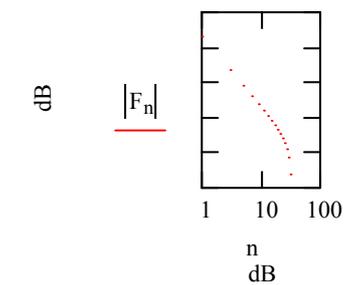
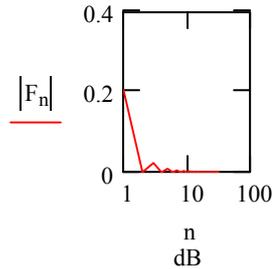
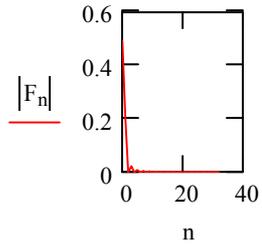
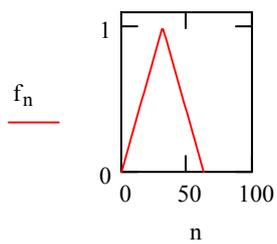
. Fenêtre de Hanning

```
m := 64      f := hanning(m)      F := FFT(f)
```



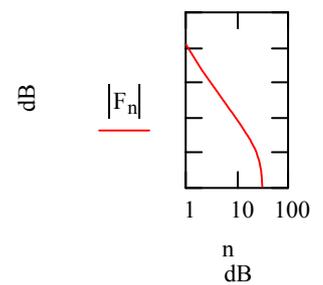
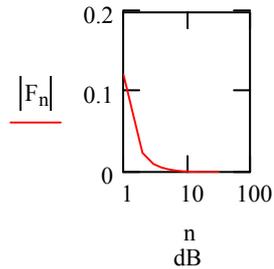
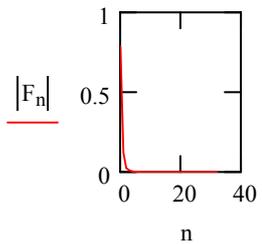
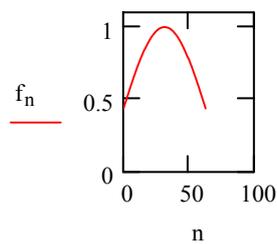
. Fenêtre de Bartlett

```
m := 64      f := triangular(m)      F := FFT(f)
```



. Fenêtre de Kaiser (1)

```
m := 64      f := kaiser(m,2)      F := FFT(f)
```

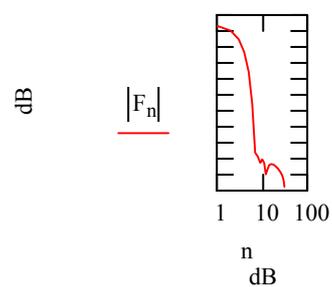
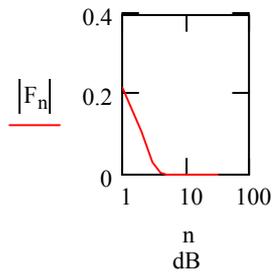
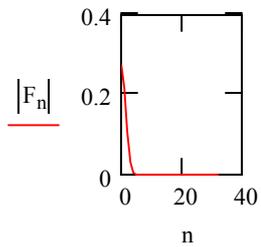
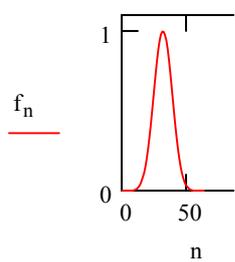


. Fenêtre de Kaiser (2)

m := 64

f := kaiser(m,20)

F := FFT(f)



## 7. Filtrage linéaire - Analyse & Synthèse des filtres numériques

### I. Filtrage linéaire

#### 1. Introduction

Historiquement les premiers filtres étaient évidemment analogiques (systèmes continus).

Il est donc normal qu'une catégorie importante de filtres numériques (les filtres récurrents) soit directement issue de la numérisation de ces filtres analogiques (c'est la synthèse).

Les filtres numériques non récurrents constituent une autre catégorie essentielle des filtres dont la mise en oeuvre fait appel à un algorithme d'optimisation.

Ces filtres numériques, récurrents ou non, ont généralement des structures et des paramètres fixes.

En utilisant par exemple un critère de moindres carrés, on a récemment pu développer des filtres dits adaptatifs, qui adaptent leurs paramètres aux caractéristiques statistiques de leurs signaux d'entrée.

#### Filtrage analogique

$x(t) \rightarrow \boxed{H(p)} \rightarrow y(t)$        $FT : H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$       Matérialisation (électrique par ex.) :  $x(t) \rightarrow \triangle \rightarrow y(t)$   
 $y(t) = f[x(t)]$  : équa. diff.  
 $y(t) = h(t) * x(t)$        $h(t) : RI$

Avantage : - rapidité du traitement analogique  
 Inconvénient : - solution figée

#### Filtrage numérique

$x(k) \rightarrow \boxed{H(z)} \rightarrow y(k)$        $FT : H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$       Matérialisation (algorithme (équa. aux diff.) + CNA) :  $y(k) = f[x(k)]$   
 $y(k) = h(k) * x(k)$   
 $h(k) : RI$

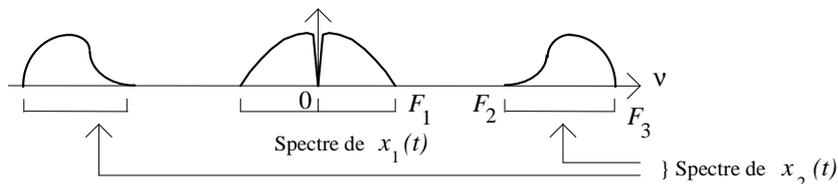
Avantage : - souplesse de modification de l'algorithme  
 Inconvénients : - temps de décodage des instructions  
 - fréquence d'échantillonnage (requis par la condition de Shannon) limitée par la technologie.

#### Exemple d'application de filtrage : Multiplexage - démultiplexage

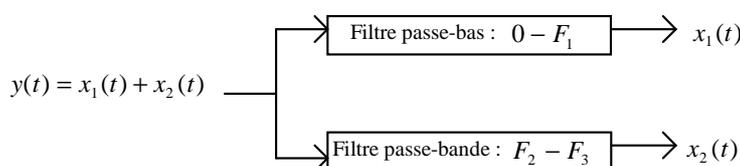
En audio, le fil des écouteurs peut aussi faire office d'antenne radio : par filtrage (le signal radio d'antenne (entrée) occupe des fréquences de l'ordre du MHz, alors que le signal pour les écouteurs (sortie) occupe des fréquences de l'ordre du kHz) on peut séparer ces deux signaux.

### 2. Filtrage analogique

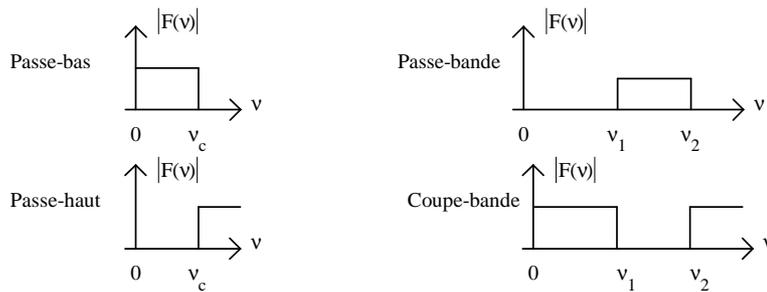
Un exemple simple de filtrage consiste à isoler un signal  $x_1(t)$  à partir d'une mesure  $y(t)$  contenant 2 signaux  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$ . Si dans le domaine fréquentiel,  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  ont des spectres disjoints tels que :



Alors on a :



Plus généralement, on distingue 4 types de filtres idéaux  $F(v)$  :



Ces filtres idéaux ne peuvent être évidemment qu'approchés : les pentes verticales réelles ne sont pas infinies mais d'autant plus raides que l'ordre du filtre est élevé.

(Un ordre élevé provoque un algorithme coûteux en temps calcul lors de l'exécution du filtre numérique traduisant le filtre analogique considéré).

Il est suffisant de disposer des Réponses Fréquentielles  $F(v)$  des filtres passe-bas car à partir de ces prototypes normalisés (fréquence de coupure  $v_c = 1$ ), on aboutit par simple changement de variable, à la catégorie passe-haut, passe-bande ou coupe-bande :

**Filtre désiré à partir d'un filtre passe-bas de FT  $H(p)$  de pulsation de coupure  $\omega_c = 1$  rd/s**

**Changement de variable en  $p$  (Laplace) dans la FT  $H(p)$  du filtre**

*Passe-bas de pulsation de coupure  $\omega_c$*

$$p \rightarrow \frac{p}{\omega_c}$$

*Passe-haut de pulsation de coupure  $\omega_c = 1$*

$$p \rightarrow \frac{1}{p}$$

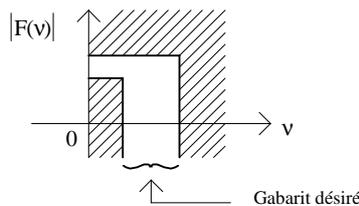
*Passe-bande de largeur relative  $B = \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)(\omega_1 + \omega_2)$  centrée sur  $\omega = 1$*

$$p \rightarrow \frac{1}{B} \left( p + \frac{1}{p} \right)$$

*Coupe-bande de largeur  $B$  centrée sur  $\omega = 1$*

$$p \rightarrow \frac{1}{\frac{1}{B} \left( p + \frac{1}{p} \right)}$$

Le problème du filtrage consiste à faire entrer la Réponse Fréquentielle  $F(v)$  dans un gabarit donné :

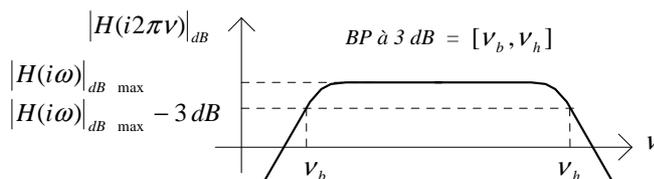


*Bande Passante d'un filtre*

La Bande Passante (BP) à 3 dB d'un filtre est le domaine de fréquences tel que :

$$\boxed{|H(i\omega)|_{dB \max} - 3 \text{ dB} \leq |H(i\omega)|_{dB} \leq |H(i\omega)|_{dB \max}}$$

Rappel :  $|H(i\omega)|_{dB} \equiv |H(i2\pi\nu)|_{dB} = 20 \log(|H(i\omega)|)$



*Exemple :* BP d'un canal de communication : une ligne téléphonique est un filtre qui doit passer les fréquences vocales (occupant la bande [300 Hz - 4 kHz] ).

Filtres normalisés

Filtre du 1er ordre passe-bas fondamental

- FT passe-bas :  $H(p) = \frac{k}{1 + \tau p}$

- Réponse Fréquentielle : (l'entrée du filtre est une sinusoïde de pulsation  $\omega$  variable)

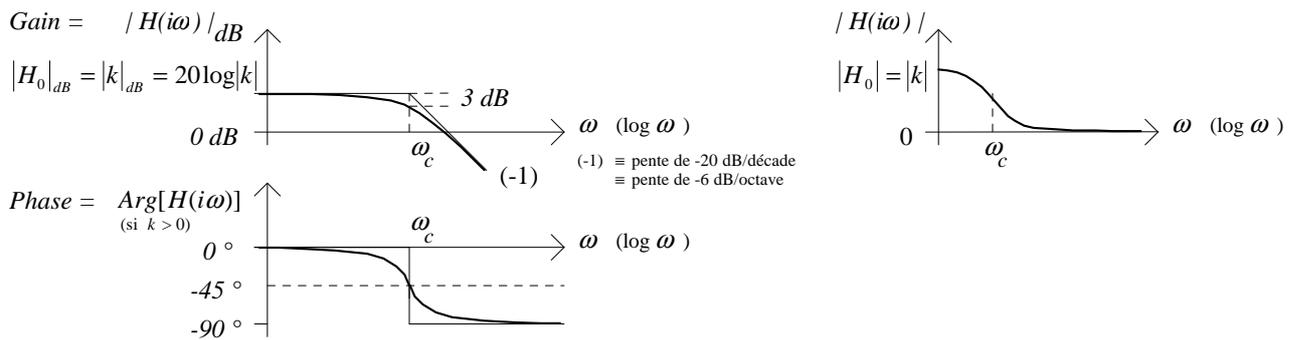
$$H(p = i\omega) = \frac{k}{1 + i\omega\tau} = \frac{k}{1 + i \frac{\omega}{\omega_c}}$$

$k$  : Gain statique [ $\equiv$  gain  $H(i\omega)$  à  $\omega = 0$ ] noté  $H_0$  ( $\omega = 0 \leftrightarrow t = \infty$ )

$\tau$  : C<sup>te</sup> de temps ( $\tau > 0$ )

$\omega_c = 1 / \tau$  : Pulsation de coupure ( $\omega_c > 0$ )

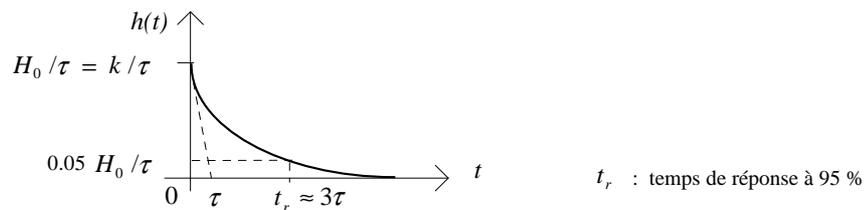
$\omega = 2\pi\nu$      $\omega$  : pulsation     $\nu$  : fréquence



Exemple : pendule simple : Pour un mouvement rectiligne sinusoïdal de la main (entrée) à basse fréquence, le pendule (sortie) suit l'entrée (gain  $\approx 1$ , déphasage nul). A haute fréquence, le pendule voit son amplitude diminuer (le gain chute jusqu'à s'annuler) et se trouve en opposition de phase avec l'entrée.

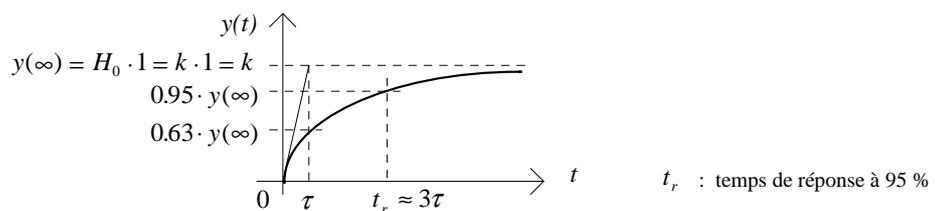
- Réponse Impulsionnelle (RI) : (l'entrée du filtre est une impulsion de Dirac  $x(t) = \delta(t)$ )

$$h(t) = TL^{-1}[H(p)] = \frac{k}{\tau} e^{-t/\tau} \Gamma(t)$$



- Réponse indicielle : (l'entrée du filtre est un échelon  $x(t) = \Gamma(t)$ )

$$y(t) = TL^{-1}[H(p) \cdot TL[\Gamma(t)]] = TL^{-1}\left[H(p) \frac{1}{p}\right] = k(1 - e^{-t/\tau}) \Gamma(t)$$

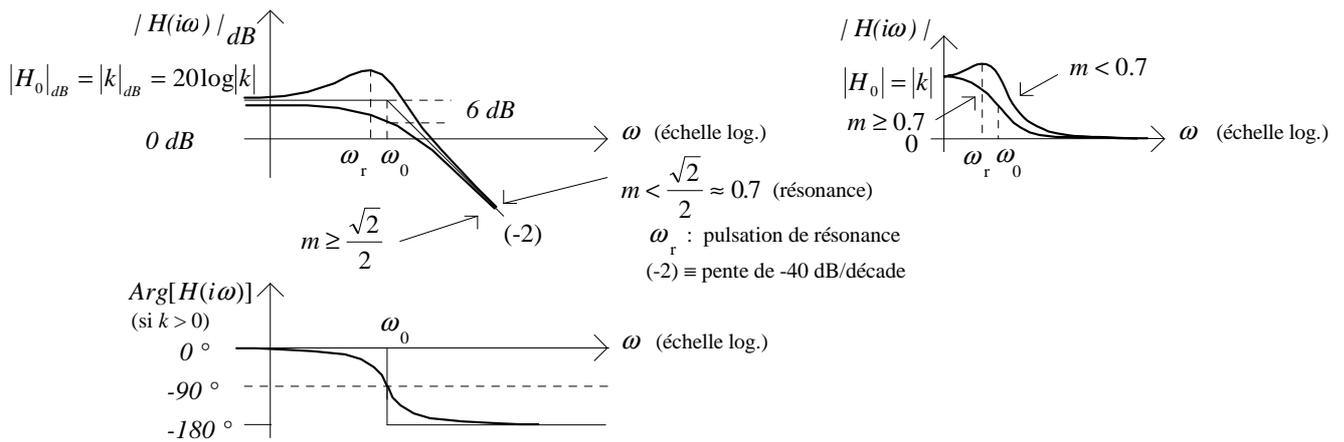


**Filtre du 2nd ordre passe-bas fondamental**

- FT passe-bas :  $H(p) = \frac{k}{\frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{2m}{\omega_0}p + 1}$  
 $k$  : Gain statique [ $\equiv$  gain  $H(i\omega)$  à  $\omega = 0$ ] noté  $H_0$  ( $\omega = 0 \leftrightarrow t = \infty$ )  
 $\omega_0$  : Pulsation propre non amortie ( $\omega_0 > 0$ )  
 $m$  = Facteur d'amortissement ( $m > 0$ )

- Réponse Fréquentielle : (l'entrée du filtre est une sinusoïde de pulsation  $\omega$  variable)

$$H(i\omega) = \frac{k}{1 + 2mi \frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$



- Réponse Impulsionnelle (RI) : (l'entrée du filtre est une impulsion de Dirac  $x(t) = \delta(t)$ )

$$y(t) = TL^{-1}[H(p) \cdot TL[\delta(t)]] = TL^{-1}[H(p)] \quad \text{3 cas :}$$

- $m > 1$  : régime hyper-amorti (apériodique) : 2 pôles réels de  $H(p)$   $p_{1,2} = -m\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{m^2 - 1}$

$$y(t) = \frac{k\omega_0}{2\sqrt{m^2 - 1}} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) \Gamma(t)$$

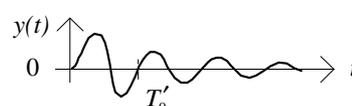
- $m = 1$  : régime critique (apériodique) : 1 pôle double réel de  $H(p)$  :  $p_0 = -m\omega_0 = -\omega_0$

$$y(t) = k\omega_0^2 e^{-\omega_0 t} t \Gamma(t)$$

- $0 < m < 1$  : régime sous-amorti (pseudo-périodique) : 2 pôles complexes conjugués de  $H(p)$  :

$$p_{1,2} = -m\omega_0 \pm i\omega_0\sqrt{1 - m^2} = -\sigma \pm i\omega'_0 \quad \text{en posant } \sigma = m\omega_0 \text{ et } \omega'_0 = \omega_0\sqrt{1 - m^2}$$

$$y(t) = \left[ k\omega_0 \frac{e^{-\sigma t}}{\sqrt{1 - m^2}} \sin(\omega'_0 t) \right] \Gamma(t)$$



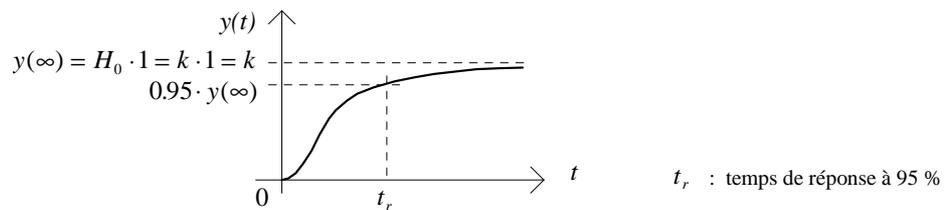
$\omega'_0$  : pseudo - pulsation  
 $T'_0 = \frac{2\pi}{\omega'_0}$  : pseudo - période

- Réponse indicielle: (l'entrée du filtre est un échelon  $x(t) = \Gamma(t)$ )

$$y(t) = TL^{-1}\left[H(p) \cdot TL[\Gamma(t)]\right] = TL^{-1}\left[H(p) \frac{1}{p}\right] \quad \text{3 cas :}$$

- $m > 1$  : régime hyper-amorti (apériodique) : 2 pôles réels de  $H(p)$   $p_{1,2} = -m\omega_0 \pm \omega_0 \sqrt{m^2 - 1}$

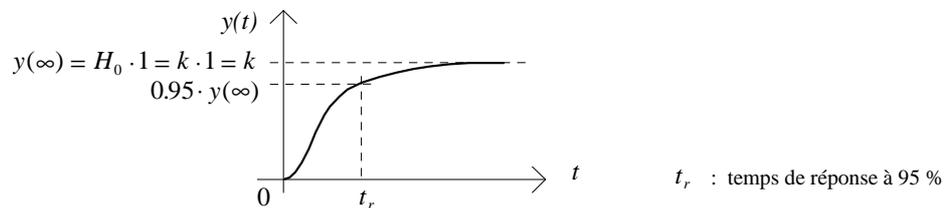
$$y(t) = k \left[ 1 + \frac{1}{2\sqrt{m^2 - 1}} \left( \frac{e^{p_1 t}}{m + \sqrt{m^2 - 1}} - \frac{e^{p_2 t}}{m - \sqrt{m^2 - 1}} \right) \right] \Gamma(t)$$



Si  $m \gg 1$   $t_r \approx 3\tau$  avec  $\tau = \frac{2m}{\omega_0}$

- $m = 1$  : régime critique (apériodique) : 1 pôle double réel de  $H(p)$  :  $p_0 = -m\omega_0 = -\omega_0$   
(ce régime est plus rapide que le régime apériodique)

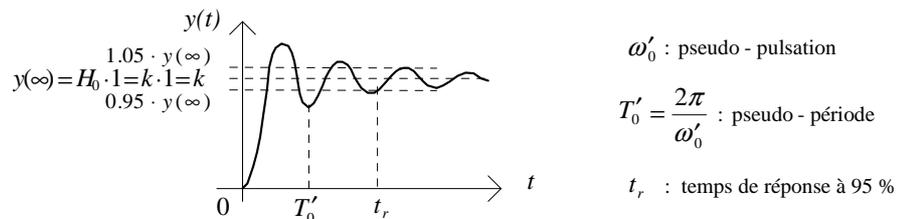
$$y(t) = k \left[ 1 - e^{-\omega_0 t} (1 + \omega_0 t) \right] \Gamma(t)$$



- $0 < m < 1$  : régime sous-amorti (pseudo-périodique) : 2 pôles complexes conjugués de  $H(p)$  :

$$p_{1,2} = -m\omega_0 \pm i\omega_0 \sqrt{1 - m^2} = -\sigma \pm i\omega'_0 \quad \text{en posant } \sigma = m\omega_0 \text{ et } \omega'_0 = \omega_0 \sqrt{1 - m^2}$$

$$y(t) = k \left[ 1 - \frac{e^{-\sigma t}}{\sqrt{1 - m^2}} \sin(\omega'_0 t + \psi) \right] \Gamma(t) \quad \text{avec : } \psi = \arccos m = \arcsin \sqrt{1 - m^2}$$



$\omega'_0$  : pseudo - pulsation

$$T'_0 = \frac{2\pi}{\omega'_0} \quad \text{pseudo - période}$$

$t_r$  : temps de réponse à 95 %

Si  $m \ll 1$   $t_r \approx 3\tau$  avec  $\tau = \frac{1}{m\omega_0}$

**Filtres de Butterworth** (filtres polynomiaux :  $H(p) = (\text{polynôme})^{-1}$ ) (*Maximally flat*)

$$H(p) = \frac{1}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} \quad \text{avec :} \quad |H(i\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}$$

Les paramètres  $a_i$  des filtres de Butterworth se déduisent des relations de définition précédentes :

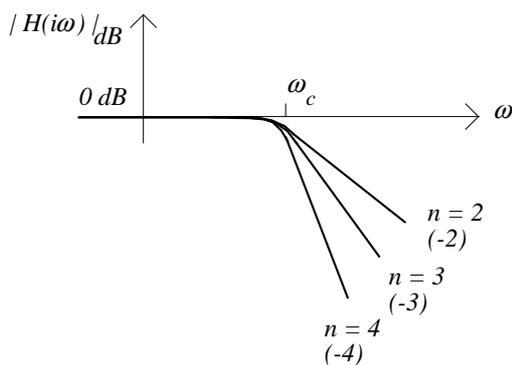
Exemple :  $n = 2$  :

$$H(p) = \frac{1}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0} \quad H(i\omega) = \frac{1}{-a_2 \omega^2 + a_1 i \omega + a_0}$$

$$|H(i\omega)|^2 = \frac{1}{a_0^2 + a_2^2 \omega^4 - 2a_0 a_2 \omega^2 + a_1^2 \omega^2} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^4} \rightarrow \begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{\omega_c} \\ a_2 = \frac{1}{\omega_c^2} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a_0 = -1 \\ a_1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{\omega_c} \\ a_2 = -\frac{1}{\omega_c^2} \end{cases}$$

Dans tous les tableaux qui suivent, les paramètres  $a_i$  sont donnés pour  $\omega_c = 1$  rd/s et pris positifs :

Ordre	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4 \dots$
$n = 1$	1	1	-	-	-
$n = 2$	1	$\sqrt{2}$	1	-	-
$n = 3$	1	2	2	1	-
$n = 4 \dots$	1	2.6131	3.4142	2.6131	1



Les filtres de Butterworth sont tels qu'ils possèdent une Réponse Fréquentielle  $H(i\omega)$  en module plate au maximum ( $\equiv$  sensiblement constante) dans la Bande Passante.

→ Les signaux de différente fréquence (dans la Bande Passante) sont tous amplifiés de la même façon (gain constant).

**Filtres de Tchebychev** (filtres polynomiaux) (*Equal ripple*)

Ces filtres présentent une ondulation d'amplitude constante ### dans la Bande Passante.

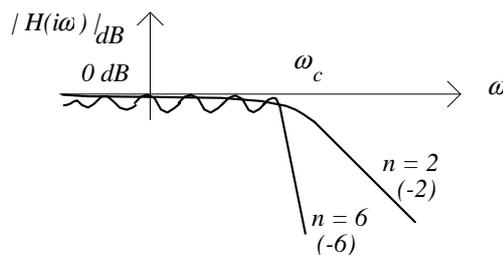
$$H(p) = \frac{1}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} \quad \text{avec :} \quad |H(i\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \frac{\epsilon}{1-\epsilon} T_n^2(\omega)}$$

où  $T_n(\omega)$  : polynôme de Tchebychev d'ordre  $n$  obtenu par récurrence :

$$T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x) \quad \text{et :} \quad T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x$$

Paramètres  $a_i$  donnés pour  $\omega_c = 1$  rd/s et pris positifs :

Ordre	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4 \dots$
$n = 2$	1	0.9957	0.907	-	-
$n = 3$	1	2.5206	2.0116	2.0353	-
$n = 4 \dots$	1	2.6942	5.2749	3.4568	3.628

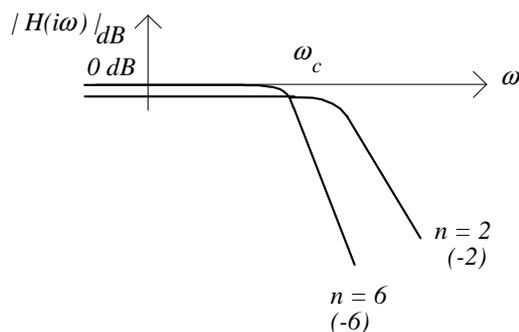


**Filtres de Legendre** (filtres polynomiaux) (pente la plus forte possible (pour un ordre  $n$  donné) à la fréq. de coupure)

$$H(p) = \frac{1}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} \quad \text{avec :} \quad \dots \text{ (Polynômes de Legendre)}$$

Paramètres  $a_i$  donnés pour  $\omega_c = 1$  rd/s et pris positifs :

Ordre	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4 \dots$
$n = 2$	1	$\sqrt{2}$	1	-	-
$n = 3$	1	2.3537	2.27	1.7319	-
$n = 4 \dots$	1	3.0411	4.6253	3.828	2.4493



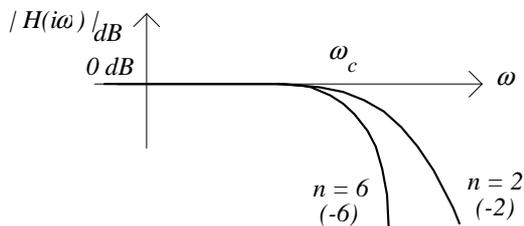
**Filtres de Bessel** (filtres polynomiaux)

$$H(p) = \frac{1}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} \quad \text{avec :} \quad \dots \quad \text{(Polynômes de Bessel)}$$

Ils ont pour objet de réaliser l'approximation d'un retard pur  $e^{-\mathcal{T}}$  ayant pour propriété un temps de propagation à travers le filtre constant (égal à  $\mathcal{T}$ ).

Paramètres  $a_i$  donnés pour  $\omega_c = 1$  rd/s et pris positifs :

Ordre	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4 \dots$
$n = 2$	3	3	1	-	-
$n = 3$	15	15	6	1	-
$n = 4 \dots$	105	105	45	10	1



**Filtres de Causer** (filtres elliptiques :  $H(p)$  est une fraction rationnelle)

Le polynôme numérateur améliore les performances du filtre. Les Réponses Fréquentielles ont des ondulations à la fois dans la Bande Passante et dans la bande coupée.

$$H(p) = \frac{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} \quad \text{avec :} \quad |H(i\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \lambda^2 E^2(\omega)}$$

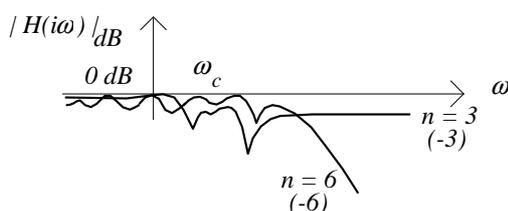
où  $E(\omega) = \prod_{i=1}^m \frac{\omega_i^2 - \omega^2}{1 - \omega_i^2 \omega^2}$  pour l'ordre du filtre  $n = 2m$

$E(\omega) = \omega \prod_{i=1}^m \frac{\omega_i^2 - \omega^2}{1 - \omega_i^2 \omega^2}$  pour l'ordre du filtre  $n = 2m + 1$

Les pulsations  $\omega_i$  ( $i = 1..m$ ) sont déterminées pour que  $E(\omega)$  ait une ondulation d'amplitude constante (type Tchebychev).

Paramètres  $a_i, b_i$  donnés pour  $\omega_c = 1$  rd/s et pris positifs :

Ordre	$b_0 / a_0$	$b_1 / a_1$	$b_2 / a_2$	$b_3 / a_3$	$b_4 / a_4$
$n = 3$	1/1	0/2.0235	0.1038/1.6404	0/1.3228	-
$n = 4 \dots$	1/1	0/2.2818	0.3993/3.6938	0/2.4801	0.0226/2.1035



**Filtres de Tchebychev inverses** (filtres elliptiques)

La Réponse Fréquentielle est plate dans la Bande Passante et l'ondulation est présente dans la bande coupée.

$$H(p) = \frac{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} \quad \text{avec :} \quad |H(i\omega)|^2 = \frac{\frac{\epsilon}{1-\epsilon} T_n^2(1/\omega)}{1 + \frac{\epsilon}{1-\epsilon} T_n^2(1/\omega)}$$

où  $T_n(\omega)$  : polynôme de Tchebychev d'ordre  $n$  obtenu par récurrence :

$$T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x) \quad \text{et :} \quad T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x$$

Paramètres  $a_i, b_i$  donnés pour  $\omega_c = 1$  rd/s et pris positifs :

Ordre	$b_0/a_0$	$b_1/a_1$	$b_2/a_2$	$b_3/a_3$	$b_4/a_4$
$n = 3$	1/1	0/8.4672	0.75/3.6597	0/79.05	-
$n = 4 \dots$	1/1	0/6.2917	1/20.7925	0/40.54	0.125/39.5285

**3. Filtrage numérique**

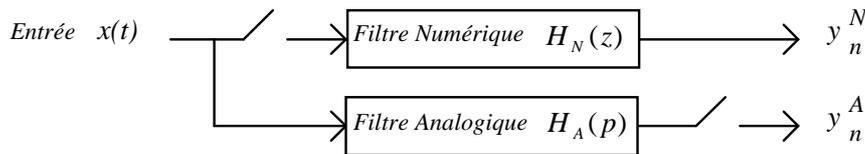
De par la souplesse apportée par la programmation, le filtrage numérique tend à se développer de plus en plus et son inconvénient par rapport au filtrage analogique (un temps de traitement plus important) tend à se réduire de plus en plus de par les progrès de la technologie (processeurs plus rapides, cadences d'échantillonnage plus élevées).

**Synthèse d'un filtre numérique**

Il y a 2 approches pour effectuer la synthèse d'un filtre numérique, c'est-à-dire la détermination du filtre numérique cherché :

*1ère approche :* Elle consiste à déterminer la FT discrète  $H_N(z)$  "équivalente" à la FT continue  $H_A(p)$  du filtre analogique modèle.

→ Il s'agit de déterminer  $H_N(z)$  de telle sorte que  $y_n^N = y_n^A \quad \forall x(t)$  :



Il n'y a évidemment pas de solution exacte à ce problème car le résultat dépend du signal d'entrée  $x(t)$

(faire l'invariance de la réponse, c'est-à-dire faire  $y_n^N = y_n^A$ , conduit à des résultats, pour le calcul des coefficients du filtre  $H_N(z)$ , différents selon le signal d'entrée choisi).

→ Plusieurs techniques de synthèse :

*Techniques temporelles de synthèse*

- Synthèse par Invariance Impulsionnelle  
 $x(t) = \delta(t)$  est pris comme signal de référence d'entrée
- Synthèse par invariance indicielle  
 $x(t) = \Gamma(t)$  pris comme signal de référence

*Techniques fréquentielles de synthèse*

- Synthèse par équivalence de la dérivation (Transformation d'Euler)
- Synthèse par équivalence de l'intégration (Transformation Bilinéaire) (méthode plus efficace que la précédente).

Cette 1ère approche conduit à des filtres numériques *récurifs*.

*2nde approche :*

Le calcul (synthèse) de ces filtres utilise ici une structure non réursive, et les coefficients du filtre numérique non récurif peuvent être déterminés de 2 façons :

- 1) En faisant référence à la FT continue du filtre analogique modèle
  - - Synthèse par technique impulsionnelle.
  - Synthèse par échantillonnage en fréquence.
  - Synthèse par fenêtrage (troncature) de la RII du filtre (méthode de la fenêtre)
- 2) En se donnant un gabarit sur le module de la Réponse Fréquentielle du filtre numérique, et en déterminant les coefficients du filtre de telle sorte à optimiser un critère de performance
  - Utilisation de méthodes d'optimisation (programmation non linéaire (≡ algorithmes de résolution de systèmes d'équations non linéaires) )
  - Algorithme de Remez (algorithme le plus utilisé).

**Structures AR, MA, et ARMA des filtres numériques**

**Modèle ARMA**

Un filtre numérique linéaire causal est décrit par la relation de récurrence générale (équation aux différences) :

$$y_n = \sum_{k=0}^p a_k x_{n-k} - \sum_{k=1}^q b_k y_{n-k}$$

$x_n$

Filtre linéaire numérique

$y_n$

C'est le modèle ARMA (AutoRégressif à moyenne mobile (≡ glissante)) (*Autoregressive with Moving Average*) Il représente la forme générale d'un système récurif.

Dans le domaine fréquentiel, on a : (avec CI nulles)

$$Y(z) = X(z) \sum_{k=0}^p a_k z^{-k} - Y(z) \sum_{k=1}^q b_k z^{-k} \quad \text{d'où :} \quad H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^p a_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^q b_k z^{-k}}$$

**Modèle AR**

Dans le cas où tous les coefficients  $a_k$  sont nuls, sauf  $a_0$ , on a un système quasiment purement *récurif* :

$$y_n = a_0 x_n - \sum_{k=1}^q b_k y_{n-k} \quad \text{et :} \quad H(z) = \frac{a_0}{1 + \sum_{k=1}^q b_k z^{-k}} = \frac{a_0}{\prod_{k=1}^q (1 - p_k z^{-k})}$$

(après décomposition en éléments simples :  $p_k$  sont les pôles de  $H(z)$ )

C'est le Modèle AR (AutoRégressif) appelé encore modèle *tout pôle*.

Le modèle :  $y_n = -\sum_{k=1}^q b_k y_{n-k}$  est le modèle de processus AR purement récurif, donc basé uniquement sur ses Conditions Initiales (CI).

**Modèle MA**

Dans le cas où tous les coefficients  $b_k$  sont nuls, on a un système réduit à : (système *non récurif*)

$$y_n = \sum_{k=0}^p a_k x_{n-k} \quad \text{et :} \quad H(z) = \sum_{k=0}^p a_k z^{-k}$$

C'est le Modèle MA (*Moving Average*) appelé encore modèle *tout zéro*.

## II. Analyse des filtres numériques

### 1. Introduction : Analyse des algorithmes de Traitement du Signal

On a vu que les filtres récurrents ont une structure ARMA.

On va établir que les filtres récurrents sont des filtres RII (*IIR*) ( $\equiv$  à RI Infinie: le support de leur RI est infini).

On a vu également que les filtres non récurrents ont une structure MA.

On va établir que les filtres non récurrents sont des filtres RIF (*FIR*) ( $\equiv$  à RI Finie: le support de leur RI est fini).

#### Algorithmes de Traitement du Signal

*Filtres RIF* 
$$y_n = \sum_{k=0}^p a_k x_{n-k}$$
  
 $x_n$  : entrée       $y_n$  : sortie       $a_k$  : coefficients du filtre

*Filtres RII* 
$$y_n = \sum_{k=0}^p a_k x_{n-k} - \sum_{k=1}^q b_k y_{n-k}$$
  
 $x_n$  : entrée       $y_n$  : sortie       $a_k, b_k$  : coefficients du filtre

*Filtres adaptatifs RIF* 
$$y_n = \sum_{k=0}^p a_k(n) x_{n-k}$$
 avec:  $a_k(n) = a_k(n-1) + \delta e_n x_{n-k}$  où  $e_n = r_n - y_n$   
 $x_n$  : entrée       $y_n$  : sortie       $a_k(n)$  : coefficients du filtre

$y_n$  tente de reproduire un signal de référence  $r_n$

$e_n$  : erreur : elle commande l'évolution des coefficients du filtre  $a_k(n)$  au cours du temps, le coefficient  $\delta$  réglant la vitesse de cette évolution.

*Corrélateurs (auto ou inter)* 
$$c_k = \sum_{n=0}^{N-1-k} x_n y_{n-k}$$
 (intercorrélacion)

$c_k$  : coefficients d'intercorrélacion des signaux  $x_n$  et  $y_n$  sur une fenêtre de  $N$  échantillons

*Fenêtrage* 
$$y_n = x_n \cdot w_n$$

le signal fenêtré  $y_n$  est obtenu comme produit du signal  $x_n$  à fenêtrer par la fenêtre de troncature, d'observation  $w_n$  de  $N$  échantillons

*Transformées (Fourier, Hilbert ...)* Exemple: 
$$TFD[x(n)] : X(k) = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} x(n) e^{-i2\pi kn/M}$$
  
 (Transformées de Fourier Discrète)

Génération de signal

Exemple: signal aléatoire à distribution uniforme:  $x(n) = Ax(n-1) \text{ mod } P$

le signal  $x(n)$  aléatoire à distribution uniforme est initialisé à :  $0 < x(0) < P$

le signal généré  $x(n)$  est pseudo-aléatoire car périodique de période  $P$ . Pour ne pas, lorsque  $n$  augmente, retomber vite sur la même série de coefficients de la séquence, il vaut mieux choisir  $P$  grand.

$P$  doit être un nombre premier pour que le résultat du modulo ne soit pas nul.

$A$  est un facteur d'échelle.

Calcul matriciel

Exemple: Produit scalaire:  $p = \sum_{n=0}^k x_n y_n$  de signaux  $x_n$  et  $y_n$  de dim.  $k + 1$

2. Analyse des filtres numériques RIF (filtres non récurrents ou encore filtres transversaux)

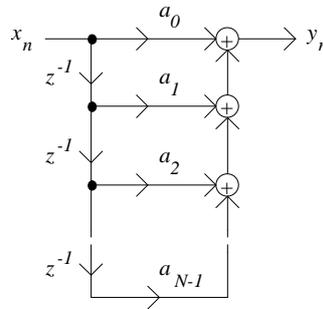
2.1. Structure de réalisation

Equation aux différences  $y_n = \sum_{k=0}^{N-1} a_k x_{n-k}$  (Version causale d'un filtre RIF)

Les filtres non récurrents sont dits MA.

Forme directe de réalisation (schéma-bloc) (block diagram)

$y_n = a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \dots + a_{N-1} x_{n-(N-1)}$



2.2. Stabilité

La FT d'un filtre RIF :  $H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k z^{-k}$  ne présente pas de pôles.

Un filtre RIF est par conséquent toujours stable.

(Les coeffs  $a_k$  étant évidemment finis (et en nombre fini), sans quoi le filtre ne serait pas programmable, il est immédiat qu'un filtre RIF répond par une sortie bornée à une entrée bornée).

2.3. Réponse Impulsionnelle (RI)

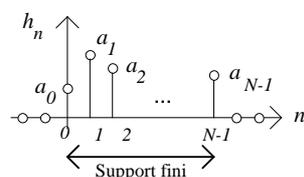
En faisant  $x_n = \delta_n$  dans l'équation aux différences du filtre :  $y_n = \sum_{k=0}^{N-1} a_k x_{n-k}$  on obtient la RI  $h_n$  du filtre :

$h_n = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \delta_{n-k}$  La RI  $h_n$  peut aussi être obtenue par la relation :  $h_n = TZ^{-1}[H(z)]$ .

Les valeurs des échantillons de la RI  $h_n$  sont les coefficients du filtre :  $h_k \equiv a_k$

Comme le nombre de termes  $N$  est nécessairement fini (sans quoi le filtre ne serait pas programmable) le support  $N$  de la RI est fini:

Les filtres non récurrents, dénommés aussi MA, sont ainsi appelés encore filtres RIF (Réponse Impulsionnelle Finie)



**2.4. Réponse indicielle**

C'est la réponse, notée  $D_n$ , à l'entrée  $x_n = \Gamma_n$  :

$$D_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0 \\ \sum_{k=0}^n a_k & \text{si } 0 \leq n \leq N-1 \\ \sum_{k=0}^{N-1} a_k & \text{si } n \geq N-1 \end{cases}$$

On aurait pu aussi déterminer  $D_n$  par la relation :  $D_n = TZ^{-1} \left[ H(z) \cdot \frac{1}{1-z^{-1}} \right]$

Les échantillons de la réponse indicielle  $D_n$  sont le cumul des coefficients du filtre. La valeur finale de  $D_n$  est égale à la somme des coefficients du filtre.

**2.5. Réponse Fréquentielle  $H(\nu)$**

On tire l'expression de la Réponse Fréquentielle  $H(\nu)$  du filtre :

- Dans le cas où les séquences dans l'équation aux différences du filtre sont naturellement discrètes :

En faisant  $z = e^p$  avec  $p = i2\pi\nu$  dans l'expression de la FT  $H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k z^{-k}$  du filtre :

$$H(\nu) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{-i2\pi k\nu}$$

Rappel :  $H(\nu) \equiv H(e^{i2\pi\nu})$  est périodique de période  $\nu = 1$ .

- Dans le cas où les séquences dans l'équat. aux différences du filtre sont échantillonnées (à la cadence  $T$ ) :

En faisant  $z = e^{pT}$  avec  $p = i2\pi\nu$  dans l'expression de la FT  $H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k z^{-k}$  du filtre :

$$H(\nu) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{-i2\pi k\nu T}$$

Rappel :  $H(\nu) \equiv H(e^{i2\pi\nu T})$  est périodique de période  $\nu = 1/T$ .

La FT en régime harmonique ( $\equiv$  Réponse Fréquentielle) développée en série de Fourier a pour coefficients de la décomposition les coefficients du filtre.

**2.6. Filtres RIF à phase linéaire**

Rappel

Un filtre linéaire de Réponse en Fréquence  $H(\nu)$  est dit à phase linéaire si sa phase ( $\equiv \text{Arg } H(\nu)$ ) est une fonction linéaire de la fréquence  $\nu$  :

$$\text{Arg } H(\nu) = -\lambda\nu \quad \text{avec} \quad \lambda = C^{te} \quad (\text{le signe - symbolise un retard en temps})$$

Ainsi, si le signal  $x(t) = \sin(2\pi\nu t)$  se présente (après avoir été échantillonné) à l'entrée du filtre numérique, il est déphasé de  $-\lambda\nu$  et la réponse (interpolée) du filtre est ainsi retardée d'un temps

$$\tau = \lambda / (2\pi) = C^{te} \text{ indépendante de la fréquence } \nu :$$

$$x(t) = \sin(2\pi\nu t) \rightarrow y(t) = |H(\nu)| \sin[2\pi\nu(t - \tau)] \quad \text{Déphasage } -2\pi\nu\tau = -\lambda\nu; \quad \text{Retard } \tau = \lambda / (2\pi)$$

Du fait que les exponentielles imaginaires  $e^{i2\pi\nu t}$  sont les fonctions propres des filtres linéaires, elles donnent pour réponse :

$$y(t) = H(\nu)e^{i2\pi\nu t}. \text{ En écrivant : } H(\nu) = Ae^{-i2\pi\nu\tau} = Ae^{i\varphi} \text{ où } A = |H(\nu)| \text{ et } \text{Arg}[H(\nu)] = \varphi = -2\pi\nu\tau$$

(retard de phase signifiant un temps de réponse (retard) du filtre  $H(\nu)$ ), on a :  $y(t) = Ae^{-i2\pi\nu\tau} e^{i2\pi\nu t} = Ae^{i2\pi\nu(t-\tau)}$ .

Un filtre à phase linéaire a la propriété de retarder tous les signaux, quelle que soit leur fréquence, d'un temps constant : le temps de propagation à travers le filtre est constant, quelque soit le signal d'entrée (puisque un signal quelconque peut se décomposer sur la base des signaux sinusoïdaux (comme combinaison linéaire)).

Filtres RIF à phase linéaire

La Réponse Fréquentielle (RF)  $H(\nu)$  d'un filtre causal de durée  $N$  est : (séquences échantillonnées)

$$H(\nu) = \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{-i2\pi k \nu T} = \sum_{k=0}^{N-1} h_k \cos 2\pi k \nu T - i \sum_{k=0}^{N-1} h_k \sin 2\pi k \nu T$$

car la FT  $H(z)$  est la TZ de la RI  $h_k$  :  $H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} h_k z^{-k}$  et  $H(\nu) = H(z = e^{i2\pi \nu T})$ .

On a ainsi : 
$$\text{Arg} H(\nu) = -\text{Arctg} \left( \frac{\sum_{k=0}^{N-1} h_k \sin 2\pi k \nu T}{\sum_{k=0}^{N-1} h_k \cos 2\pi k \nu T} \right)$$

- Peut-on avoir  $\text{Arg} H(\nu) \equiv 0 \quad \forall \nu$  (retard du filtre nul) ?

$$\text{Arg} H(\nu) = 0 \rightarrow \sum_{k=0}^{N-1} h_k \sin 2\pi k \nu T = 0 \rightarrow \text{impossible } \forall \nu \text{ (ou alors } h_k \equiv 0 \text{ !)}$$

Ou bien il faudrait, dans la relation précédente, que la RI  $h_k$  soit une fonction paire et que la Somme commence pour  $k < 0$  (filtre non causal), ce qui était prévisible (un retard nul entraîne nécessairement une non causalité du fait de son caractère non réalisable).

Remarques

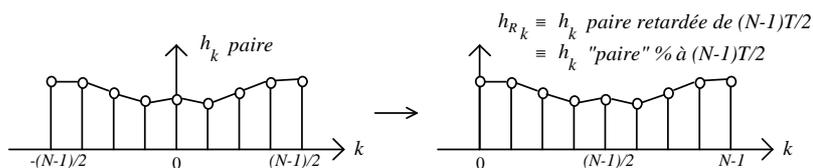
- Si on a  $h_k$  non pas sur l'intervalle  $[0 .. N-1]$  mais sur  $[-(N-1)/2 .. (N-1)/2]$  et  $h_k$  impaire  
 $\rightarrow \text{Arg} H(\nu) = \mp \pi / 2$  car  $\text{Arg} H(\nu) = -\text{Arctg}(\pm \infty)$  (I  $\equiv$  Impaire, P  $\equiv$  paire)

$$\sum_{k=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} h_k \sin 2\pi k \nu T = \sum_{k=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} I \cdot I = \sum_{k=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} P \text{ et } \sum_{k=0}^{N-1} h_k \cos 2\pi k \nu T = \sum_{k=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} I \cdot P = \sum_{k=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} I = 0 \text{ d'où } \frac{\sum_{k=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} h_k \sin 2\pi k \nu T}{\sum_{k=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} h_k \cos 2\pi k \nu T} = \pm \infty$$

- Si on a  $h_k$  non pas sur l'intervalle  $[0 .. N-1]$  mais sur  $[-(N-1)/2 .. (N-1)/2]$  et  $h_k$  paire  
 $\rightarrow \text{Arg} H(\nu) = 0$  car  $\text{Arg} H(\nu) = -\text{Arctg}(0)$  (I  $\equiv$  Impaire, P  $\equiv$  paire)

$$\sum_{k=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} h_k \sin 2\pi k \nu T = \sum_{k=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} P \cdot I = \sum_{k=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} I = 0 \text{ et } \sum_{k=0}^{N-1} h_k \cos 2\pi k \nu T = \sum_{k=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} P \cdot P = \sum_{k=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} P \text{ d'où } \frac{\sum_{k=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} h_k \sin 2\pi k \nu T}{\sum_{k=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} h_k \cos 2\pi k \nu T} = 0$$

3.



Si on retarde  $h_k$  paire de  $(N-1)T/2$ , d'après le théorème du retard en Fourier ( $TF[h(t - \tau)] = TF[h(t)] \cdot e^{-i2\pi \nu \tau}$ )

la nouvelle RF est  $H_R(\nu) = H(\nu) e^{-i\pi(N-1)T\nu}$  avec  $\text{Arg} H(\nu) \equiv 0$  donc  $\text{Arg} H_R(\nu) = -\pi(N-1)T\nu$  est linéaire.

En conséquence, un filtre de RI  $h_k$  causale, de durée  $N$  et symétrique % à  $(N-1)T/2$  est à phase linéaire :  $-\pi(N-1)T\nu$ .

Cette possibilité de réaliser des filtres causaux à phase linéaire est une exclusivité des filtres RIF, car elle nécessite une RI symétrique (par rapport à un axe vertical passant par l'instant à la demi-séquence) ce qui n'est possible que si celle-ci est de durée finie.

Une RI symétrique de durée infinie est nécessairement non causale puisqu'elle doit exister pour  $t < 0$ .

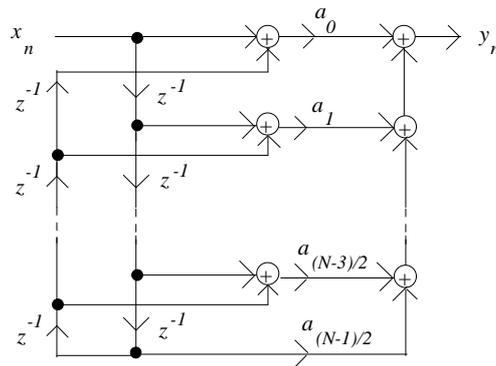
Un filtre RIF à phase linéaire, avec une RI causale de durée  $N$  et symétrique par rapport à  $(N-1)T/2$  introduit un retard constant  $(N-1)T/2$  quelque soit le signal d'entrée. (Le temps de propagation à travers le filtre est constant et égal à  $(N-1)T/2$ ).

Exemple :  $y_n = 3x_n - 2x_{n-1} + 3x_{n-2}$  est RIF à phase linéaire;  $y_n = 3x_n - 2x_{n-1} + x_{n-2}$  n'est pas à phase linéaire.

Exemple d'application des filtres à phase linéaire : les traitements synchrones.

Implémentation d'un filtre RIF à phase linéaire (optimisation du temps de calcul du filtre)

Du fait de la symétrie de la RI, la structure de réalisation du filtre RIF à phase linéaire peut être optimisée pour réduire le temps de calcul du filtre :  $(a_0 = a_{N-1} ; a_1 = a_{N-2} ; \dots)$



Remarque

On a aussi une caractéristique de phase linéaire si la RI du filtre RIF est « impaire » par rapport à  $k = (N-1)/2$  et causale.

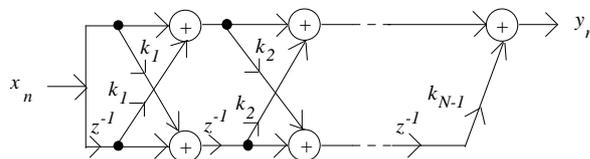
2.7. Filtres RIF en treillis (Lattice filters) (optimisation de la précision du filtre)

Ce sont des filtres RIF qui présentent une structure permettant de réduire le bruit de quantification des paramètres d'un filtre RIF (compensation due à la structure croisée (par une technique d'addition et retranchement du bruit de quantification)) et donc les erreurs de troncature intervenant lors de l'implémentation du filtre après synthèse :

(en analyse numérique, on montre que la division de coefficients atténue (soustraction) l'erreur de troncature  $e$  (alors que la multiplication l'accroît (addition)) :  $k_1 = \frac{a_1}{1+a_2} \rightarrow e(k_1) = e(a_1) - e(a_2)$

Structure générale

$$H(z) = 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{N-1} z^{-N+1}$$

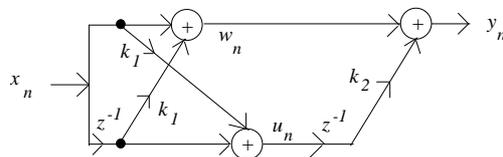


Exemple : Filtre RIF en treillis du 2nd ordre :

$$H(z) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} = 1 + (k_1 + k_1 k_2) z^{-1} + k_2 z^{-2}$$

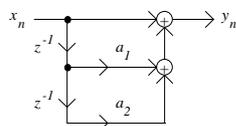
avec :  $k_1 = \frac{a_1}{1+a_2} \quad k_2 = a_2$

ou encore:  $a_1 = k_1 + k_1 k_2 \quad a_2 = k_2$



$$\begin{cases} U(z) = k_1 X(z) + z^{-1} X(z) \\ W(z) = k_1 z^{-1} X(z) + X(z) \\ Y(z) = W(z) + k_2 z^{-1} U(z) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Y(z) = [1 + (k_1 + k_1 k_2) z^{-1} + k_2 z^{-2}] X(z) \\ y_n = x_n + (k_1 + k_1 k_2) x_{n-1} + k_2 x_{n-2} \end{cases}$$

Le même filtre, de structure simple (non treillis), a la même équation aux différences :  $y_n = x_n + a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2}$  et pour schéma-bloc:



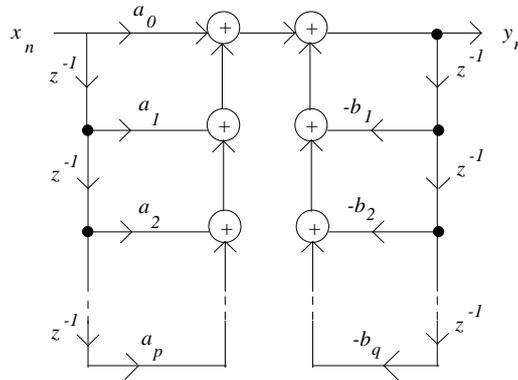
**3. Analyse des filtres numériques RII** (filtres récurrents)

**3.1. Structure de réalisation**

Equation aux différences 
$$y_n = \underbrace{\sum_{k=0}^p a_k x_{n-k}}_{\text{Partie MA}} - \underbrace{\sum_{k=1}^q b_k y_{n-k}}_{\text{Partie AR}}$$
 (Version causale d'un filtre RII)

Les filtres récurrents sont dits ARMA

Forme directe de réalisation (schéma-bloc) (block diagram)



**3.2. Stabilité**

La FT 
$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^p a_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^q b_k z^{-k}}$$
 d'un filtre RII présente  $q$  pôles.

Un filtre RII peut donc être instable. Il l'est (sens strict) si au moins un des pôles de sa FT  $H(z)$  a un module  $\geq 1$  (dans sa version causale).

**3.3. Réponse Impulsionnelle (RI)**

- En faisant  $x_n = \delta_n$  dans l'équation aux différences du filtre : 
$$y_n = \sum_{k=0}^p a_k x_{n-k} - \sum_{k=1}^q b_k y_{n-k}$$

on obtient la RI  $h_n$  du filtre sous sa forme récurrente : 
$$h_n = \sum_{k=0}^p a_k \delta_{n-k} - \sum_{k=1}^q b_k h_{n-k}$$

Pour avoir une forme analytique ( $\equiv$  non récurrente) de la RI  $h_n$ , on peut développer le terme  $h_{n-k}$  dans la relation précédente :

$$h_{n-k} = \sum_{i=0}^p a_i \delta_{n-k-i} - \sum_{j=1}^q b_j h_{n-k-j}$$
 et continuer ainsi jusqu'au terme initial  $h_0$  pour obtenir :

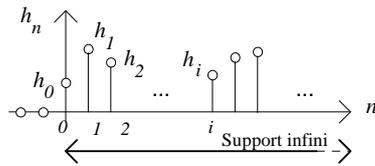
$$h_n = \sum_{k=0}^p a_k \delta_{n-k} - \sum_{k=1}^q \sum_{i=1}^p a_i b_k \delta_{n-k-i} + \sum_{k=1}^q \sum_{j=1}^q \sum_{m=0}^p a_m b_j b_k \delta_{n-k-i-m} + \dots \quad (1)$$

- Pour avoir directement une forme non récurrente de la RI  $h_n$  du filtre, il est plus simple d'inverser sa FT  $H(z)$  :

$$\{h_n\} = TZ^{-1} \left[ H(z) = \frac{\sum_{k=0}^p a_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^q b_k z^{-k}} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} h_n z^{-n}$$

Puisqu'on a (arbitrairement) choisi de considérer la version causale des filtres RII, la  $TZ^{-1}$  par exemple par division de polynômes suivant les puissances croissantes de  $z^{-1}$  (ou de  $z$  pour des filtres non causaux) permet de bien voir, comme avec (1), que le nombre de termes de la séquence  $h_n$  est infini (la division est sans fin).

Le nombre de termes de la séquence  $h_n$  croît avec  $n$  : le support de la RI des filtres récurrents est infini (filtres RII) :



**3.4. Réponse indicielle**

La réponse, notée  $D_n$ , à l'entrée  $x_n = \Gamma_n$  est :  $D_n = h_n * \Gamma_n \rightarrow D(z) = H(z)TZ(\Gamma_n) = H(z) \frac{1}{1-z^{-1}}$

$D_n$  peut être obtenue par division de polynômes suivant les puissances croissantes de  $z^{-1}$  de  $\frac{H(z)}{1-z^{-1}}$  (causalité)

ou encore par récurrence à partir de l'indice initial  $n = 0$  :

$$D(z) = \frac{H(z)}{1-z^{-1}} \rightarrow D(z)(1-z^{-1}) = H(z) \rightarrow D_n - D_{n-1} = h_n \rightarrow D_n = h_n + D_{n-1}$$

**3.5. Réponse Fréquentielle H(v)**

On tire l'expression de la Réponse Fréquentielle  $H(v)$  du filtre :

- Dans le cas où les séquences dans l'équation aux différences du filtre sont naturellement discrètes :

En faisant  $z = e^p$  avec  $p = i2\pi v$  dans l'expression de la FT  $H(z) = \frac{\sum_{k=0}^p a_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=0}^q b_k z^{-k}}$  du filtre :

$$H(v) = \frac{\sum_{k=0}^p a_k e^{-i2\pi k v}}{1 + \sum_{k=0}^q b_k e^{-i2\pi k v}} \quad H(v) \equiv H(e^{i2\pi v}) \text{ est périodique de période } v = 1.$$

- Dans le cas où les séquences dans l'équat. aux différences du filtre sont échantillonnées (à la cadence  $T$ ) :

En faisant  $z = e^{pT}$  avec  $p = i2\pi v$  dans l'expression de la FT  $H(z)$  du filtre :

$$H(v) = \frac{\sum_{k=0}^p a_k e^{-i2\pi k v T}}{1 + \sum_{k=0}^q b_k e^{-i2\pi k v T}} \quad H(v) \equiv H(e^{i2\pi v T}) \text{ est périodique de période } v = 1/T.$$

**3.6. Filtres RII à phase linéaire**

Comme on l'a vu au § 2.6. avec les filtres RIF, il n'est pas possible d'obtenir un filtre RII causal à phase linéaire du fait qu'il faudrait que la RI soit symétrique par rapport à un axe vertical passant par l'instant à la demi-séquence, ce qui n'est pas possible si celle-ci n'est pas de durée finie.

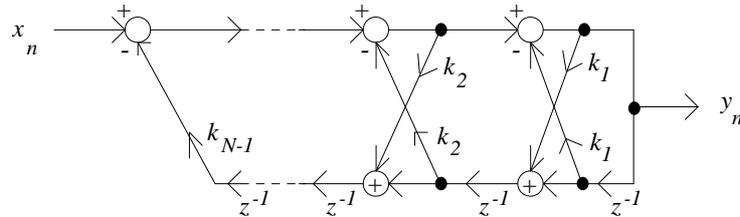
On peut néanmoins réaliser des filtres RII à phase linéaire sous forme non causale (cf. § 2.6. : RI symétrique). Notamment, des filtres RII non causaux à déphasage nul peuvent être définis, comme on l'a vu au § 2.6., en choisissant la RI paire.

3.7. Filtres RII en treillis (Lattice filters)

Ces filtres RII ont une structure de réalisation permettant de réduire le bruit de quantification des paramètres d'un filtre RII (compensation due à la structure croisée) et donc les erreurs de troncature :

Structure générale

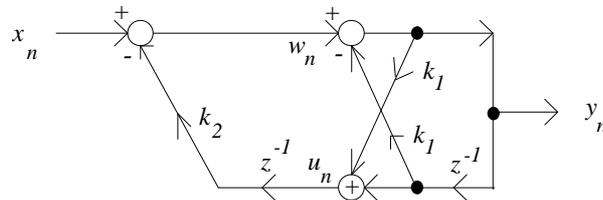
$$H(z) = \frac{1}{1 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{N-1} z^{-N+1}}$$



Exemple : Filtre RII en treillis du 2nd ordre :

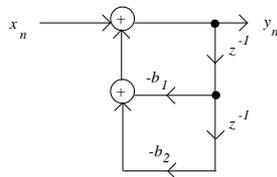
$$H(z) = \frac{1}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}} = \frac{1}{1 + (k_1 + k_1 k_2) z^{-1} + k_2 z^{-2}} \quad \text{avec : } k_1 = \frac{b_1}{1 + b_2} \quad k_2 = b_2$$

ou encore:  $b_1 = k_1 + k_1 k_2 \quad b_2 = k_2$



$$\begin{cases} W(z) = X(z) - k_2 z^{-1} U(z) \\ U(z) = k_1 Y(z) + z^{-1} Y(z) \\ Y(z) = W(z) - k_1 z^{-1} Y(z) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Y(z) [1 + (k_1 + k_1 k_2) z^{-1} + k_2 z^{-2}] = X(z) \\ y_n = x_n - (k_1 + k_1 k_2) y_{n-1} - k_2 y_{n-2} \end{cases}$$

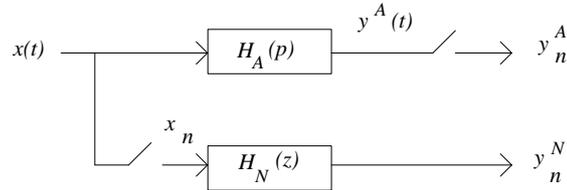
Le même filtre, de structure simple (non treillis), a la même équation aux différences :  $y_n = x_n - b_1 y_{n-1} - b_2 y_{n-2}$  et pour schéma-bloc :



**III. Synthèse des filtres numériques**

**1. Synthèse des filtres numériques RII**

Soit un filtre analogique de FT  $H_A(p)$ . Discrétiser ce filtre pour obtenir le filtre numérique de FT  $H_N(z)$  « équivalent », c'est-à-dire tel que  $y_n^A = y_n^N$ , est l'approche la plus immédiate de synthèse de filtre numérique et conduit à un filtre  $H_N(z)$  récursif. En outre, on a vu que l'égalité des séquences  $y_n^A$  et  $y_n^N$  dépend du signal d'entrée  $x(t)$ . D'après  $H_N(z)$ , on a ensuite l'algorithme de calcul du filtre (équation aux différences)  $y_n^N = f(x_n)$ .



Le passage du continu au discret fait apparaître le paramètre  $T$  (période d'échantillonnage) déterminé par application du théorème de Shannon.

**1.1. Synthèse par la relation de définition**

La relation de définition : 
$$\begin{cases} z = e^p & (\text{sequence discrete}) \\ \text{ou : } z = e^{pT} & (\text{sequence echantillonnee}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = Ln z \\ \text{ou : } p = \frac{1}{T} Ln z & (z \text{ est complexe !}) \end{cases}$$

n'est pas exploitable pour déterminer le filtre numérique  $H_N(z)$  équivalent au filtre analogique  $H_A(p)$  car  $H_A(p)$  étant généralement une fraction rationnelle en  $p$  (SLTI à TC) (avec éventuellement des retards purs  $e^{-\varphi}$  :

*ex.*:  $H_A(p) = e^{-\varphi} \cdot \frac{\sum_{i=0}^m a_i p^i}{\sum_{i=0}^n b_i p^i}$ , le passage Continu  $\rightarrow$  Discret par la relation 
$$\begin{cases} z = e^p \\ \text{ou : } z = e^{pT} \end{cases}$$
 conduit au filtre numérique

$H_N(z) = H_A(p = Ln z)$  (ou  $H_N(z) = H_A(p = \frac{1}{T} Ln z)$ ) qui n'est pas une fraction rationnelle en  $z$ , et  $H_N(z)$  ainsi synthétisé est par conséquent difficilement exploitable (pas d'équation aux différences déterminant le filtre numérique).

Ainsi, on n'a pas un SLTI à TD. De plus, la TZ Inverse n'est pas aisée.

On peut alors avoir recours à la linéarisation de la relation  $p = Ln z$  en effectuant son développement limité (méthodes d'équivalence de la dérivation et de l'intégration).

**1.2. Synthèse par Invariance Impulsionnelle (≡ Utilisation directe des Tables)**

Les tables (généralement limitées aux signaux causaux) : 
$$F(p) \xrightarrow{TL^{-1}} f(t) \xrightarrow{\text{Echantillonnage}} f(nT) \xrightarrow{TZ} F(z)$$

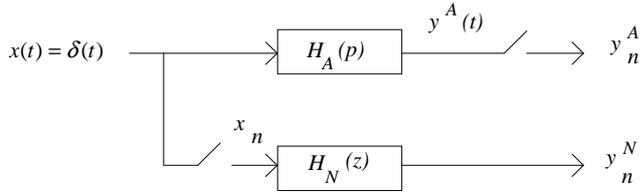
permettent de réaliser directement le passage Continu  $\rightarrow$  Discret, noté dans le domaine fréquentiel :

$$\boxed{H_N(z) = Z[H_A(p)]}$$
, ou encore en Temps : 
$$\boxed{h_N(nT) = h_A(nT) \quad (= h_A(t = nT))}$$
.

$Z[H_A(p)]$  est obtenu avec les tables.

Cette méthode de synthèse conduit donc à identifier  $Z[H_A(p)]$  avec  $H_N(z)$ , donc la RI analogique discrétisée  $y_n^A$  avec la RI numérique  $y_n^N$  (entrée :  $X(p) = 1$ ,  $X(z) = 1$ ,  $x(t) = \delta(t)$ ).

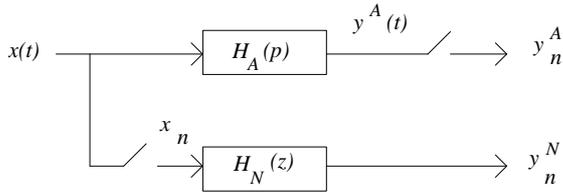
C'est la synthèse par Invariance Impulsionnelle (Invariance de la réponse analogique discrétisée  $y_n^A$  et de la réponse numérique  $y_n^N$  lorsque l'entrée est une Impulsion).



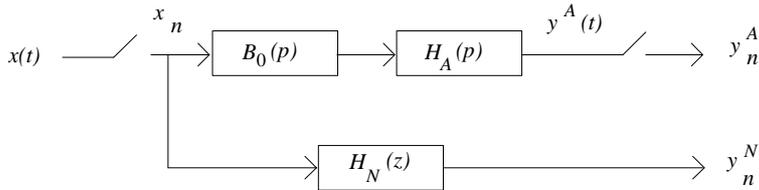
$$y_n^N = y_n^A \Leftrightarrow Y^N(z) = Y^A(z) \Leftrightarrow H_N(z)X(z) = Z[H_A(p)X(p)] \Leftrightarrow H_N(z) \cdot 1 = Z[H_A(p) \cdot 1] \Leftrightarrow H_N(z) = Z[H_A(p)]$$

Principal inconvénient de cette méthode : Elle présente une grande distorsion (déformation) de la Réponse Fréquentielle (RF). (La RF est la réponse du filtre à une entrée sinusoïdale de fréquence variable).

Pour avoir une synthèse plus réaliste, le schéma de synthèse ( $\equiv$  de passage Continu  $\rightarrow$  Discret) :



peut être amélioré par le schéma suivant, où intervient le bloqueur d'ordre 0  $B_0(p)$  :  $B_0(p) = \frac{1 - e^{-pT}}{p}$  :

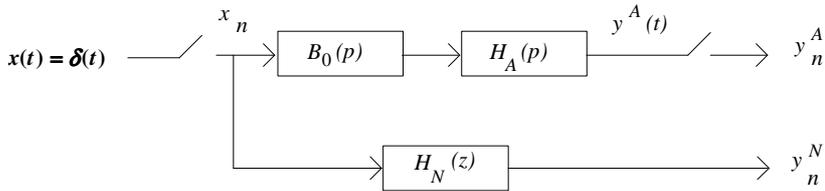


C'est la synthèse par Invariance Impulsionnelle bloquée, encore appelée synthèse par invariance indicielle car toutes les deux donnent le même résultat.

**1.3. Synthèse par invariance indicielle ( $\equiv$  synthèse par Invariance Impulsionnelle bloquée)**

Synthèse par invariance impulsionnelle bloquée

Faisons  $x(t) = \delta(t)$  dans le schéma précédent avec bloqueur :

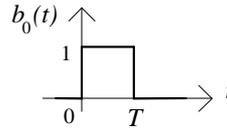


on aboutit à faire la correspondance plus réaliste :

$$Z[B_0(p) \cdot H_A(p)] = H_N(z) \rightarrow Z\left[\frac{(1 - e^{-pT})}{p} \cdot H_A(p)\right] = H_N(z) \quad \text{et, du fait que } z = e^{pT} :$$

$$\boxed{H_N(z) = (1 - z^{-1}) \cdot Z\left[\frac{H_A(p)}{p}\right]} \quad \text{car : } Z\left[\frac{(1 - e^{-pT})}{p} \cdot H_A(p)\right] = (1 - z^{-1}) \cdot Z\left[\frac{H_A(p)}{p}\right] \quad (\Delta)$$

( $\Delta$  : cf. explication en fin de paragraphe)



ou encore en Temps, en notant  $b_0(t)$  la RI du bloqueur :

$$h_N(nT) = (b_0 * h_A)(t = nT) \quad \rightarrow \quad \boxed{h_N(nT) = \int_0^T h_A(nT - \tau) d\tau}$$

$Z\left[\frac{H_A}{p}\right]$  peut être obtenu par les tables, après une éventuelle décomposition en éléments simples de  $\frac{H_A(p)}{p}$  :

$$Z\left[\frac{H_A}{p}\right] = \sum_{i=1}^k \frac{A_i}{1 - e^{-p_i T} z^{-1}}$$

$p_i$  : sont les  $k$  pôles complexes de  $\frac{H_A(p)}{p}$

$A_i$  : coefficients complexes de la décomposition en éléments simples de  $\frac{H_A(p)}{p}$  sur le corps des complexes.

$\Delta$  : Explication de la relation  $Z\left[\frac{(1 - e^{-pT})}{p} \cdot H_A(p)\right] = (1 - z^{-1}) \cdot Z\left[\frac{H_A(p)}{p}\right]$  :

On a :  $Z\left[\frac{(1 - e^{-pT})}{p} \cdot H_A(p)\right] = Z\left[\frac{H_A(p)}{p}\right] - Z\left[e^{-pT} \cdot \frac{H_A(p)}{p}\right]$  du fait que la TZ est linéaire.

Calculons  $Z\left[e^{-pT} \cdot \frac{H_A(p)}{p}\right]$  : Soit  $f(t) = TL^{-1}\left[\frac{H_A(p)}{p}\right]$  on a :  $F(p) = \frac{H_A(p)}{p} = TL[f(t)]$  et  $F(z) = TZ[f(kT)] = Z[F(p)]$

or :  $\frac{H_A(p)}{p} \xrightarrow{TL^{-1}} f(t)$  et :  $e^{-pT} \cdot \frac{H_A(p)}{p} \xrightarrow{TL^{-1}} f(t-T) \xrightarrow{Z} f(kT-T) = f[(k-1)T] \xrightarrow{TZ} z^{-1}F(z) = z^{-1}Z[F(p)]$

d'où :  $Z\left[e^{-pT} \cdot \frac{H_A(p)}{p}\right] = z^{-1} Z\left[\frac{H_A(p)}{p}\right]$  (un retard de  $T$  s'écrit  $z^{-1}$  en  $Z$  et  $e^{-pT}$  en Laplace)

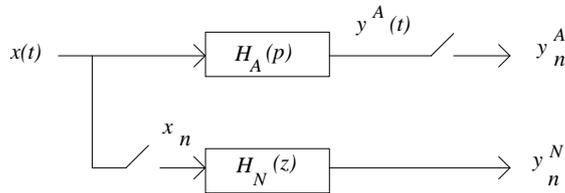
On a donc bien finalement :  $Z\left[\frac{(1 - e^{-pT})}{p} \cdot H_A(p)\right] = (1 - z^{-1}) \cdot Z\left[\frac{H_A(p)}{p}\right]$

On va voir maintenant que la synthèse par Invariance Impulsionnelle bloquée n'est autre qu'une invariance indicielle, ce qui était prévisible car, entre 2 instants d'échantillonnage successifs, une impulsion bloquée est un échelon.

Synthèse par invariance indicielle

L'entrée  $x(t)$  de référence est cette fois l'échelon unité :  $x(t) = \Gamma(t) \rightarrow \begin{cases} X(p) = \frac{1}{p} \\ X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \end{cases}$

On a alors, par synthèse par invariance indicielle :



$$\begin{cases} Y^A(p) = H_A(p) \cdot X(p) \rightarrow Y^A(z) = Z[H_A(p) \cdot X(p)] \\ Y^N(z) = H_N(z) \cdot X(z) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Y^A(z) = Z[H_A(p) \cdot X(p)] = Z\left[\frac{H_A(p)}{p}\right] \\ Y^N(z) = H_N(z) \cdot X(z) = H_N(z) \cdot \frac{1}{1-z^{-1}} \end{cases}$$

(Remarque :  $Z[H_A(p)] \cdot Z[X(p)] (= H_A(z) \cdot X(z)) \neq Z[H_A(p) \cdot X(p)]$  en général).

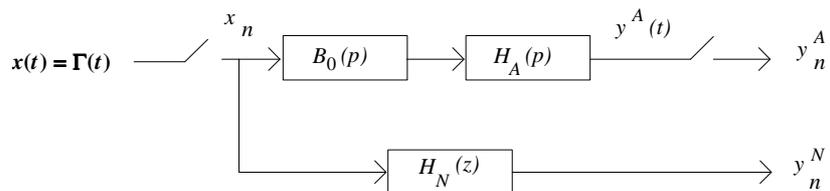
d'où :

$$y_n^N \equiv y_n^A \Leftrightarrow Y^N(z) \equiv Y^A(z) \rightarrow H_N(z) = (1-z^{-1}) \cdot Z\left[\frac{H_A(p)}{p}\right] \text{ et en Temps : } h_N(nT) = \int_0^T h_A(nT - \tau) d\tau$$

Inconvénient de la méthode de synthèse :

Comme la synthèse par Invariance de la RI, la synthèse par invariance de la réponse indicielle présente une distorsion de la Réponse Fréquentielle, atténuée cependant par la présence du terme  $\frac{1}{p}$  de  $\frac{H_A(p)}{p}$ .

- Remarques :
- $Z[H_A(p) \cdot X(p)] \neq Z[H_A(p)] \cdot X(z)$  dans le cas général, alors que les Transformations d'Euler et Bilinéaire (cf plus loin) vérifient cette égalité du fait de l'approximation qu'elles réalisent.
  - La méthode d'invariance indicielle est identique à l'Invariance Impulsionnelle bloquée.
  - Par synthèse par invariance indicielle bloquée (méthode peu utilisée), on aurait :



ce qui donne :

$$\begin{cases} Y^A(p) = B_0(p) \cdot H_A(p) \cdot X(p) = \frac{(1-e^{-pT})}{p^2} \cdot H_A(p) \\ Y^N(z) = H_N(z) \cdot X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \cdot H_N(z) \end{cases}$$

d'où :

$$y_n^N \equiv y_n^A \Leftrightarrow Y^N(z) \equiv Y^A(z) \rightarrow H_N(z) = (1-z^{-1}) \cdot Z[Y^A(p)]$$

$$\rightarrow H_N(z) = (1-z^{-1})^2 \cdot Z\left[\frac{H_A(p)}{p^2}\right]$$

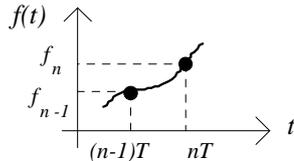
**1.4. Synthèse par la Transformation d'Euler (TE) (≡ équivalence de la dérivation)**

Le passage Continu → Discret, (c'est à dire  $p \rightarrow z$ ) peut également se faire en discrétisant les opérateurs continus intervenant dans l'équation différentielle régissant le système à TC pour obtenir l'équation aux différences du système à TD.

Les additions, soustractions et multiplications par une  $C^{te}$  sont directement discrétisables. Il reste à discrétiser les dérivations et les intégrations.

L'équivalence de la dérivation effectue la synthèse en discrétisant la dérivée  $\frac{df(t)}{dt}$  d'un signal  $f(t)$  par :

$$\frac{f(nT) - f[(n-1)T]}{T} \text{ noté } \frac{f_n - f_{n-1}}{T} : \quad \frac{df(t)}{dt} \leftrightarrow \frac{f_n - f_{n-1}}{T}$$



Cette approximation est d'autant meilleure que la période d'échantillonnage  $T$  est faible.

Du fait que (si CI nulles) :  $TL\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = p \cdot F(p)$  et :  $TZ\left[\frac{f_n - f_{n-1}}{T}\right] = F(z) \cdot \frac{(1 - z^{-1})}{T}$

on aboutit à la correspondance :  $p \leftrightarrow \frac{1 - z^{-1}}{T}$

Le passage Continu-Discret s'obtient en faisant :  $p = \frac{1 - z^{-1}}{T}$  ou encore :  $z = \frac{1}{1 - pT}$

*Principal inconvénient de cette synthèse :* la Réponse Impulsionnelle subit une distorsion considérable.

*Remarques :*

- ① La relation exacte  $z = e^{pT}$  donne :  $z^{-1} = e^{-pT} \approx 1 - pT$  (développement en série limité au 1er ordre) *Rappel :*  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$

→ l'équivalence de la dérivation coïncide avec une approximation de la formule exacte  $z = e^{pT}$  limitée au 1er ordre.

② On sait que la FT d'un système continu  $H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{\sum_{i=0}^m a_i p^i}{\sum_{i=0}^n b_i p^i}$  représente l'équation

différentielle linéaire à coefficients constants régissant le système continu :

$$a_0 x(t) + a_1 \dot{x}(t) + \dots + a_m x^{(m)}(t) = b_0 y(t) + b_1 \dot{y}(t) + \dots + b_n y^{(n)}(t) \quad (1)$$

et s'obtient par  $TL$  de cette équation différentielle. On a si les Conditions Initiales (CI) sont nulles :

$$TL(1) \rightarrow \left(\sum_{i=0}^m a_i p^i\right) X(p) = \left(\sum_{i=0}^n b_i p^i\right) Y(p) \rightarrow H(p) = \frac{\sum_{i=0}^m a_i p^i}{\sum_{i=0}^n b_i p^i}$$

$H(p)$  : Fraction rationnelle ≡ Fractionnelle ≡ Quotient de 2 polynômes

(avec  $n > m$  pour un système physique (tous les systèmes physiques sont des passe-bas)).

Le remplacement de  $p$  par  $\frac{1-z^{-1}}{T}$  dans l'expression de la FT  $H(p)$  conduit en discret à une

équation aux différences de la forme :  $\sum_{i=0}^m a_i x_{n-i} = \sum_{i=0}^n b_i y_{n-i}$  (SLTI), représentation

satisfaisante (car elle traduit un SLTI) comme pour les autres méthodes de synthèse vues avant (sauf par la relation de définition).

- ③ La stabilité du système quand on effectue le passage de  $p \rightarrow z$  est conservée mais la correspondance n'est pas bi-univoque :

Cherchons d'abord le transformé de l'axe imaginaire  $p = i\omega$  par la TE :

$$z = \frac{1}{1-pT} \Big|_{p=i\omega} = \frac{1}{1-i\omega T} = \frac{1}{1+\omega^2 T^2} + i \frac{\omega T}{1+\omega^2 T^2} \stackrel{\Delta}{=} R(z) + i I(z)$$

$$|z| = \sqrt{\frac{1}{1+\omega^2 T^2}} = \sqrt{R^2(z) + I^2(z)} \quad \text{et :} \quad \text{tg}[Arg(z)] = \frac{I(z)}{R(z)} = \omega T$$

$$\text{d'où :} \quad \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{I^2(z)}{R^2(z)}}} = \sqrt{R^2(z) + I^2(z)} \rightarrow R^2(z) = [R^2(z) + I^2(z)]^2$$

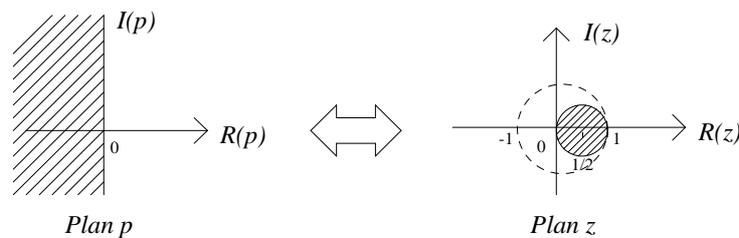
$$\text{Comme } R(z) = \frac{1}{1+\omega^2 T^2} > 0, \text{ on a : } R(z) = R^2(z) + I^2(z)$$

$$\text{et finalement :} \quad \left(R(z) - \frac{1}{2}\right)^2 + I^2(z) = \frac{1}{4}$$

- quand  $p$  parcourt l'axe imaginaire  $p = i\omega$ ,  $z$  décrit le cercle de centre  $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$  et de rayon  $\frac{1}{2}$ .

- quand  $p$  est à partie réelle  $< 0$ ,  $z$  est à partie réelle  $> 0$  et  $|z| < 1$ .

On a donc la correspondance :



La stabilité est donc conservée dans le sens  $p \rightarrow z$  ( $R(p) < 0 \rightarrow |z| < 1$ ) mais pas dans le sens contraire.

La correspondance de stabilité Continu-Discret n'est donc pas bi-univoque, sans quoi on aurait :

$$\frac{1}{2} \text{ plan gauche en } p \leftrightarrow \text{ disque unité de centre } 0 \text{ en } z.$$

- ④ La transformation entraîne une relation non linéaire entre les fréquences du domaine analogique ( $p$ ) et celles du domaine numérique ( $z$ ) (*frequency warping - distorsion des fréquences*) : relation dont il faudra tenir compte pour le calcul du filtre numérique (correction des fréquences) : les fréquences caractéristiques du filtre analogique (*ex.*: fréquence de coupure) vont, par application de la formule de synthèse :  $p = \frac{1-z^{-1}}{T}$  subir un léger décalage (d'autant moins léger que la période d'échantillonnage  $T$  est élevée) .

On a :  $z = e^{pT} = e^{i\omega T} = e^{i2\pi f_N T}$  ( $f_N$  : fréquence Numérique)

La transformation donne:  $z^{-1} = 1 - pT = 1 - i\omega T = 1 - i2\pi f_A T$  ( $f_A$  : fréquence Analogique)

$\rightarrow e^{i2\pi f_N T} = \frac{1}{1 - i2\pi f_A T} \rightarrow$  égalité des phases :  $2\pi f_N T = \text{Arctg}(2\pi f_A T)$

$\rightarrow \boxed{f_A = \frac{1}{2\pi} \text{tg}(2\pi f_N T)}$  (relation non linéaire)  $\leftrightarrow \boxed{f_N = \frac{1}{2\pi T} \text{Arctg}(2\pi f_A T)}$

ou encore :  $\boxed{\omega_A = \frac{1}{T} \text{tg}(\omega_N T)}$

Algorithme de numérisation par la Transformation d'Euler :

Les étapes *c*) et *d*) sont propres à la Transformation d'Euler. Les autres étapes sont communes à tous les types de synthèse.

On dispose de la FT du filtre analogique  $H_A(p)$ .

- a) le gabarit du filtre est donné par  $H_A(p)$
- b) la période d'échantillonnage  $T$  est déterminée d'après la condition de Shanonn.
- c) corriger chaque fréquence Analogique caractéristique  $f_A$  intervenant dans  $H_A(p)$  ( $f_{A_i}$  = fréquences de coupure, fréquences propres ...) pour obtenir les fréquences caractéristiques  $f_{N_i}$  Numériques désirées dans le cahier des charges  $\rightarrow$  modification de  $H_A(p)$  ( $\equiv$  de chaque fréquence caractéristique  $f_{A_i}$ ) en utilisant la relation :

$\left[ f_A \rightarrow \frac{1}{2\pi T} \cdot \text{tg}(2\pi f_N T) \right]$  ou encore :  $\left[ \omega_A \rightarrow \frac{1}{T} \text{tg}(\omega_N T) \right]$

Les fréquences  $f_{N_i}$  désirées sont généralement les  $f_{A_i}$  initiales du filtre analogique.

On corrige donc simplement en faisant dans  $H_A(p)$  :  $\boxed{f_A \rightarrow \frac{1}{2\pi T} \cdot \text{tg}(2\pi f_A T)}$

(Puisque la transformation décale les fréquences caractéristiques, on les décale dans le sens inverse **avant** transformation pour qu'après transformation on retombe sur les fréquences correctes).

- d) utiliser la transformation d'Euler dans  $H_A(p)$  précédemment modifié :  $p \rightarrow \frac{1-z^{-1}}{T}$  pour

obtenir le filtre numérique. On obtient une fonction en  $z$  notée  $F(z)$ . Poser  $H_N(z) = kF(z)$ .

- e) ajuster le gain  $k$  du filtre numérique comme suit :

Ajustement du gain du filtre numérique :

On se place en régime harmonique  $\rightarrow p = i2\pi\nu$  car on définit le gain à certaines fréquences.

- Rappel :

- filtre analogique  $H_A(p)$  :
  - si  $H_A(p)$  est un passe-bas, on définit le gain statique du filtre comme le gain à la fréquence nulle ( $p = i2\pi\nu = 0$  car  $\nu = 0$ )
    - $\rightarrow$  Gain statique =  $H_A(p)|_{p=0} =$  gain à la fréquence nulle
    - $=$  gain au temps  $t = \infty$
  - si  $H_A(p)$  est un passe-haut, on définit le gain à la fréquence infinie
    - $= H_A(p = i2\pi\nu)|_{\nu=\infty} = H_A(p = i\infty)$
    - $=$  gain au temps  $t = 0$
- filtre numérique  $H_N(z)$  :

La Réponse Fréquentielle est obtenue pour  $z = e^{i2\pi\nu T}$ . Elle est périodique de période  $\frac{1}{T}$  et doit être observée entre  $\nu = 0$  et  $\nu = \frac{1}{2T}$ .

(la fréquence infinie analogique devient ici  $\nu = \frac{1}{2T}$ )

$\rightarrow$  d'après la relation de définition  $z = e^{pT}$  on a :

- si  $H_N(z)$  est un passe-bas :  $p = i2\pi\nu = 0 \rightarrow z = e^{pT} = 1$ 
  - $\rightarrow$  gain statique du filtre numérique =  $H_N(z)|_{z=1}$
- si  $H_N(z)$  est un passe-haut :  $\nu = \frac{1}{2T} \rightarrow p = \frac{i\pi}{T} \rightarrow z = e^{pT} = -1$ 
  - $\rightarrow$  gain à la fréquence  $\frac{1}{2T}$  du filtre numérique =  $H_N(z)|_{z=-1}$

- Procédé d'ajustement du gain du filtre numérique :

- si  $H_A(p)$  est un filtre **passe-bas**: on ajuste le gain  $k$  du filtre numérique en faisant:

$$\boxed{H_N(z)|_{z=1} = H_A(p)|_{p=0}} \quad (\text{gain statique})$$

- si  $H_A(p)$  est un filtre **passe-haut** : on ajuste  $k$  en faisant :

$$\boxed{H_N(z)|_{z=-1} = H_A(p)|_{p=i\infty}}$$

- en dehors de ces 2 catégories de filtre, l'ajustement du gain est rarement réalisé.

Remarque :

Cet ajustement du gain devrait en toute rigueur être réalisé pour toute synthèse et donc également pour les méthodes d'Invariance Impulsionnelle et d'invariance indicielle vues avant.

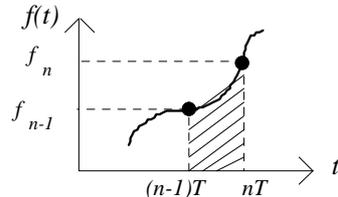
**1.5. Synthèse par Transformation Bilineaire (TB) (≡ équivalence de l'intégration)**

C'est quasiment la transformation en  $w = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$ , transformation aussi très utilisée.

La synthèse par TB est très utilisée pour la synthèse des filtres RII.

On l'appelle encore méthode des trapèzes du fait qu'elle réalise l'équivalence de l'intégration.

Soit  $g(t) = \int_0^t f(u) du$ , intégrale de  $f(t)$



Le passage de  $g_{n-1}$  à  $g_n$  se fait en ajoutant à  $g_{n-1}$  la surface hachurée.

En assimilant cette surface à un trapèze, il vient :  $g_n - g_{n-1} = \frac{(f_n + f_{n-1})}{2} \cdot T$  (2)

Transposons ces opérations dans les domaines  $z$  et  $p$  en supposant les CI nulles :

Transposons cette opération en  $z$  : TZ(2) :  $G(z)[1 - z^{-1}] = F(z)[1 + z^{-1}] \frac{T}{2}$

$$\rightarrow \frac{G(z)}{F(z)} = \frac{T}{2} \cdot \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

alors que l'intégration en  $p$  s'écrit :  $\frac{G(p)}{F(p)} = \frac{1}{p}$

On a donc la relation de passage :  $p = \frac{2}{T} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$  (TB) ou encore :  $z = \frac{1 + p \frac{T}{2}}{1 - p \frac{T}{2}}$

*Inconvénient :* Comme la méthode d'Euler, elle introduit une distorsion, cependant moins importante, de la RI et de la réponse indicielle.

*Remarques :* ① La TB s'écrit :  $z = \frac{1 + p \frac{T}{2}}{1 - p \frac{T}{2}} = \left(1 + p \frac{T}{2}\right) \cdot \left(1 + pT + \frac{p^2 T^2}{4} + \frac{p^3 T^3}{8}\right)$  au 3ème ordre

$$\rightarrow z = 1 + pT + \frac{p^2 T^2}{2} + \frac{p^3 T^3}{4} \text{ au 3ème ordre}$$

La TB s'identifie avec la relation exacte :  $z = e^{pT} = 1 + pT + \frac{p^2 T^2}{2} + \frac{p^3 T^3}{6} + \dots$

jusqu'au 2ème ordre  $\rightarrow$  l'approximation réalisée est meilleure qu'avec la méthode d'Euler.

② La transformation conduit comme les autres types de synthèse (sauf par la relation de définition) à une équation aux différences (SLTI) en discret.

③ La stabilité est conservée et la correspondance est bi-univoque :

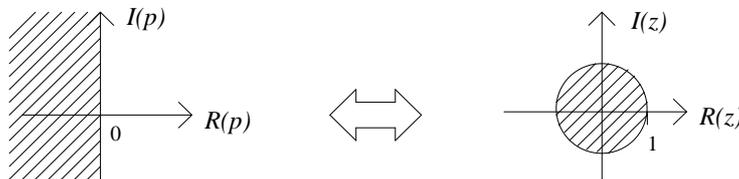
Cherchons la transformée de l'axe imaginaire par la TB :

$$z = \left. \frac{1 + p \frac{T}{2}}{1 - p \frac{T}{2}} \right|_{p=i\omega} = \frac{1 + i\omega \frac{T}{2}}{1 - i\omega \frac{T}{2}} \rightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ \text{Arg } z = 2 \text{Arctg} \left( \frac{\omega T}{2} \right) \end{cases}$$

L'axe imaginaire  $p = i\omega \rightarrow$  cercle unité de centre 0.

Pour  $p = -\alpha + i\omega$  avec  $\alpha > 0$  :  $z = \frac{1 - \frac{\alpha T}{2} + i\omega \frac{T}{2}}{1 + \frac{\alpha T}{2} - i\omega \frac{T}{2}}$  donc  $|z| < 1$ .

$\rightarrow$  le demi-plan gauche ( $R(p) < 0$ ) se transforme en l'intérieur du cercle unité ( $\equiv$  de rayon 1) de centre 0 en  $z$ .



La stabilité est conservée par la TB et la correspondance de la stabilité est bi-univoque.

④ On a, comme pour la méthode d'Euler, un phénomène de distorsion des fréquences (relation non linéaire entre les fréquences analogiques et numériques) qu'il faut corriger.

En effet :  $z = e^{pT} = e^{i\omega T} = e^{i2\pi f_N T}$   $f_N$  : fréquence Numérique

La TB donne :  $z = \left. \frac{1 + p \frac{T}{2}}{1 - p \frac{T}{2}} \right|_{p=i\omega} = \frac{1 + i\omega \frac{T}{2}}{1 - i\omega \frac{T}{2}} = \frac{1 + i\pi f_A T}{1 - i\pi f_A T}$

et l'égalité de  $\text{Arg } z$  donne :  $2\pi f_N T = 2 \text{Arctg } \pi f_A T$

$\rightarrow \boxed{f_A = \frac{1}{\pi T} \cdot \text{tg}(\pi f_N T)}$  (relation non linéaire)  $\leftrightarrow \boxed{f_N = \frac{1}{\pi T} \cdot \text{Arctg}(\pi f_A T)}$

ou encore :  $\boxed{\omega_A = \frac{2}{T} \cdot \text{tg}\left(\frac{\omega_N T}{2}\right)}$   $f_A$  dans  $H_A(p)$  devient  $\frac{1}{\pi T} \cdot \text{tg}(\pi f_A T)$  dans  $H_A(z)$

Algorithme de numérisation par la Transformation Bilinéaire :

La démarche de numérisation comporte, comme pour toutes les méthodes de synthèse vues avant, les étapes a), b), et e) de la méthode de numérisation par Transformation d'Euler, l'étape c) devenant :

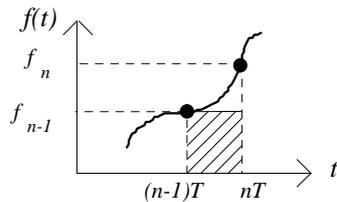
- Correction des fréquences caractéristiques analogiques  $f_{A_i}$  par la formule :

$f_A \rightarrow f_A = \frac{1}{\pi T} \cdot \text{tg}(\pi f_N T)$  ou encore :  $\omega_A \rightarrow \omega_A = \frac{2}{T} \cdot \text{tg}\left(\frac{\omega_N T}{2}\right)$

et l'étape d) utilisant la formule de TB :  $p \rightarrow \frac{2}{T} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$

**1.6. Synthèse par la méthode des Rectangles**

Peu utilisée, elle approxime l'intégrale non pas par un trapèze mais par un rectangle :



$$g(t) = \int_0^t f(u) du$$

- en  $z$  :  $g_n - g_{n-1} = f_{n-1} \cdot T \rightarrow \frac{G(z)}{F(z)} = \frac{Tz^{-1}}{1 - z^{-1}}$

- en  $p$  :  $\frac{G(p)}{F(p)} = \frac{1}{p}$  (intégration)

→ Relation de passage :  $p = \frac{1 - z^{-1}}{Tz^{-1}}$  ou encore :  $z = 1 + Tp$

**1.7. Méthode d'association des pôles et des zéros** (*Matched Transform* - Transformation Adaptée)

On applique les pôles de la FT  $H_A(p)$  du système continu aux pôles de la FT du systèmes discret.

On fait de même avec les zéros de la FT. L'algorithme de cette méthode de synthèse est le suivant :

*Algorithme de numérisation par association des pôles et des zéros :*

*Données :* la FT continue  $H_A(p)$

1. Soient  $p_1, p_2 \dots p_q$  les  $q$  pôles finis de  $H_A(p)$ . On applique ces pôles au domaine  $z$  selon la formule  $z = e^{pT}$  et on obtient ainsi les  $q$  pôles  $b_i$  de la FT  $H_N(z)$  :  $b_i = e^{p_i T}$  pour  $i = 1$  à  $q$ .
2. On fait de même avec les  $m$  zéros  $\rho_1, \rho_2 \dots \rho_m$  de  $H_A(p)$  et on obtient les  $m$  zéros  $r_i = e^{\rho_i T}$  pour  $i = 1$  à  $m$ .
3. Pour le calcul du gain statique pour un passe-bas ( $p = 0 \rightarrow z = e^{pT} = 1$ ) ou du gain à la fréquence infinie pour un passe-haut ( $p = i\infty \rightarrow z = e^{i\pi} = -1$ ), on a :
  - pour un filtre passe-bas ( $q > m$ ), on pose :  $H_N(z)|_{z=1} = H_A(p)|_{p=0}$
  - pour un filtre passe-haut ( $q \leq m$ ), on pose :  $H_N(z)|_{z=-1} = H_A(p)|_{p=i\infty}$

*Exemple :* Filtre passe-bas :  $H_A(p) = \frac{a}{p + a}$

- Il y a 1 pôle  $p = -a$  qui est appliqué à  $z = e^{-aT}$

On a donc :  $H_N(z) = k \cdot \frac{a}{z - e^{-aT}}$  avec  $k$  : gain (statique ici) à régler du filtre

- Ajustement du gain :

$$H_N(z)|_{z=1} = k \cdot \frac{a}{1 - e^{-aT}} = H_A(p)|_{p=0} = 1 \rightarrow k = \frac{1 - e^{-aT}}{a} \rightarrow H_N(z) = \frac{(1 - e^{-aT})}{1 - e^{-aT} \cdot z^{-1}}$$

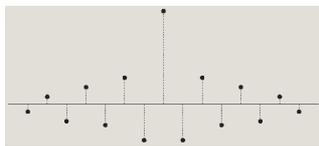
## 2. Synthèse des filtres numériques RIF

La structure présente, par rapport aux filtres RII, l'avantage d'être toujours stable (avec une implémentation non récursive). L'inconvénient essentiel est, par rapport à une structure RII équivalente, une complexité plus grande (un plus grand nombre de coefficients, de termes intervenant dans la relation d'Entrée/Sortie).

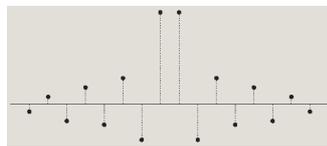
Un filtre RIF causal est à phase linéaire si sa RI  $h_n$ , de support de longueur  $N$ , présente une symétrie par rapport à la demi-séquence  $(\frac{N-1}{2})$ . Il introduit un retard de  $\frac{N-1}{2}$  échantillons.

On distingue habituellement 4 types de filtres RIF causaux à phase linéaire :

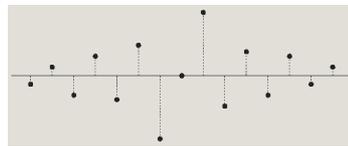
Type	$N$	Symétrie
I	<i>impair</i>	$h_n = h_{N-1-n}$
II	<i>pair</i>	$h_n = h_{N-1-n}$
III	<i>impair</i>	$h_n = -h_{N-1-n}$
IV	<i>pair</i>	$h_n = -h_{N-1-n}$



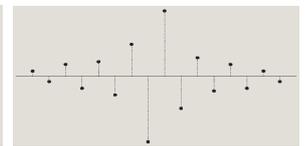
Type I



Type II



Type III



Type IV

### 2.1. Synthèse par échantillonnage de la FT

Lorsqu'une RI  $h_n$  est de durée finie  $N$ , on peut échantillonner son spectre  $H(\nu)$  en au moins  $N$  points sans provoquer de repliement, de sous-échantillonnage.

D'où l'idée assez naturelle d'échantillonner la FT  $H(\nu)$  d'un gabarit de filtre désiré en le nombre de points  $N$  voulu, et en prendre ensuite la TFD inverse.

### 2.2. Synthèse optimale (minimax) des filtres RIF

La méthode se fonde sur une propriété particulière des fonctions qui sont données par un somme de termes du type  $\cos(2\pi n\nu)$  et sur l'écriture d'une FT sous la forme :  $H(\nu) = |H(\nu)| e^{i \text{Arg}[H(\nu)]}$

De plus, toute FT peut se mettre sous la forme :  $H(\nu) = e^{-i(N-1)\pi\nu} \cdot e^{-i\frac{L}{2\pi}} \cdot H'(\nu)$  avec  $H'(\nu) = Q(\nu) \cdot P(\nu)$  où  $P(\nu)$  est un polynôme constitué d'une somme de termes en  $\cos(2\pi n\nu)$  et  $Q(\nu)$  un polynôme de degré au plus égal à 1.

Le tableau suivant illustre la décomposition pour les 4 types de filtres RIF causaux à phase linéaire :

Type	$N$	Symétrie	$L$	$Q(\nu)$	$P(\nu)$
I	<i>impair</i>	$h_n = h_{N-1-n}$	0	1	$\sum_{k=0}^{(N-1)/2} a'_k \cos(k2\pi\nu)$
II	<i>pair</i>	$h_n = h_{N-1-n}$	0	$\cos(\pi\nu)$	$\sum_{k=0}^{N/2-1} b'_k \cos(k2\pi\nu)$
III	<i>impair</i>	$h_n = -h_{N-1-n}$	1	$\sin(2\pi\nu)$	$\sum_{k=0}^{(N-3)/2} c'_k \cos(k2\pi\nu)$
IV	<i>pair</i>	$h_n = -h_{N-1-n}$	1	$\sin(\pi\nu)$	$\sum_{k=0}^{N/2-1} d'_k \cos(k2\pi\nu)$

Les valeurs des coefficients  $a'_k, b'_k, c'_k$  et  $d'_k$  ne sont pas précisés ici.

L'optimisation du filtre requiert, outre le choix de l'ordre et du type de filtre, de spécifier les éléments suivants :

- une fonction  $D(\nu)$  qui est l'expression idéale désirée de  $H'(\nu)$
- une fonction de poids  $W(\nu)$  servant à définir une fonction d'erreur  $E(\nu)$  pondérée :

$$E(\nu) = W(\nu)[D(\nu) - H'(\nu)]$$

qui peut encore être mise sous la forme :

$$E(\nu) = \hat{W}(\nu)[\hat{D}(\nu) - P(\nu)] \quad \text{avec} \quad \hat{W}(\nu) = W(\nu)Q(\nu) \quad \text{et} \quad \hat{D}(\nu) = D(\nu)/Q(\nu)$$

Les fonctions  $D(\nu)$  et  $W(\nu)$  sont généralement construites, approchées comme des fonctions constantes par morceaux.

L'approximation optimale de *Tchebychev* consiste à trouver la fonction  $P(\nu)$  (c'est-à-dire les coefficients  $a'_k, b'_k, c'_k$  et  $d'_k$ ) qui minimise l'erreur absolue maximale  $\|E\|$ , soit :

$$\|E\| = \min_{P(\nu)} \max_{\nu \in A} |E(\nu)| \quad \text{où } A \text{ représente les bandes de fréquences sur lesquelles on réalise l'approximation.}$$

La forme donnée à  $P(\nu)$  vise à exploiter le théorème de l'alternance :

*Théorème de l'alternance*

Si  $P(\nu)$  est de la forme :  $P(\nu) = \sum_{k=0}^{r-1} \alpha_k \cos(k2\pi\nu)$ , la Condition Nécessaire et Suffisante pour que  $P(\nu)$  soit la solution unique de l'approximation de *Tchebychev* sur un compact  $A$  inclus dans l'intervalle de fréquences  $\left[0; \frac{1}{2}\right]$  est que l'erreur  $E(\nu)$  possède sur  $A$  au moins  $r + 1$  fréquences extrémales, c'est-à-dire qu'il doit exister sur  $A$ ,  $r + 1$  fréquences  $\nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_{r+1}$  telles que  $E(\nu_{i+1}) = -E(\nu_i)$  pour  $i = 1 \dots r$  avec  $|E(\nu_i)| = \max_{\nu \in A} |E(\nu)|$ .

Un algorithme permettant de trouver la solution optimale est l'algorithme de *Remez*.

Par application du théorème de l'alternance, il est possible de trouver  $r + 1$  fréquences  $\nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_{r+1}$  pour lesquelles  $E(\nu_i) = \hat{W}(\nu_i)[\hat{D}(\nu_i) - P(\nu_i)] = (-1)^i \delta$  avec  $i = 1 \dots r + 1$  où  $\delta$  est la borne supérieure de l'erreur.

Cette relation peut être écrite matriciellement et, en utilisant l'expression précédente  $\|E\| = \min_{P(\nu)} \max_{\nu \in A} |E(\nu)|$ , on a :

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos(2\pi\nu_0) & \dots & \cos[2\pi(r-1)\nu_0] & \frac{1}{\hat{W}(\nu_0)} \\ 1 & \cos(2\pi\nu_1) & \dots & \cos[2\pi(r-1)\nu_1] & \frac{-1}{\hat{W}(\nu_1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos(2\pi\nu_r) & \dots & \cos[2\pi(r-1)\nu_r] & \frac{(-1)^r}{\hat{W}(\nu_r)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{r-1} \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{D}(\nu_0) \\ \hat{D}(\nu_1) \\ \vdots \\ \hat{D}(\nu_r) \end{bmatrix}$$

où les inconnues sont les coefficients  $\alpha_i$ , les fréquences  $\nu_i$  ainsi que le coefficient  $\delta$ .

On peut également considérer ces équations comme des conditions sur  $\alpha_i$  et  $\delta$  pour que  $E(\nu)$  soit forcée à des valeurs alternatives. En résolvant explicitement ces équations par rapport à  $\delta$ , on trouve :

$$\delta = \frac{\sum_{i=0}^r a_i \hat{D}(\nu_i)}{\sum_{i=0}^r \frac{(-1)^i a_i}{\hat{W}(\nu_i)}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a_i = \prod_{j=0, j \neq i}^r \frac{1}{x_j - x_i} \\ x_i = \cos(2\pi\nu_i) \end{cases}$$

Ce résultat est à la base de l'algorithme de *Remez* :

1. Choisir une estimation initiale de  $r + 1$  fréquences  $\nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_{r+1}$  par exemple équi-espacées

2. Calculer  $\delta$  par l'expression 
$$\delta = \frac{\sum_{i=0}^r a_i \hat{D}(\nu_i)}{\sum_{i=0}^r \frac{(-1)^i a_i}{\hat{W}(\nu_i)}}$$

3. Comme  $P(\nu)$  est un polynôme de degré  $r - 1$  en  $x = \cos(2\pi\nu)$ , on peut définir un polynôme de ce degré passant par les points  $[x_i, (-1)^i \delta]$  par interpolation de Lagrange :

$$P(\nu) = \frac{\sum_{i=0}^r \frac{\beta_i c_i}{x - x_i}}{\sum_{i=0}^r \frac{\beta_i}{x - x_i}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x = \cos(2\pi\nu) \\ x_i = \cos(2\pi\nu_i) \\ \beta_i = \prod_{j=0, j \neq i}^r \frac{1}{x_j - x_i} \\ c_i = \hat{D}(\nu_i) - (-1)^i \frac{\delta}{\hat{W}(\nu_i)} \end{cases}$$

Comme les fréquences  $\nu_i$  ne sont pas exactes, les extréma de  $E(\nu)$  ne sont pas tous égaux à  $\pm \delta$ . On procède alors de la façon suivante : On calcule  $E(\nu)$  sur le compact  $\left[0; \frac{1}{2}\right]$  en se servant des relations  $E(\nu) = \hat{W}(\nu)[\hat{D}(\nu) - P(\nu)]$

et  $P(\nu) = \frac{\sum_{i=0}^r \frac{\beta_i c_i}{x - x_i}}{\sum_{i=0}^r \frac{\beta_i}{x - x_i}}$  en vue de déterminer les fréquences  $\nu_i$  pour lesquelles les  $r + 1$  plus grandes valeurs de

$|E(\nu)|$  sont atteintes. On retourne au 1<sup>er</sup> point en remplaçant les  $\nu_i$  par leur nouvelle valeur. C'est l'échange de l'algorithme de *Remez*. D'après le théorème de l'alternance, on peut arrêter les échanges lorsque les  $r + 1$  extréma sont tous égaux.

**2.3. Synthèse par la méthode de la fenêtre** (*fenêtrage, troncature de la RII du filtre*)

Prenons un exemple (ne conduisant pas ici à un filtre RIF à phase linéaire du fait du caractère non symétrique de la RI) pour montrer comment transformer un filtre RII en un filtre RIF en tronquant sa RI :

Exemple : Filtre d'entrée  $x(n)$  et de sortie  $y(n)$  :

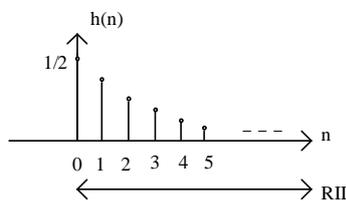
$$y(n) = \frac{1}{2}(x(n) + y(n-1)) \rightarrow y(n-1) = \frac{1}{2}(x(n-1) + y(n-2))$$

$$y(n-2) = \frac{1}{2}(x(n-2) + y(n-3))$$

...

$$\rightarrow y(n) = \frac{1}{2}\left(x(n) + \frac{1}{2}x(n-1) + \frac{1}{4}x(n-2) + \dots\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}}x(n-k)$$

RI :  $h(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}}\delta(n-k)$  de support infini : RII

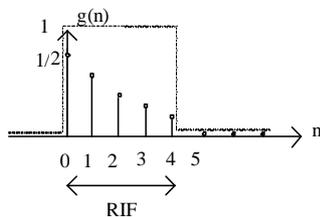


Troncature :  $\rightarrow h(n) = \sum_{k=0}^N \frac{1}{2^{k+1}}\delta(n-k)$  : Somme sur N termes : support N+1  $\rightarrow$  RIF

( $\infty$  remplacé par N (majorant) )

$\rightarrow$  Masque de taille infinie remplacé par un masque de taille N : erreur de troncature.

Exemple : Troncature sur N = 4 : Soit  $g(n)$  le filtre RIF formé par troncature de  $h(n)$



$\rightarrow$  Masque de taille 5 pour le filtre  $g(n)$ , conduisant à l'algorithme non récursif :

1/2	1/3	1/4	1/5	1/6
-----	-----	-----	-----	-----

$$y(n) = \sum_{k=0}^N h(k)x(n-k) = \frac{1}{2}x(n) + \frac{1}{3}x(n-1) + \frac{1}{4}x(n-2) + \frac{1}{5}x(n-3) + \frac{1}{6}x(n-4)$$

Remarques :

- L'erreur de troncature n'apparaît pas pour un filtre récursif car on utilise alors la Transformée en z :

$$h(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}}\delta(n-k) \xrightarrow{TZ} H(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-0.5z^{-1}}\right) = \frac{Y(z)}{X(z)} \rightarrow X(z) = (2-z^{-1})Y(z)$$

conduisant à une relation d'Entrée/Sortie récursive du filtre  $h(n)$  causal d'entrée  $x(n)$  et de sortie  $y(n)$  :

$$y(n) = \frac{1}{2}(x(n) + y(n-1))$$

- L'utilisation d'une fenêtre de compensation (Hamming, Hanning, Blackman, Bartlett ...) à la place d'une fenêtre de troncature rectangulaire permet de réduire les distorsions spectrales causées par celle-ci.

**ANNEXE**

**Tables des correspondances en z et Laplace  
par synthèse par Invariance Indicielle**

TABLE DES CORRESPONDANCES EN Z ET LAPLACE PAR SYNTHÈSE PAR INVARIANCE INDICIELLE (FONCTIONS CAUSALES)

	$X_A(s)$	$X_N(z) = (1 - z^{-1})Z\left[\frac{X_A(s)}{s}\right]$
1	$\frac{1}{\tau s}$	$\frac{T}{\tau} \cdot \frac{1}{z-1}$
2	$\frac{1}{(\tau s)^2}$	$\frac{1}{2} \left(\frac{T}{\tau}\right)^2 \cdot \frac{z+1}{(z-1)^2}$
3	$k \frac{1}{1 + \tau s}$	$k \frac{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}}{z - e^{-\frac{T}{\tau}}}$
4	$\frac{1}{\tau' s(1 + \tau s)}$	$\frac{\frac{T}{\tau'} \left( z - e^{-\frac{T}{\tau'}} \right) - \frac{\tau}{\tau'} (z-1) \left( 1 - e^{-\frac{T}{\tau}} \right)}{(z-1) \left( z - e^{-\frac{T}{\tau'}} \right)} = \frac{T - \tau \left( 1 - e^{-\frac{T}{\tau}} \right)}{\tau'} \cdot \frac{\left[ \frac{e^{-\frac{T}{\tau}} \left( \frac{T}{\tau} \right) - \left( 1 - e^{-\frac{T}{\tau}} \right)}{\left( \frac{T}{\tau} \right) - \left( 1 - e^{-\frac{T}{\tau}} \right)} \right]}{(z-1) \left( z - e^{-\frac{T}{\tau}} \right)}$
5	$\frac{1}{(1 + \tau s)(1 + \tau' s)}$	$1 + \frac{\tau \tau'}{\tau - \tau'} \left( -\frac{1}{\tau'} \frac{z-1}{z - e^{-\frac{T}{\tau}}} + \frac{1}{\tau} \frac{z-1}{z - e^{-\frac{T}{\tau'}}} \right)$
6	$\frac{1}{1 + 2m \frac{s}{\omega_0} + \left( \frac{s}{\omega_0} \right)^2}$  avec :  $\omega_0' = \omega_0 \sqrt{1 - m^2}$	1ère forme : $\frac{b_1 z + b_0}{z^2 + a_1 z + a_0}$  avec :  $a_0 = e^{-2m\omega_0 T}$ $a_1 = -2\sqrt{a_0} \cos(\omega_0' T)$  $b_0 = a_0 + \sqrt{a_0} \left[ m \frac{\omega_0}{\omega_0'} \sin(\omega_0' T) - \cos(\omega_0' T) \right]$  $b_1 = 1 - \sqrt{a_0} \left[ m \frac{\omega_0}{\omega_0'} \sin(\omega_0' T) + \cos(\omega_0' T) \right]$
	Cas $0 < m < 1$	2nde forme : $\frac{b_1 z + b_0}{(z - z_1)(z - z_1^*)}$  avec :  $z_1 = e^{-m\omega_0 T} e^{j\omega_0' T}$ $z_1^* = e^{-m\omega_0 T} e^{-j\omega_0' T}$

## TD 7. Filtrage linéaire - Analyse & Synthèse des filtres numériques

### I. Filtrage linéaire

#### 1. Filtres non récurrents ( $\equiv$ RIF) ( $\equiv$ MA)

On propose l'étude de l'algorithme suivant :

**Algorithme b :**  $s_n = 0.5e_n + 0.5e_{n-1}$  correspondant (notation plus compacte) au filtre échantillonné à la cadence  $T$  :

$$s(nT) = 0.5e(nT) + 0.5e[(n-1)T]$$

$e(nT) \text{ --- } \square \text{ --- } s(nT)$

Exprimer, représenter :

0. Le schéma-bloc (schéma fonctionnel) du filtre
1. La Réponse Impulsionnelle  $\{h_n\} = \{h(nT)\}$
2. (facultatif) La réponse indicielle  $\{d_n\} = \{d(nT)\}$
3. La Fonction de Transfert  $H(z)$
4. La Réponse en Fréquence  $H(f)$ , son module  $|H(f)|$  et son argument  $\Phi(f)$  ( $f$  est la fréquence)
5. Les courbes  $H(f)$  et  $\Phi(f)$  dans son domaine d'utilisation
6. La fonction réalisée (nature du filtre)
7. Facultatif : Mêmes questions pour les algorithmes :

Algorithme a :  $s_n = e_n$

Algorithme c :  $s_n = -0.5e_n + 0.5e_{n-1}$

Algorithme d :  $s_n = -0.5e_n + 0.5e_{n-2}$

Algorithme e:  $s_n = 0.5e_n + 0.5e_{n-2}$  : quelle fréquence d'échantillonnage choisir pour couper les fréquences de l'ordre de 1 kHz ?

#### 2. Filtre binomial de Bernoulli

On considère un filtre de Bernoulli dont la RI est définie par :

$$\begin{cases} h_0 = p \\ h_1 = q \\ h_n = 0 \text{ ailleurs} \end{cases} \quad \text{avec } p \text{ et } q \text{ tels que : } p + q = 1$$

1. Déterminer la FT  $H(z)$  du filtre de Bernoulli.
2. Déterminer la RI  $g_n$  du filtre binomial d'ordre 2 obtenu en composant 2 fois le même filtre de Bernoulli.
3. Les filtres binomiaux sont-ils : RIF, causaux, stables ?
4. Déterminer la RF  $H(\nu)$  du filtre de Bernoulli et tracer  $|H(\nu)|$  dans le cas particulier  $p = q = 0.5$ .
5. Déterminer la nature (Passe-Bas, Passe-Haut, Passe-Bande, Coupe-Bande) du filtre de Bernoulli dans ce cas particulier.

### III. Synthèse des filtres numériques

#### Synthèse des filtres numériques RII

##### 1. Synthèse d'un filtre du 1er ordre [voir TP]

On cherche à réaliser un filtre numérique approchant le filtre analogique du 1er ordre de type passe-bas de FT :

$$H_A(p) = \frac{H_0}{1 + \tau p} \quad \left\{ \begin{array}{l} H_0 : \text{gain statique} : H_0 = 1 \\ \text{Fréquence de coupure} : f_c = \frac{1}{2\pi\tau} = 1 \text{ Hz} \end{array} \right.$$

en l'échantillonnant à  $T = 0.1$  s  $\left( \rightarrow F = \frac{1}{T} = 10 \text{ Hz} \right)$

1) Déterminer le filtre numérique par synthèse (en donnant la Fonction de Transfert et l'algorithme de programmation) :

a) - par Invariance Impulsionnelle :  $H_N(z) = Z[H_A(p)]$

b) - par invariance indicielle :  $H_N(z) = (1 - z^{-1})Z\left[\frac{H_A(p)}{p}\right]$

Annexe

c) - par la Transformation d'Euler :

. Correction des fréquences (facultatif)

.  $p = \frac{1 - z^{-1}}{T}$

. Ajustement du gain (facultatif)

d) - par la Transformation Bilinéaire :

. Correction des fréquences (facultatif)

.  $p = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$

. Ajustement du gain (facultatif)

Annexe

2) Comparer les 4 types de synthèse entre elles et avec le filtre analogique :

A) En Temps :

- en traçant les Réponses Impulsionnelle et indicielle échantillonnées du filtre analogique
- en traçant les Réponses Impulsionnelle et indicielle obtenues pour chaque type de synthèse du filtre numérique.

B) En Fréquence :

- en traçant la Réponse Fréquentielle échantillonnée du filtre analogique.
- en traçant la Réponse Fréquentielle de chaque filtre numérique synthétisé.

3) Faire varier la période d'échantillonnage  $T$  et constater l'effet sur la simulation.

4) Pourquoi avoir choisi  $T = 0.1$  s pour la simulation ?

#### Indications

Les réponses analogiques temporelles et fréquentielles sont obtenues par échantillonnage des réponses analogiques. Les réponses numériques temporelles pourront être obtenues par division de polynômes.

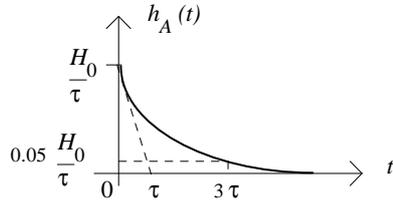
Les réponses numériques fréquentielles sont obtenues par la relation :  $H_N(z = e^{i2\pi vT})$  ( $v$  est la fréquence).

L'échantillonnage se fera en posant :  $t = nT$  ou  $v = nF$  selon que la fonction à échantillonner est temporelle ou fréquentielle ( $F$  est la fréquence d'échantillonnage,  $T$  est la période d'échantillonnage). Déterminer  $F$ .

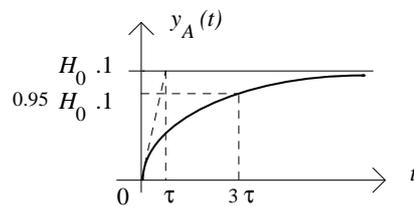
**Rappels**

- 1er ordre Fondamental :  $H_A(p) = \frac{H_0}{1 + \tau p}$

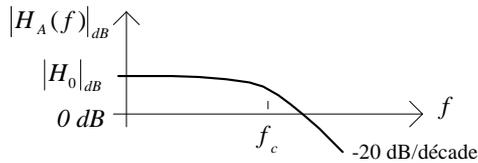
- RI : (Analogique)  $h_A(t) = \text{TL}^{-1} [H_A(p)] = \frac{H_0}{\tau} e^{-t/\tau} \Gamma(t)$



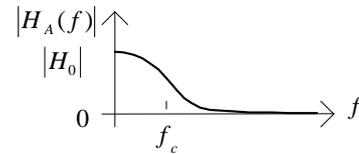
- Réponse indicielle : (Analogique)  $y_A(t) = \text{TL}^{-1} [H_A(p) \cdot \text{TL}[\Gamma(t)]] = \text{TL}^{-1} \left[ \frac{H_A(p)}{p} \right]$   
 $\rightarrow y_A(t) = H_0 (1 - e^{-t/\tau}) \Gamma(t)$



Réponse Fréquentielle : (Analogique)  $H_A(f) = H_A(p = i2\pi f) = \frac{H_0}{1 + i2\pi f \tau}$



$f_c = \frac{1}{2\pi \tau}$



## TD 7 ANNEXE. Filtrage linéaire - Analyse & Synthèse des filtres numériques

### I. Filtrage linéaire

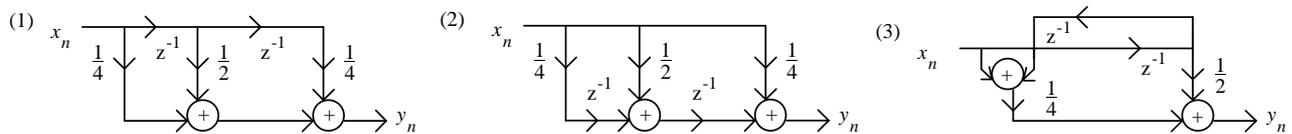
#### 1. Filtre numérique défini par son équation aux différences

Soit le filtre numérique défini par l'équation aux différences :  $y(k) - 1.5y(k-1) - y(k-2) = u(k)$   
 où  $y(k)$  désigne la sortie et  $u(k)$  l'entrée.

1. Déterminer sa Réponse Impulsionnelle  $h(k)$  ainsi que sa Fonction de Transfert  $H(z)$
2. Déterminer sa réponse  $y(k)$  lorsque  $u(k) \equiv 0$  mais avec les Conditions Initiales :  $y(-1) = 0$  et  $y(-2) = 1$

#### 2. Structures de réalisation

Soient les 3 structures de réalisation du même filtre. Quel est l'avantage de la 3ème ?



Programmer la réponse du filtre à  $x_n = \cos(\omega n T)$  (régime harmonique) ( $T$  : période d'échantillonnage).

#### 3. Filtre réalisable

Montrer que la condition pour qu'un filtre numérique soit réalisable ( $\equiv$  utilisable en Temps Réel) est que le degré du dénominateur de sa FT  $H(z)$  soit supérieur ou égal au degré du numérateur de sa FT, soit  $n \geq m$  :

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^m a_k z^k}{\sum_{k=0}^n b_k z^k}$$

#### 4. Filtre numérique avec bloqueur

Soit un filtre numérique causal de Réponse Impulsionnelle  $h_k$ . On place en cascade avec ce filtre un bloqueur d'ordre 0 :



L'ensemble se comporte comme un filtre de Réponse Impulsionnelle  $g(t)$ .

Déterminer l'expression de  $g(t)$  en fonction de  $h(t = kT)$ .

## 5. Filtres récurrents

On propose l'étude de l'algorithme suivant :

$$s(n) = A e(n) + B s(n-1)$$

Exprimer la Fonction de Transfert  $H(z)$  du filtre récurrent. En déduire l'expression du pôle de cette fonction. Quelle doit être la condition sur B pour que le filtre soit stable ?

On suppose cette condition réalisée dans tout ce qui suit. Exprimer alors :

1. La séquence Réponse Impulsionnelle  $\{h(n)\}$  par l'analyse directe et la Réponse Impulsionnelle  $h(t)$  à l'aide de la Transformation en z. En déduire la constante de temps  $\tau$  du filtre. Quel est le coefficient qui permet son réglage ? Représenter  $h(t)$ .
2. Mêmes questions pour la réponse indicielle  $\{d(n)\}$
3. La Fonction de Transfert  $H(j\omega)$  et son module  $H$
4. On suppose  $B > 0$ . Exprimer alors  $H_{\max}$  et  $H_{\min}$
5. On désire réaliser un filtre passe-bas. On pose alors  $H_{\max} = 1$   
En déduire une relation entre A et B
6. Pour que l'algorithme soit aisément programmable, on choisit  $A = 2^{-i}$   
En déduire l'expression de B puis celle de  $H_{\min}$  en fonction de i.
7. Donner l'expression des coefficients A et B et représenter l'allure des courbes  $H(f)$  (module et phase) pour  $i = 1, 2, 3, 4$  sur un même graphe. Que se passe-t-il lorsque i augmente ?

## 6. Echo acoustique

Implémenter, sur un signal sonore, le filtre générateur d'échos d'équation aux différences :  $y_n = x_n + \alpha y_{n-1}$  en le transposant de telle sorte à obtenir un écho **stable** et **perceptible** (le retard doit être d'au moins environ 100 ms pour être audible) sachant que le signal sonore  $x_n$  a été échantillonné au taux d'échantillonnage de 10 kHz.

## 7. Filtres

Visualiser la Réponse Fréquentielle des filtres passe-bas, passe-haut, coupe-bande et passe-bande de *Butterworth*, *Tchebychev* ... d'ordre variable, à l'aide du programme *filters*.

## 8. Filtre RIF à phase linéaire de rang 2

Les filtres RIF à phase linéaire de rang 2 sont définis par l'équation de récurrence :

$$y_n = a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + a_0 x_{n-2}$$

- a) Donner la structure directe de réalisation
- b) Donner la Réponse Impulsionnelle  $\{h(n)\}$  du filtre et la tracer
- c) Donner sa réponse indicielle  $\{d(n)\}$  et la tracer
- d) Donner sa Réponse Fréquentielle (module et phase) et la tracer dans les 3 cas :

$$\begin{cases} a_0 = 1/4 \\ a_1 = 1/2 \end{cases} \rightarrow \text{Type de filtre ?}$$

$$\begin{cases} a_0 = -1/4 \\ a_1 = 1/2 \end{cases} \rightarrow \text{Type de filtre ?}$$

$$\begin{cases} a_0 = 1/2 \\ a_1 = 0 \end{cases} \rightarrow \text{Type de filtre ?}$$

**9. Filtre récursif du 1er ordre**

Soit le filtre d'équation aux différences :  $y_n = a_0x_n - b_1y_{n-1}$

- a) Donner la structure directe de réalisation
- b) Donner la RI  $\{h(n)\}$  du filtre et la tracer successivement pour :

$a_0 = 1$	$a_0 = 1$	$a_0 = 1$
$b_1 = 0.7$	$b_1 = -0.7$	$b_1 = 1.1$

- c) Donner la réponse indicielle du filtre et la tracer successivement pour :

$a_0 = 1$	$a_0 = 1$	$a_0 = 1$
$b_1 = 0.7$	$b_1 = -0.7$	$b_1 = 1.1$

- d) Donner la Réponse Fréquentielle (module et phase) du filtre et la tracer successivement pour :

$a_0 = 1$	$a_0 = 1$	$a_0 = 1$
$b_1 = -0.5$	$b_1 = 0.5$	$b_1 = -1.1$
→ Type de filtre ?	→ Type de filtre ?	→ Type de filtre ?

**10. Filtre récursif du 2nd ordre**

Mêmes questions a) b) c) et d) pour le filtre d'équation aux différences :  $y_n = a_0x_n - b_1y_{n-1} - b_2y_{n-2}$

Pour b) et c) on prendra successivement :

$a_0 = 1$	$a_0 = 1$	$a_0 = 1$
$b_1 = -0.6$	$b_1 = -0.5$	$b_1 = -0.5$
$b_2 = -0.2$	$b_2 = 0.6$	$b_2 = -0.6$

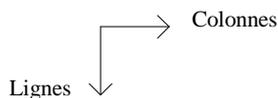
Et pour d) :

$a_0 = 1$	$a_0 = 1$	$a_0 = 1$ (Cas d'instabilité)
$b_1 = -0.6$	$b_1 = -0.5$	$b_1 = -0.5$
$b_2 = -0.2$	$b_2 = 0.6$	$b_2 = -0.6$

**11. Restauration d'image [voir TP]**

On considère le filtre de dégradation suivant, d'entrée  $f_n$  et de sortie  $g_n$  :  $g_n = f_n - f_{n-1} + f_{n-2}$

On applique ce filtre sur chaque ligne d'une image en noir et blanc numérisée :  $f_n$  représente l'intensité lumineuse (niveau de gris :  $0 \leq f_n \leq 255$ ) d'un point (pixel) d'indice  $n$  ( $0 \leq n \leq nx - 1$ ) d'une ligne de l'image orientée suivant la convention : ( $0 \equiv$  noir,  $255 \equiv$  blanc) ( $nx$  : nombre de colonnes de l'image,  $ny$  : nombre de lignes)



- I.
  1. Déterminer la Fonction de Transfert  $H(z)$  du filtre de dégradation.
  2. Donner la Réponse Impulsionnelle  $h_n$  du filtre et la tracer.

3. Déterminer le filtre de restauration :
  - en inversant entrée et sortie dans l'équation aux différences du filtre de dégradation
  - en inversant la FT  $H(z)$  du filtre de dégradation, soit  $H'(z) = \frac{1}{H(z)}$  : FT du filtre de restauration.
4. Le caractère causal des filtres impose quel sens de balayage d'une ligne d'image ? (gauche  $\rightarrow$  droite ou droite  $\rightarrow$  gauche)
5. Appliquer successivement les filtres de dégradation et de restauration, et inversement.

**II.**

Mêmes questions (1. à 5.) avec la version anticausale du même filtre de dégradation :  $g_n = f_n - f_{n+1} + f_{n+2}$

**II. Analyse des filtres numériques**

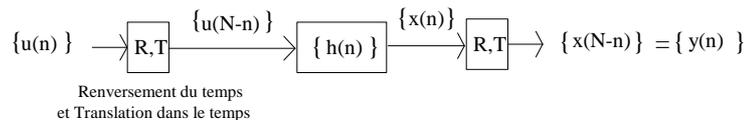
**1. Filtrage en temps différé**

Pour beaucoup de problèmes de filtrage, il serait intéressant de disposer de filtres à déphasage nul ; mais on sait qu'un filtre causal ne peut avoir de déphasage nul ( $\forall$  la fréquence).

Cette notion de filtre causal s'estompe si on opère en dehors d'un contexte temps réel. Une technique classique de filtrage en temps différé consiste à mémoriser le signal à traiter (de durée finie) et à le faire passer dans un filtre dans le sens normal, puis en sens inverse.

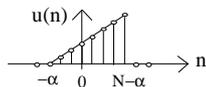
Nous étudions ici deux manières de réaliser un filtrage sans déphasage.

*1.1. Etude du montage de base*



Les signaux  $\{u(n)\}$  et  $\{y(n)\}$  ont une durée finie N.  $\{h(n)\}$  est la Réponse Impulsionnelle d'un filtre causal.

1.1.1. Représenter l'allure du signal  $\{y(n)\}$  si on prend :



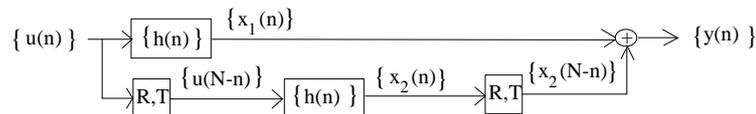
et  $\{h(n)\} = \{\delta(n)\}$  (Cas particuliers dans cette question seulement).

1.1.2. Si un signal  $\{w(n)\}$  a pour Transformée en z (TZ)  $W(z)$ , calculer la TZ de  $\{w(-n)\}$  en fonction de celle de  $\{w(n)\}$ .

1.1.3. Soit  $H(z)$  la TZ de  $\{h(n)\}$ , déterminer  $\frac{Y(z)}{U(z)}$  en fonction de la TZ de  $\{h(n)\}$ .

1.1.4. En déduire un schéma-bloc simplifié du montage de base.

*1.2. Première Procédure*

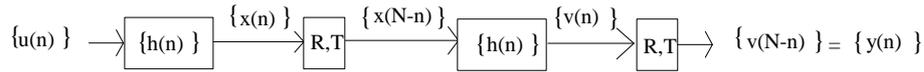


1.2.1. Calculer la Fonction de Transfert  $T_1(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$ .

1.2.2 Montrer que la Réponse Fréquentielle associée peut avoir un déphasage  $\psi = Arg[T_1(e^{i2\pi v})]$  nul.

1.2.3. Pour quelles valeurs du déphasage de  $H(e^{i2\pi v})$ ,  $\psi$  est-il nul ?

1.3. Seconde procédure



1.3.1. Calculer  $T_2(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$ .

1.3.2. Montrer que la Réponse Fréquentielle associée  $T_2(e^{i2\pi\nu})$  a aussi un déphasage nul.

1.3.3. Quel est son gain en module :  $|T_2(e^{i2\pi\nu})|$  en fonction de celui du filtre de base  $|H(e^{i2\pi\nu})|$ .

1.4. Expliquer la phrase de l'énoncé :

« Faire passer le signal à traiter  $\{u(n)\}$  (de durée finie N) dans un filtre de Réponse Impulsionnelle  $\{h(n)\}$  dans le sens normal, puis en sens inverse ».

2. Filtre en peigne

Le modèle d'un système discret d'entrée  $\{x_n\}$  et de sortie  $\{y_n\}$  est donné par l'équation de récurrence :

$$y_n = x_n - x_{n-N} \quad \text{où } N \text{ est une constante entière } \in \mathbf{N}^*$$

1. Donner la Fonction de Transfert  $H(z)$  du filtre.
2. Déterminer et tracer sa Réponse Impulsionnelle.
3. Calculer et tracer pour  $N = 8$ , le module de sa Réponse Fréquentielle.
4. Quel est le type de ce filtre (pour  $N = 8$ ) ?

3. Filtrage d'écho

Lors de l'enregistrement en studio d'un signal  $x(t)$ , un écho s'ajoute généralement à celui-ci et le récepteur (enregistreur) reçoit en fait :

$$y(t) = x(t) + \alpha x(t-\tau) \quad \text{où } 0 < \alpha < 1 \quad \text{et } \tau > 0$$

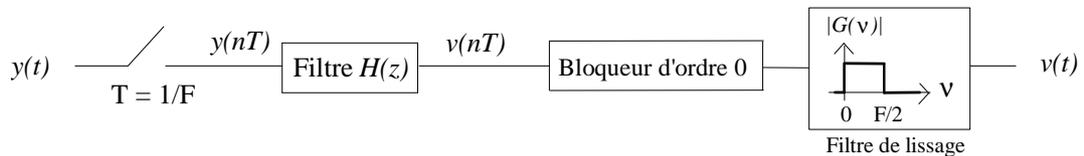
On peut réduire l'effet d'écho en traitant le signal  $y(t)$ .

A. Le traitement est analogique



- A.1. Déterminer la Fonction de Transfert  $H(v)$  du filtre qui produit  $v(t) = x(t)$ .
- A.2. Tracer l'allure des spectres d'amplitude et de phase de  $H(v)$ .
- A.3. Comment faire pour assimiler  $H(v)$  à un 1<sup>er</sup> ordre du type :  $\frac{H_0}{1 - i \frac{v}{v_0}}$  (pour les fréquences faibles) ?

B. Le traitement est numérique



On suppose que le signal  $x(t)$  est à bande de fréquences limitée à  $F_m$  ( $X(v) = 0$  pour  $v > F_m$ )

- B.1. On pose  $\tau = NT$ . Comment choisir  $N$  ?
- B.2. Donner la FT  $H(z)$  du filtre (ainsi que son équation aux différences ou algorithme) qui engendre  $v(nT) = x(nT)$ .

#### 4. Filtrage demi-bande

Un filtre numérique demi-bande de type RIF à phase linéaire, d'entrée  $x(nT)$  et de sortie  $y(nT)$  (notés plus simplement  $x_n$  et  $y_n$ ) où  $T$  représente la période d'échantillonnage ( $F = 1/T$  est la fréquence d'échantillonnage) est défini par une Réponse Fréquentielle  $H(f)$  réelle ( $f$  est la fréquence), antisymétrique par rapport au point  $(F/4, 0.5)$  :

$$\begin{cases} H\left(\frac{F}{4}\right) = 0.5 \\ H\left(\frac{F}{4} + f\right) = 1 - H\left(\frac{F}{4} - f\right) \end{cases}$$

On considère ici le filtre dont l'équation récurrente est donnée par :  $y_n = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{1}{2} x_{n-1} + \frac{1}{2} x_{n+1} \right)$

1. Déduire de la Fonction de Transfert  $H(z)$  du filtre, sa Réponse Fréquentielle  $H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}$  exprimée en fonction de la fréquence d'échantillonnage  $F$ .
2. Ce filtre est-il RIF demi-bande ?
3. Tracer l'allure de sa Réponse Fréquentielle et en déduire la nature du filtre (passe-bas, passe-haut, passe-bande ou coupe-bande).
4. L'équation récurrente d'un demi-bande RIF causal s'écrit de façon générale : ( $M \in \mathbb{N}^*$ )

$$y_n = \frac{1}{2} \left[ x_{n-2M} + \sum_{i=1}^{2M} a_i x_{n-2i+1} \right]$$

Ecrire sa Fonction de Transfert  $H_0(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$  sous la forme :

$$H_0(z) = \frac{1}{2} \left[ G_0(z^2) + z^{-1} G_1(z^2) \right] \quad \text{où } G_0(z^2) \text{ et } G_1(z^2) \text{ sont à préciser.}$$

#### 5. Reconnaissance d'un filtre numérique

Soit le filtre numérique linéaire stationnaire d'entrée  $x(kT)$  et de sortie  $y(kT)$  régi par l'équation aux différences :

$$3y(kT) - y[(k-1)T] = 3x(kT) - 2x[(k-1)T]$$

Ce filtre a été échantillonné à la cadence  $T = 2s$ .

1. Déterminer la Fonction de Transfert  $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$  du filtre.
2. Calculer la Réponse Impulsionnelle  $h(kT)$  du filtre pris causal et tracer son allure.  
Donner en particulier les valeurs numériques de  $h(0)$ ,  $h(T)$  et  $h(2T)$ .
3. Pour  $k \geq 2$ , donner la réponse  $y(kT)$  au signal  $x(kT) = \delta(kT) + \delta[(k-1)T]$  du filtre causal.  
Donner en particulier la valeur numérique de  $y(2T)$ .

#### 6. Filtre numérique défini par sa Fonction de Transfert

Soit le filtre numérique de FT :  $H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{0.5 - 0.1z^{-1}}$

1. Donner l'équation aux différences du filtre en désignant par  $y_n$  la sortie et par  $x_n$  l'entrée.
2. En déduire les 2 formes possibles du filtre (formes causale et non causale) en donnant pour chacune d'elles, l'algorithme de programmation, le schéma-bloc (schéma fonctionnel) et le mode de balayage des échantillons.
3. Ce filtre est-il stable :- sous sa forme causale ? - sous sa forme non causale ?

I. Forme causale du filtre

4. On s'intéresse à la version causale du filtre. Donner et tracer sa Réponse Impulsionnelle  $h_n$  (donner en particulier  $h_0$ ).
5. Déterminer sa réponse indicielle ( $\equiv$  réponse à  $\Gamma_n$ ).
6. Déterminer la réponse à  $\Gamma_{n-2}$ .

II. Forme non causale du filtre

On s'intéresse à la version non causale du filtre. Mêmes questions (4. à 5.).

III. Synthèse des filtres numériques

1. Synthèse d'un filtre du 2nd ordre

Mêmes questions pour le filtre du 2nd ordre passe-bas de FT :

$$H_A(p) = \frac{H_0}{\frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{2m}{\omega_0} p + 1}$$

avec :

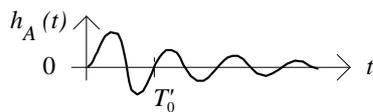
- $H_0$  : gain statique :  $H_0 = 1$
- $\omega_0$  : pulsation propre :  $\omega_0 = 100\pi \rightarrow f_0 = 50\text{Hz}$
- $m$  : coefficient d'amortissement :  $m = 0.1$  ( $m < 1$ : regime pseudo - oscillant) et resonant ( $m < 0.7$ )

Paramètre de simulation :  $T = 2 \text{ ms}$  ( $\rightarrow F = \frac{1}{T} = 500 \text{ Hz}$ )

Rappels

- 2nd ordre Fondamental : 
$$H_A(p) = \frac{H_0}{\frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{2m}{\omega_0} p + 1} \quad (\text{Cas : } 0 < m < 1)$$

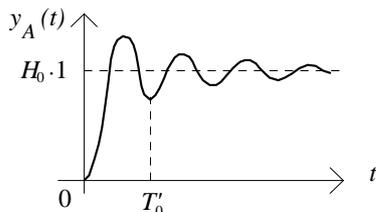
- RI : (Analogique) 
$$h_A(t) = \frac{H_0 \omega_0}{\sqrt{1-m^2}} \cdot e^{-m\omega_0 t} \cdot \sin(\omega'_0 t) \cdot \Gamma(t) \quad \text{avec : } \omega'_0 = \omega_0 \sqrt{1-m^2}$$



$\omega'_0$  : pseudo - pulsation  
 $T'_0 = \frac{2\pi}{\omega'_0}$  : pseudo - période

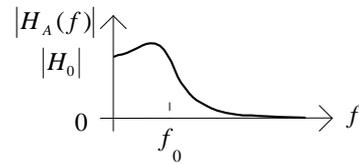
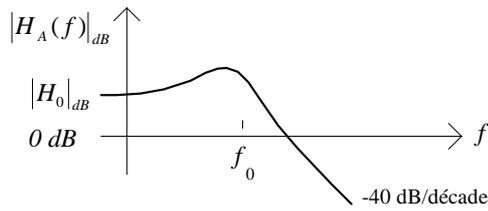
- Réponse indicielle : (Analogique) 
$$y_A(t) = H_0 \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1-m^2}} e^{-m\omega_0 t} \cdot \sin(\omega'_0 t + \psi) \right] \Gamma(t)$$

avec :  $\psi = \text{Arcos } m$  et  $\omega'_0 = \omega_0 \sqrt{1-m^2}$



$\omega'_0$  : pseudo - pulsation  
 $T'_0 = \frac{2\pi}{\omega'_0}$  : pseudo - période

Réponse Fréquentielle : (Analogique) 
$$H_A(f) = \frac{H_0}{1 - \frac{f^2}{f_0^2} + i2m \frac{f}{f_0}}$$
 avec :  $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$



**2. Synthèse d'un filtre numérique de Butterworth d'ordre 1 passe-bas de pulsation de coupure  $\omega_0$  par la synthèse d'Euler**

Fonction de Transfert  $H_1(z)$  et algorithme de programmation du filtre causal d'entrée/sortie respectives  $x_n / y_n$ .

**3. Synthèse d'un filtre numérique de Butterworth d'ordre 2 passe-bas de pulsation de coupure  $\omega_0$  par la synthèse d'Euler**

Fonction de Transfert  $H_2(z)$  et algorithme de programmation du filtre causal d'entrée/sortie respectives  $x_n / y_n$ .

\_\_\_\_\_

### TP 7. Filtrage linéaire. Analyse & Synthèse des filtres numériques

Note : Pour une meilleure lisibilité, certains signaux à TD (resp. à FD) seront tracés à TC (resp. à FC).

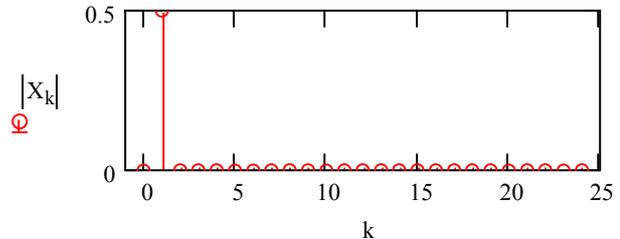
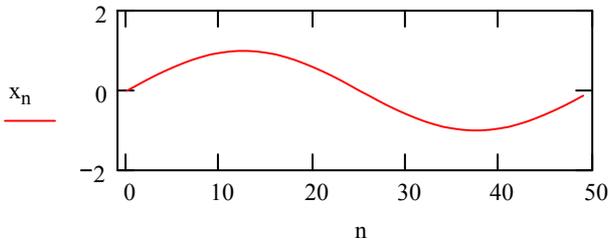
#### I. Filtrage linéaire

##### 0. Filtre numérique de Butterworth d'ordre 3 de pulsation de coupure $\omega_0$

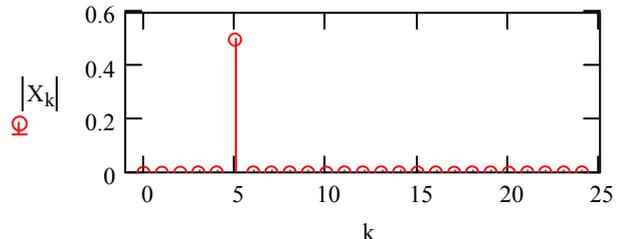
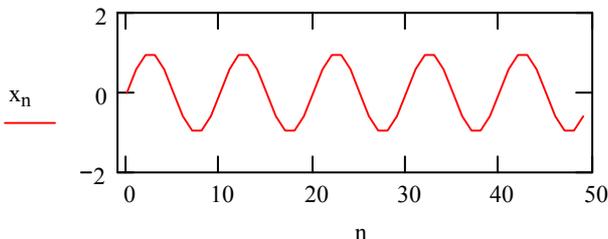
M nombre d'échantillons, de points du signal d'entrée (ainsi que du signal TFD) M := 50  
 n indice temporel des échantillons du signal  $x_n$  n := 0.. M - 1  
 k indice fréquentiel des échantillons de la TFD  $X_k$  k := 0..  $\frac{M-1}{2}$

$$\Gamma_n := \Phi(n) \quad \text{TFD}(x, k, M) := \frac{1}{M} \cdot \sum_{n=0}^{M-1} x_n \cdot e^{-i \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot \frac{n}{M}}$$

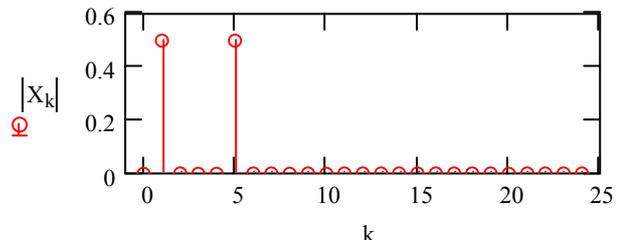
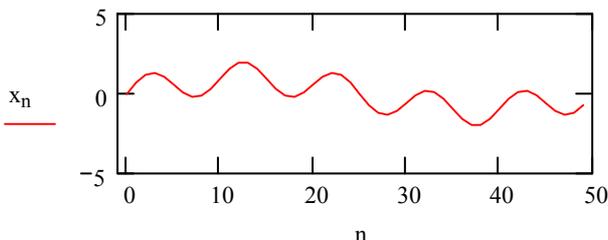
**Sinus1 :** Fréquence :  $f := 0.02\text{Hz}$  Période d'échantillonnage :  $T := 1\text{ s}$  (elle doit vérifier la condition de Shannon)  
 $\text{sinus}_n := \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot n \cdot T)$   $x_n := \text{sinus}_n$   $X_k := \text{TFD}(x, k, M)$



**Sinus2 :** Fréquence :  $f := 0.1\text{ Hz}$  Période d'échantillonnage :  $T := 1\text{ s}$  (elle doit vérifier la condition de Shannon)  
 $\text{sinus}_n := \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot n \cdot T)$   $x_n := \text{sinus}_n$   $X_k := \text{TFD}(x, k, M)$



**Sinus 1 & 2 :** Fréquences :  $f1 := 0.02\text{Hz}$  Période d'échantillonnage :  $T := 1\text{ s}$  (elle doit vérifier la condition de Shannon)  
 $f2 := 0.1\text{ Hz}$   
 $\text{sin1}_n := \sin(2 \cdot \pi \cdot f1 \cdot n \cdot T)$   $\text{sin2}_n := \sin(2 \cdot \pi \cdot f2 \cdot n \cdot T)$   $x_n := \text{sin1}_n + \text{sin2}_n$   $X_k := \text{TFD}(x, k, M)$



Les 2 composantes sinusoïdales sont visibles par l'intermédiaire des 2 raies spectrales en  $k = 1$  et  $k = 5$ .

Filtrage de  $x_n$  de la fréquence  $f_2$  par filtrage passe-bas (filtre Butterworth d'ordre 3) coupant les fréquences  $> f_0$

Filtre de Butterworth passe-bas d'ordre 3, de pulsation de coupure  $\omega_0 = 1$  rd/s :

???

$$a_0 := \blacksquare \quad a_1 := \blacksquare \quad a_2 := \blacksquare \quad a_3 := \blacksquare$$

$$FT : H(p) := \frac{1}{a_3 \cdot p^3 + a_2 \cdot p^2 + a_1 \cdot p + a_0}$$

Filtre de Butterworth passe-bas d'ordre 3, de pulsation de coupure  $\omega_0$  :

$$f_0 := 0.05\text{Hz} \quad \omega_0 := 2 \cdot \pi \cdot f_0 \quad p \text{ devient } p/\omega_0 :$$

$$FT : H(p) := \frac{1}{\frac{a_3}{(\omega_0)^3} \cdot p^3 + \frac{a_2}{(\omega_0)^2} \cdot p^2 + \frac{a_1}{\omega_0} \cdot p + a_0}$$

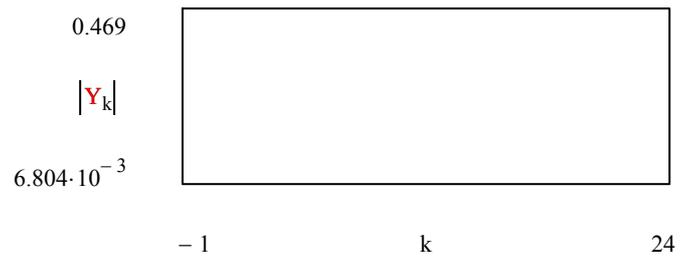
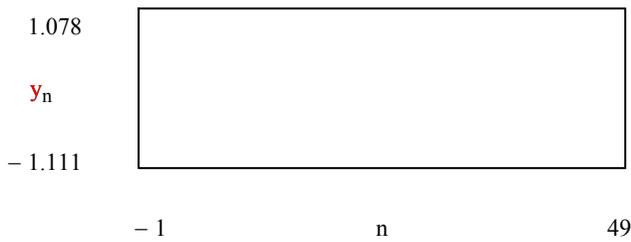
RI du filtre :

$h(t) := H(p)$  invlaplace,  $p \rightarrow$

Discrétisation du filtre :  $hr_n := h(n \cdot T) \cdot \Gamma_n$

Réponse du filtre :  $y_n := \sum_{k=0}^n x_k \cdot hr_{n-k}$

Spectre :  $Y_k := TFD(y, k, M)$

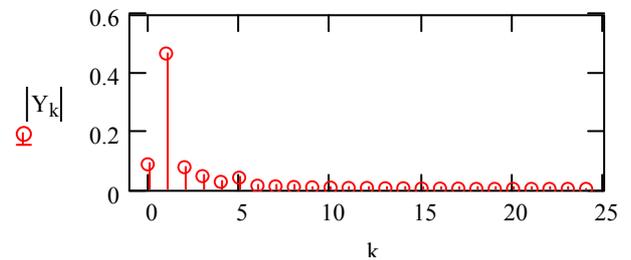
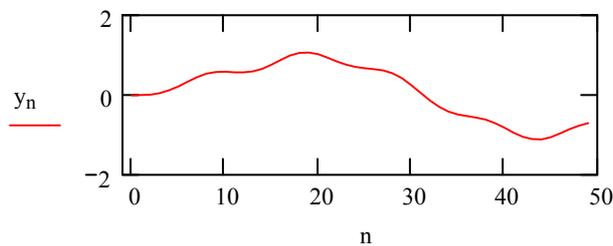


Vérification avec le filtre de Butterworth intégré à MathCad :

$lowpassfilter := iirlow(butter(3), f_0)$

$y := response(x, lowpassfilter, M)$

$Y_k := TFD(y, k, M)$



**II. Analyse des filtres numériques**

Modifier les coeffs du filtre RIF causal d'ordre 2 et vérifier que sa phase est linéaire pour une RI symétrique % à l'instant à la demi-séquence :  $a_0 = a_2$

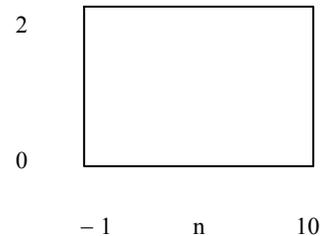
$n := 0..10$

$a_0 := \blacksquare$      $d_n := \delta(n,0)$   
 $a_1 := \blacksquare$      $\Pi_n := \begin{cases} 1 & \text{if } 3 \leq n < 6 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$   
 $a_2 := \blacksquare$

Coefficients du filtre RIF causal : ???

RI : 
$$h_n := \begin{cases} a_0 \cdot d_n & \text{if } n = 0 \\ a_0 \cdot d_n + a_1 \cdot d_{n-1} & \text{if } n = 1 \\ a_0 \cdot d_n + a_1 \cdot d_{n-1} + a_2 \cdot d_{n-2} & \text{otherwise} \end{cases}$$

FT : 
$$H(z) := a_0 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2}$$



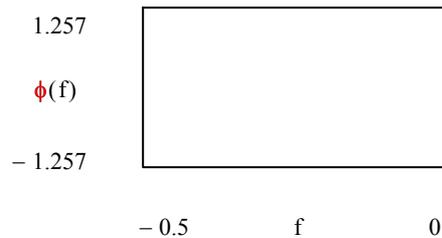
Réponse en Fréquence :

$f := -0.5, -0.5 + 0.1..0.5$

$H(f) := a_0 + a_1 \cdot (e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f})^{-1} + a_2 \cdot (e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f})^{-2}$      $R(f) := \text{Re}(H(f))$      $I(f) := \text{Im}(H(f))$

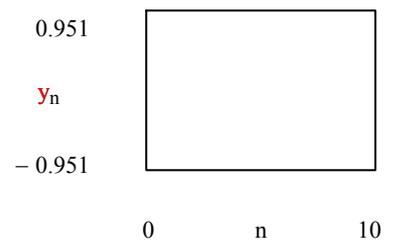
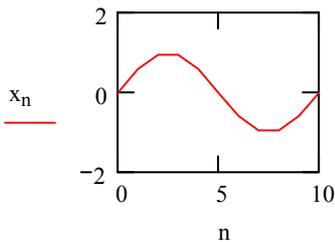
Note :  $\phi(f) = \arg(H(f))$  est buggé !

Phase : 
$$\phi(f) := \text{atan}\left(\frac{I(f)}{R(f)}\right)$$



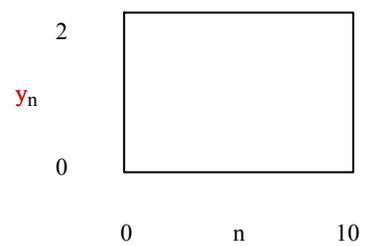
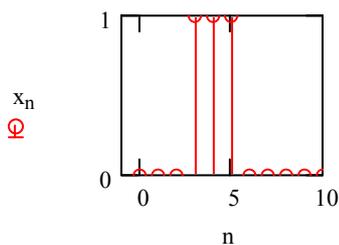
Réponse harmonique :

$T := 1$      $f := 0.1$      $x_n := \sin(2\pi \cdot f \cdot n \cdot T)$      $y_n := \begin{cases} a_0 \cdot x_n & \text{if } n = 0 \\ a_0 \cdot x_n + a_1 \cdot x_{n-1} & \text{if } n = 1 \\ a_0 \cdot x_n + a_1 \cdot x_{n-1} + a_2 \cdot x_{n-2} & \text{otherwise} \end{cases}$



Réponse à une porte :  $x_n := \Pi_n$

$y_n := \begin{cases} a_0 \cdot x_n & \text{if } n = 0 \\ a_0 \cdot x_n + a_1 \cdot x_{n-1} & \text{if } n = 1 \\ a_0 \cdot x_n + a_1 \cdot x_{n-1} + a_2 \cdot x_{n-2} & \text{otherwise} \end{cases}$



### III. Synthèse des filtres numériques

Note : Pour une meilleure lisibilité, les signaux à TD seront tracés à TC

#### 1. Synthèse d'un filtre du 1er ordre [voir TP]

$$\begin{aligned}
 N &:= 40 & n &:= 0..N & T &:= 0.1 \text{ (Période d'éch.)} & t &:= 0, 0.1.. N \cdot T & \Delta(n) &:= \delta(n, 0) \\
 f_0 &:= 1 & H_0 &:= 1 & \tau &:= \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f_0} & F_{\max} &:= 10 \cdot f_0 & \omega &:= 2 & \Gamma(t) &:= \Phi(t)
 \end{aligned}$$

Filtre Analogique modèle (1er ordre) ???  $H_A(p) := \blacksquare$

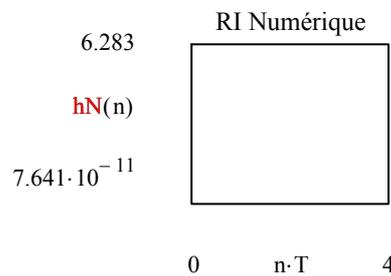
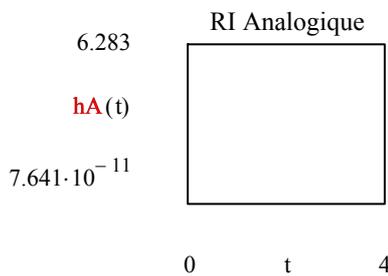
#### a) Synthèse par Invariance Impulsionnelle

Filtre Numérique synthétisé ???  $H_N(z) := \blacksquare$

#### Réponse Impulsionnelle (RI)

Analogique  $h_A(t) := H_A(p) \text{ invlaplace, } p \rightarrow$

Numérique  $h_N(n) := H_N(z) \text{ invztrans, } z \rightarrow$



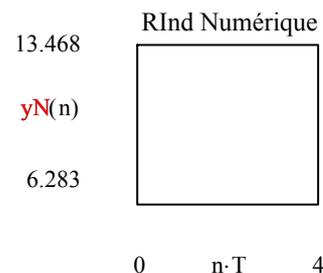
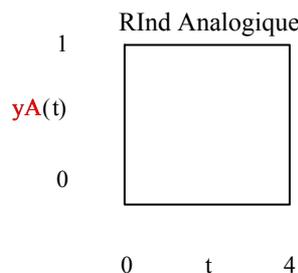
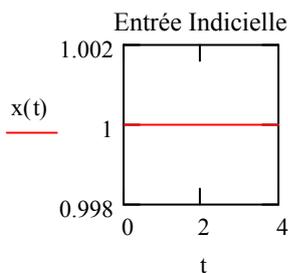
Conclusion : ???

#### Réponse indicielle (RInd)

$$x(t) := \Gamma(t)$$

Analogique  $Y_A(p) := \frac{H_A(p)}{p}$   $y_A(t) := Y_A(p) \text{ invlaplace, } p \rightarrow$

Numérique  $Y_N(z) := H_N(z) \cdot \frac{1}{1 - z^{-1}}$   $y_N(n) := Y_N(z) \text{ invztrans, } z \rightarrow$



Conclusion : ???

Réponse Fréquentielle (RF)

Analogique  $f := 0, 0.1.. Fmax$

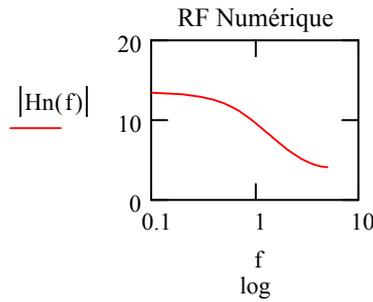
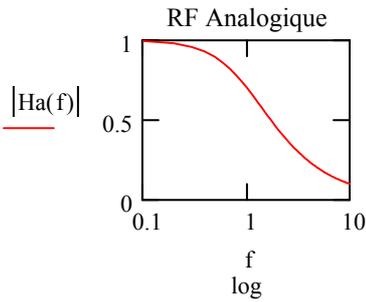
$$H_a(f) := \frac{H_0}{1 + \tau \cdot (i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f)}$$

Numérique  $f := 0, 0.1.. \frac{1}{2 \cdot T}$

$$H_n(f) := \frac{H_0}{\tau} \cdot \frac{1}{1 - e^{-\frac{-T}{\tau}} \cdot e^{-i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot T}}$$

$f := 0, 0.1.. Fmax$

$f := 0, 0.1.. \frac{1}{2 \cdot T}$



Conclusion : ???

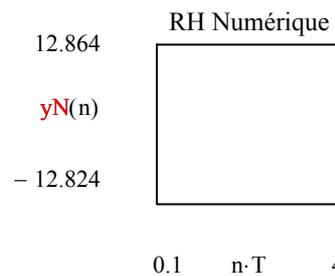
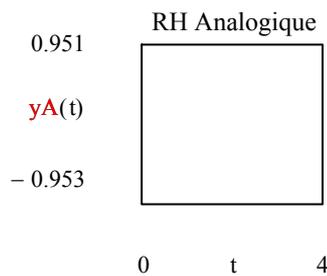
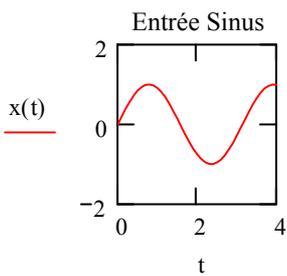
Réponse Harmonique particulière (RH) (Attention Condition de Shannon)  $x(t) := \sin(\omega \cdot t)$

Analogique  $Y_A(p) := H_A(p) \cdot \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$

$y_A(t) := Y_A(p)$  invlaplace,  $p \rightarrow$

Numérique  $Y_N(z) := H_N(z) \cdot \frac{z^{-1} \cdot \sin(\omega \cdot T)}{1 - 2 \cdot z^{-1} \cdot \cos(\omega \cdot T) + z^{-2}}$

$y_N(n) := Y_N(z)$  invztrans,  $z \rightarrow$



Conclusion : ???

**b) Synthèse par Invariance Indicielle**

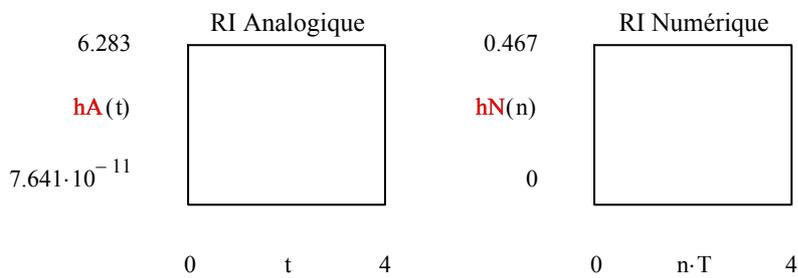
Filtre Numérique synthétisé ???  $HN(z) := \blacksquare$

Dirac(n) :=  $\delta(n, 0)$

Réponse Impulsionnelle (RI)

Analogique  $hA(t) := HA(p)$  invlaplace, p  $\rightarrow$

Numérique  $hN(n) := HN(z)$  invztrans, z  $\rightarrow$



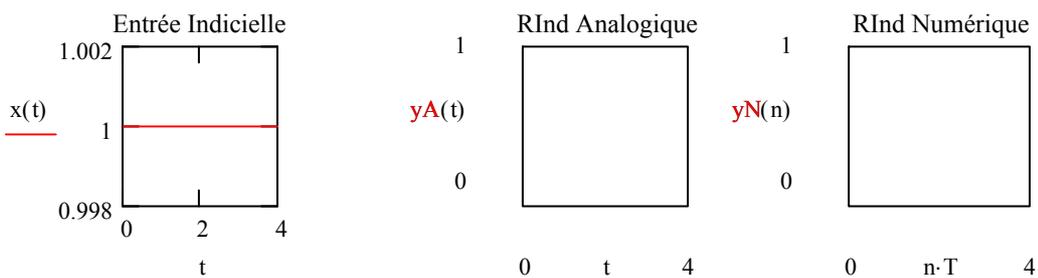
Conclusion : ???

Réponse indicielle (RInd)

$x(t) := \Gamma(t)$

Analogique  $YA(p) := \frac{HA(p)}{p}$   $yA(t) := YA(p)$  invlaplace, p  $\rightarrow$

Numérique  $YN(z) := HN(z) \cdot \frac{1}{1 - z^{-1}}$   $yN(n) := YN(z)$  invztrans, z  $\rightarrow$



Conclusion : ???

Réponse Fréquentielle (RF)

Analogique  $f := 0, 0.1.. Fmax$

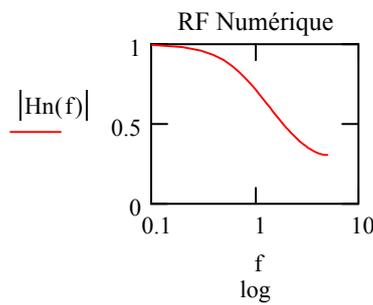
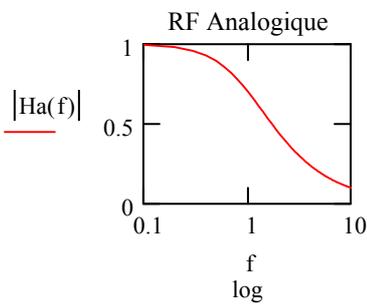
$$Ha(f) := \frac{H0}{1 + \tau \cdot (i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f)}$$

Numérique  $f := 0, 0.1.. \frac{1}{2 \cdot T}$

$$Hn(f) := H0 \cdot \frac{\left(1 - e^{-\frac{T}{\tau}}\right) \cdot e^{-i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot T}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}} \cdot e^{-i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot T}}$$

$f := 0, 0.1.. Fmax$

$f := 0, 0.1.. \frac{1}{2 \cdot T}$



Conclusion : ???

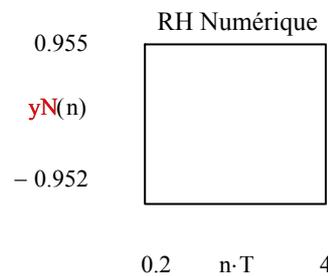
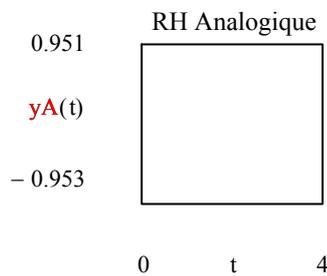
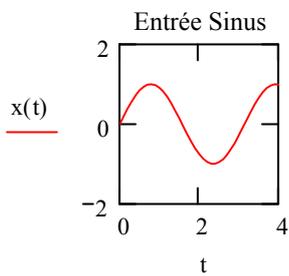
Réponse Harmonique particulière (RH) (Attention Condition de Shannon)  $x(t) := \sin(\omega \cdot t)$

Analogique  $YA(p) := HA(p) \cdot \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$

$yA(t) := YA(p)$  invlaplace,  $p \rightarrow$

Numérique  $YN(z) := HN(z) \cdot \frac{z^{-1} \cdot \sin(\omega \cdot T)}{1 - 2 \cdot z^{-1} \cdot \cos(\omega \cdot T) + z^{-2}}$

$yN(n) := YN(z)$  invztrans,  $z \rightarrow$



Conclusion : ???

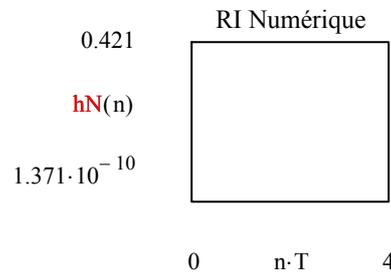
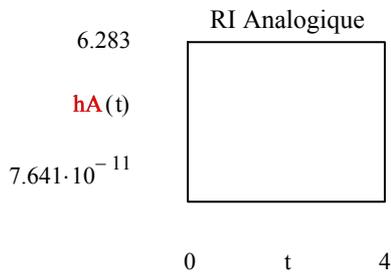
**c) Synthèse par Transformation d'Euler**

Filtre Numérique synthétisé ???  $HN(z) := \blacksquare$

Réponse Impulsionnelle (RI)

Analogique  $hA(t) := HA(p) \text{ invlaplace, } p \rightarrow$

Numérique  $hN(n) := HN(z) \text{ invztrans, } z \rightarrow$



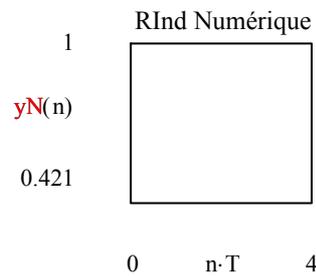
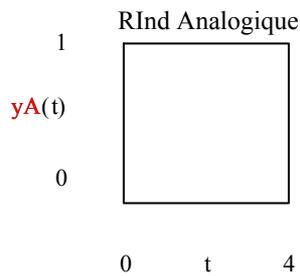
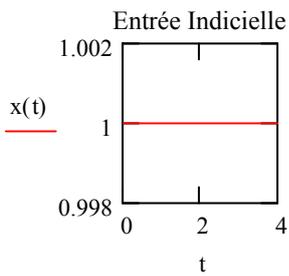
Conclusion : ???

Réponse indicielle (RInd)

$x(t) := \Gamma(t)$

Analogique  $YA(p) := \frac{HA(p)}{p}$   $yA(t) := YA(p) \text{ invlaplace, } p \rightarrow$

Numérique  $YN(z) := HN(z) \cdot \frac{1}{1 - z^{-1}}$   $yN(n) := YN(z) \text{ invztrans, } z \rightarrow$



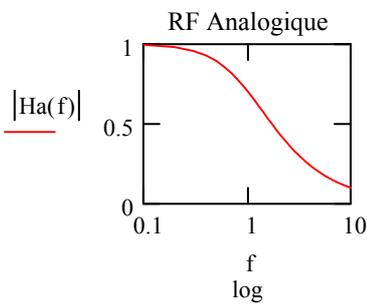
Conclusion : ???

Réponse Fréquentielle (RF)

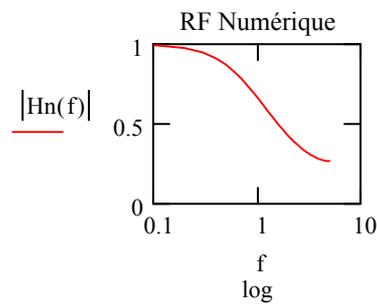
Analogique  $f := 0, 0.1.. Fmax$   $H_a(f) := \frac{H_0}{1 + \tau \cdot (i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f)}$

Numérique  $f := 0, 0.1.. \frac{1}{2 \cdot T}$   $H_n(f) := \frac{H_0 \cdot \tan\left(\frac{T}{\tau}\right)}{1 + \tan\left(\frac{T}{\tau}\right) - e^{-i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot T}}$

$f := 0, 0.1.. Fmax$



$f := 0, 0.1.. \frac{1}{2 \cdot T}$

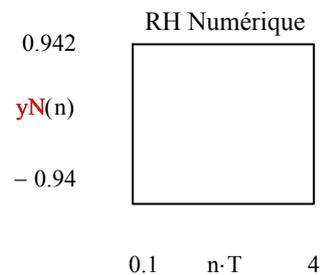
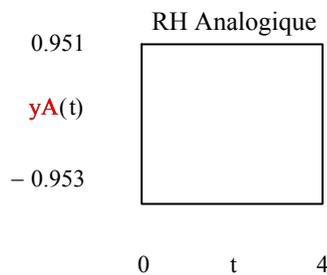
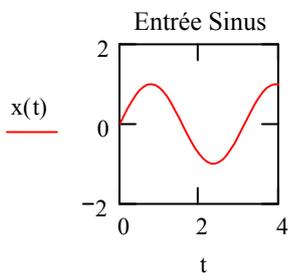


Conclusion : ???

Réponse Harmonique particulière (RH) (Attention Condition de Shannon)  $x(t) := \sin(\omega \cdot t)$

Analogique  $Y_A(p) := H_A(p) \cdot \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$   $y_A(t) := Y_A(p)$  invlaplace,  $p \rightarrow$

Numérique  $Y_N(z) := H_N(z) \cdot \frac{z^{-1} \cdot \sin(\omega \cdot T)}{1 - 2 \cdot z^{-1} \cdot \cos(\omega \cdot T) + z^{-2}}$   $y_N(n) := Y_N(z)$  invztrans,  $z \rightarrow$



Conclusion : ???

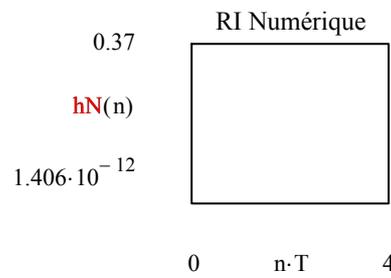
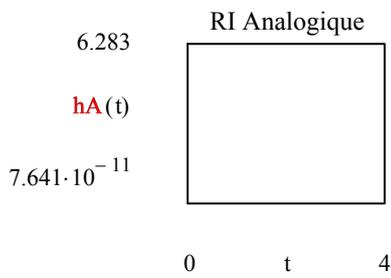
**d) Synthèse par Transformation Bilinéaire**

Filtre Numérique synthétisé      ???       $H_N(z) := \blacksquare$

*Réponse Impulsionnelle (RI)*

Analogique       $h_A(t) := H_A(p) \text{ invlaplace, } p \rightarrow$

Numérique       $h_N(n) := H_N(z) \text{ invztrans, } z \rightarrow$



Conclusion : ???

*Réponse indicielle (RInd)*

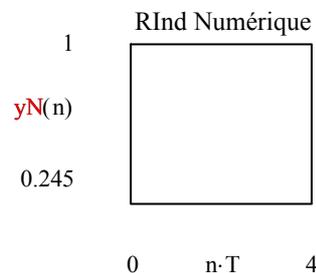
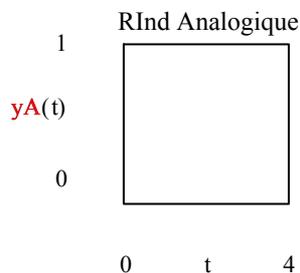
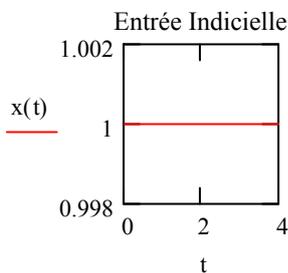
$x(t) := \Gamma(t)$

Analogique       $Y_A(p) := \frac{H_A(p)}{p}$

$y_A(t) := Y_A(p) \text{ invlaplace, } p \rightarrow$

Numérique       $Y_N(z) := H_N(z) \cdot \frac{1}{1 - z^{-1}}$

$y_N(n) := Y_N(z) \text{ invztrans, } z \rightarrow$



Conclusion : ???

Réponse Fréquentielle (RF)

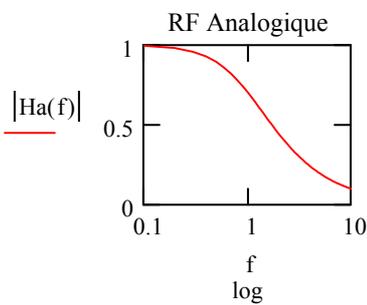
Analogique  $f := 0, 0.1.. Fmax$

$$H_a(f) := \frac{H_0}{1 + \tau \cdot (i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f)}$$

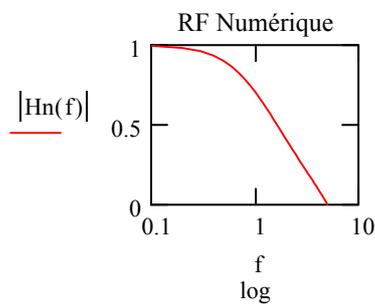
Numérique  $f := 0, 0.1.. \frac{1}{2 \cdot T}$

$$H_n(f) := \frac{H_0 \cdot \tan\left(\frac{T}{2 \cdot \tau}\right) \cdot (1 + e^{-i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot T})}{1 + \tan\left(\frac{T}{2 \cdot \tau}\right) + \left(\tan\left(\frac{T}{2 \cdot \tau}\right) - 1\right) \cdot e^{-i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot T}}$$

$f := 0, 0.1.. Fmax$



$f := 0, 0.1.. \frac{1}{2 \cdot T}$



Conclusion : ???

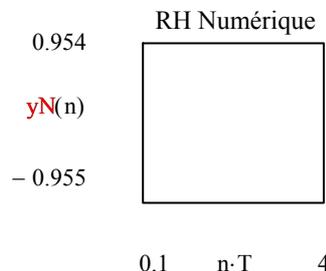
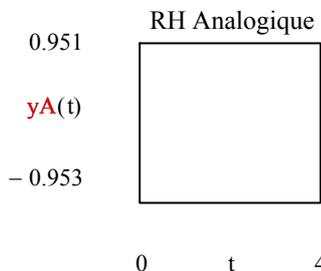
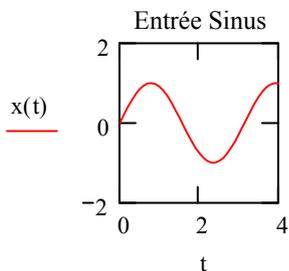
Réponse Harmonique particulière (RH) (Attention Condition de Shannon)  $x(t) := \sin(\omega \cdot t)$

Analogique  $Y_A(p) := H_A(p) \cdot \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$

$y_A(t) := Y_A(p)$  invlaplace,  $p \rightarrow$

Numérique  $Y_N(z) := H_N(z) \cdot \frac{z^{-1} \cdot \sin(\omega \cdot T)}{1 - 2 \cdot z^{-1} \cdot \cos(\omega \cdot T) + z^{-2}}$

$y_N(n) := Y_N(z)$  invztrans,  $z \rightarrow$



Conclusion : ???

**TP 7 ANNEXE. Filtrage linéaire. Analyse & Synthèse des filtres numériques**

**I. Filtrage linéaire**

**11. Restauration d'image : filtrage causal [voir TD]**

I := READBMP("bato2.bmp")      Nombre de colonnes : Nx := cols(I)      Nombre de lignes : Ny := rows(I)

Filtre 1D causal de dégradation :    entrée : f<sub>n</sub>    sortie g<sub>n</sub> :    algorithme : g<sub>n</sub> = f<sub>n</sub> - f<sub>n-1</sub> + f<sub>n-2</sub>

Dégradation 1D (colonne) :    Degrad1D(I, f) :=  $\left\{ \begin{array}{l} g_0 \leftarrow f_0 \\ g_1 \leftarrow f_1 - f_0 \\ \text{for } n \in 2.. \text{rows}(I) - 1 \\ g_n \leftarrow f_n - f_{n-1} + f_{n-2} \end{array} \right.$       Degrad2D(I) :=  $\left\{ \begin{array}{l} \text{for } x \in 0.. \text{cols}(I) - 1 \\ f \leftarrow I^{\langle x \rangle} \\ J^{\langle x \rangle} \leftarrow \text{Degrad1D}(I, f) \\ J \end{array} \right.$

Filtre 1D causal de restauration :    entrée : f<sub>n</sub>    sortie g<sub>n</sub> :    algorithme : g<sub>n</sub> =

Restauration 1D (colonne) :    Restau1D(I, f) :=  $\left\{ \begin{array}{l} g_0 \leftarrow f_0 \\ g_1 \leftarrow f_1 + g_0 \\ \text{for } n \in 2.. \text{rows}(I) - 1 \\ g_n \leftarrow \blacksquare \\ g \end{array} \right.$       Restau2D(I) :=  $\left\{ \begin{array}{l} \text{for } x \in 0.. \text{cols}(I) - 1 \\ f \leftarrow I^{\langle x \rangle} \\ J^{\langle x \rangle} \leftarrow \text{Restau1D}(I, f) \\ J \end{array} \right.$

???

D := Degrad2D(I)    R := Restau2D(D)    Image originale    Image dégradée    Image restaurée



R

I

D

R := Restau2D(I)    D := Degrad2D(R)    Image originale    Image restaurée    Image dégradée



R

D

I

**Restauration d'image : filtrage non causal**

I := READBMP("bato2.bmp")      Nombre de colonnes : Nx := cols(I)      Nombre de lignes : Ny := rows(I)

Filtre 1D non causal de dégradation :    entrée :  $f_n$     sortie  $g_n$  :    algorithme :  $g_n = f_n - f_{n+1} + f_{n+2}$

*Dégradation 1D* : Degrad1D(I, f) :=  $\left\{ \begin{array}{l} g_{\text{rows}(I)-1} \leftarrow f_{\text{rows}(I)-1} \\ g_{\text{rows}(I)-2} \leftarrow f_{\text{rows}(I)-2} - f_{\text{rows}(I)-1} \\ \text{for } n \in \text{rows}(I) - 3, \text{rows}(I) - 4.. 0 \\ \quad g_n \leftarrow f_n - f_{n+1} + f_{n+2} \end{array} \right.$       Degrad2D(I) :=  $\left\{ \begin{array}{l} \text{for } x \in 0.. \text{cols}(I) - 1 \\ \quad \left\{ \begin{array}{l} f \leftarrow I^{\langle x \rangle} \\ J^{\langle x \rangle} \leftarrow \text{Degrad1D}(I, f) \end{array} \right. \\ \quad J \end{array} \right.$

Filtre 1D non causal de restauration :    entrée :  $f_n$     sortie  $g_n$  :    algorithme :  $g_n = \blacksquare$

*Restauration 1D* : Restau1D(I, f) :=  $\left\{ \begin{array}{l} g_{\text{rows}(I)-1} \leftarrow f_{\text{rows}(I)-1} \\ g_{\text{rows}(I)-2} \leftarrow f_{\text{rows}(I)-2} + g_{\text{rows}(I)-1} \\ \text{for } n \in \text{rows}(I) - 3, \text{rows}(I) - 4.. 0 \\ \quad g_n \leftarrow \blacksquare \end{array} \right.$       Restau2D(I) :=  $\left\{ \begin{array}{l} \text{for } x \in 0.. \text{cols}(I) - 1 \\ \quad \left\{ \begin{array}{l} f \leftarrow I^{\langle x \rangle} \\ J^{\langle x \rangle} \leftarrow \text{Restau1D}(I, f) \end{array} \right. \\ \quad J \end{array} \right.$

D := Degrad2D(I)    R := Restau2D(D)      Image originale      Image dégradée      Image restaurée



I



D

R

R := Restau2D(I)    D := Degrad2D(R)      Image originale      Image restaurée      Image dégradée



I



R

D

# **SIGNAUX & SYSTEMES**

## **ANNEXE**

## 4 ANNEXE. Représentation d'Etat des systèmes

La Représentation d'Etat (ou Représentation Interne ou encore Représentation Temporelle) d'un système décrit la dynamique du système, alors que la Représentation Externe (ou Représentation Fréquentielle (utilisant la FT)) met en oeuvre des relations d'entrée-sortie.

La Représentation Interne d'un système peut s'obtenir de 2 façons :

- à partir des relations physiques du système, délivrant alors des variables d'Etat ayant une signification physique mais un modèle de forme quelconque.
- à partir de la FT du système (+ Conditions Initiales (CI) pour une description complète), délivrant un modèle de forme particulière (canonique, observable ...) mais avec des variables d'Etat sans signification physique.

### 1. Représentation d'Etat des systèmes à TC

Soit le système à TC d'entrée  $u(t)$  et de sortie  $y(t)$  régi par une équation différentielle linéaire et stationnaire (≡ à coefficients constants) : (On considère le cas  $m < n$  ≡ Système passe-bas)

$$\sum_{i=0}^n \beta_i y^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^m \alpha_i u^{(i)}(t)$$

que l'on peut ramener, en divisant les 2 membres par  $\beta_n$  à l'équation :

$$y^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} b_i y^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^m a_i u^{(i)}(t) \quad \text{soit : } y^{(n)}(t) + b_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + b_0 y(t) = a_m u^{(m)}(t) + a_{m-1}u^{(m-1)}(t) + \dots + a_0 u(t)$$

Si on prend la TL de cette équation, on obtient la FT du système (si les Conditions Initiales (CI) sont nulles) :

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{\sum_{i=0}^m a_i p^i}{p^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i p^i}$$

#### 1.1. Forme commandable (ou canonique, ou contrôlable ou encore gouvernable)

On peut écrire : 
$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{V(p)}{U(p)} \cdot \frac{Y(p)}{V(p)} = \frac{1}{p^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i p^i} \cdot \frac{\sum_{i=0}^m a_i p^i}{1}$$

où  $v(t) = TL^{-1}[V(p)]$  est un signal intermédiaire.

Le système de FT : 
$$\frac{V(p)}{U(p)} = \frac{1}{p^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i p^i}$$
 traduit l'équation différentielle : 
$$v^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} b_i v^{(i)}(t) = u(t)$$

(CI nulles)

En posant 
$$\left. \begin{array}{l} x_1(t) = v(t) \\ x_2(t) = \dot{x}_1(t) = \dot{v}(t) \\ x_3(t) = \dot{x}_2(t) = \ddot{v}(t) \\ \dots \\ x_n(t) = \dot{x}_{n-1}(t) = v^{(n-1)}(t) \end{array} \right\} \quad \text{on a} \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1}(t) = x_n(t) \\ \dot{x}_n(t) = v^{(n)}(t) = -b_0 x_1(t) - b_1 x_2(t) - \dots - b_{n-1} x_n(t) + u(t) \end{array} \right.$$

Les variables  $x_i(t)$  sont les variables d'Etat du système.

On a les relations matricielles :

Equation d'Etat :  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{b} u(t)$

Equation d'observation (intermédiaire) :  $v(t) = \mathbf{c} \mathbf{x}(t)$

où la matrice  $\mathbf{A}$  et les vecteurs  $\mathbf{b}$  et  $\mathbf{c}$  ne dépendent pas du temps (système stationnaire  $\equiv$  équation diff. à coeffs. constants) : ( $\mathbf{x}(t)$  est le vecteur d'état du système)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -b_0 & -b_1 & -b_2 & \cdots & -b_{n-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

Pour la sortie du système, on a :  $\frac{Y(p)}{V(p)} = \frac{\sum_{i=0}^m a_i p^i}{1}$  traduisant l'équation différentielle :  $\sum_{i=0}^m a_i v^{(i)}(t) = y(t)$

(CI nulles) écrite explicitement :  $a_m v^{(m)}(t) + a_{m-1} v^{(m-1)}(t) + \cdots + a_1 \dot{v}(t) + a_0 v(t) = y(t)$

Comme  $v(t) = \mathbf{c} \mathbf{x}(t) = x_1(t)$ , on a en particulier :

$$\left. \begin{array}{l} x_1(t) = v(t) \\ x_2(t) = \dot{x}_1(t) = \dot{v}(t) \\ x_3(t) = \dot{x}_2(t) = \ddot{v}(t) \\ \cdots \\ x_{m+1}(t) = \dot{x}_m(t) = v^{(m)}(t) \end{array} \right\} \text{relations permettant}$$

d'exprimer la sortie du système :  $y(t) = a_0 x_1(t) + a_1 x_2(t) + \cdots + a_m x_{m+1}(t)$

On a toujours :

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ \cdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) = x_n(t) \\ \dot{x}_n(t) = v^{(n)}(t) = -b_0 x_1(t) - b_1 x_2(t) - \cdots - b_{n-1} x_n(t) + u(t) \end{array} \right\}$$

et les équations finales du système s'écrivent : ( $y(t)$  représente la sortie du système)

Equation d'Etat :  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{b} u(t)$

Equation d'observation :  $y(t) = \mathbf{c} \mathbf{x}(t)$

où la matrice  $\mathbf{A}$  et les vecteurs  $\mathbf{b}$  et  $\mathbf{c}$  sont donnés par :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -b_0 & -b_1 & -b_2 & \cdots & -b_{n-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = [a_0 \quad a_1 \quad \cdots \quad a_m \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

La forme particulière de la matrice  $\mathbf{A}$  est appelée *forme compagnon*.

1.2. Forme observable

Directement à partir de la FT non décomposée (pas de variable intermédiaire) du système :

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{\sum_{i=0}^m a_i p^i}{p^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i p^i} \quad \text{traduisant l'équation différentielle : } y^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} b_i y^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^m a_i u^{(i)}(t)$$

(CI nulles) soit :  $y^{(n)}(t) + b_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + b_0y(t) = a_m u^{(m)}(t) + a_{m-1}u^{(m-1)}(t) + \dots + a_0u(t)$

que l'on peut encore écrire :

$$y(t) = -b_{n-1} \int y(t)dt - b_{n-2} \iint y(t)dt - \dots - b_0 \int \dots \int y(t)dt + a_m \int \dots \int u(t)dt + a_{m-1} \int \dots \int u(t)dt + \dots + a_0 \int \dots \int u(t)dt$$

ou en posant  $\int^{(i)} \equiv \int^{i\text{ème}}$  :  $\left( \int^{(2)} \text{ représente ainsi une somme double } \iint \right)$

$$y(t) = -b_{n-1} \int y(t)dt - b_{n-2} \int^{(2)} y(t)dt - \dots - b_{m+1} \int^{(n-m+1)} y(t)dt + \left[ -b_m \int^{(n-m)} y(t)dt + a_m \int^{(n-m)} u(t)dt \right] + \dots + \left[ -b_0 \int^{(n)} y(t)dt + a_0 \int^{(n)} u(t)dt \right]$$

En posant  $x_n(t) = y(t)$ , on remarque que :

$$\begin{cases} \dot{x}_n(t) = -b_{n-1}x_n(t) + x_{n-1}(t) \\ \dot{x}_{n-1}(t) = -b_{n-2}x_n(t) + x_{n-2}(t) \\ \dots \\ \dot{x}_{m+2}(t) = -b_{m+1}x_n(t) + x_{m+1}(t) \\ \dot{x}_{m+1}(t) = -b_m x_n(t) + x_m(t) + a_m u(t) \\ \dot{x}_m(t) = -b_{m-1}x_n(t) + x_{m-1}(t) + a_{m-1}u(t) \\ \dots \\ \dot{x}_2(t) = -b_1x_n(t) + x_1(t) + a_1u(t) \\ \dot{x}_1(t) = -b_0x_n(t) + a_0u(t) \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -b_0x_n(t) + a_0u(t) \\ \dot{x}_2(t) = -b_1x_n(t) + x_1(t) + a_1u(t) \\ \dots \\ \dot{x}_m(t) = -b_{m-1}x_n(t) + x_{m-1}(t) + a_{m-1}u(t) \\ \dot{x}_{m+1}(t) = -b_mx_n(t) + x_m(t) + a_mu(t) \\ \dots \\ \dot{x}_n(t) = -b_{n-1}x_n(t) + x_{n-1}(t) \end{cases}$$

Et les relations matricielles :

Equation d'Etat :  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{b} u(t)$

Equation d'observation :  $y(t) = \mathbf{c} \mathbf{x}(t)$

où la matrice **A** et les vecteurs **b** et **c** sont donnés par :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -b_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -b_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -b_m \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -b_{m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -b_{n-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_m \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

La forme particulière de la matrice **A** est appelée *forme observable*.

1.3. Forme diagonale

Le découplage des variables d'Etat est obtenu en rendant la matrice **A** diagonale. Ceci peut par exemple se faire directement à partir de la FT du système décomposée en éléments simples : (les pôles de la FT sont notés  $p_i$ )

1.3.1. FT à pôles simples

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{\sum_{i=0}^m a_i p^i}{p^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i p^i} = \frac{\prod_{i=1}^m (p - p'_i)}{\prod_{i=1}^n (p - p_i)} = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{p - p_i} \quad \rightarrow \quad Y(p) = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{p - p_i} U(p)$$

et en choisissant les variables d'Etat  $x_i(t)$  telles que :  $Y(p) = \sum_{i=1}^n c_i X_i(p)$ , on a les FTs élémentaires (CI nulles) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{X_1(p)}{U(p)} = \frac{1}{p - p_1} \rightarrow \dot{x}_1(t) = p_1 x_1(t) + u(t) \\ \frac{X_2(p)}{U(p)} = \frac{1}{p - p_2} \rightarrow \dot{x}_2(t) = p_2 x_2(t) + u(t) \\ \dots \\ \frac{X_n(p)}{U(p)} = \frac{1}{p - p_n} \rightarrow \dot{x}_n(t) = p_n x_n(t) + u(t) \end{array} \right. \quad \text{et : } Y(p) = \sum_{i=1}^n c_i X_i(p) \rightarrow y(t) = \sum_{i=1}^n c_i x_i(t)$$

ou sous forme matricielle :

Equation d'Etat :  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{b} u(t)$   
 Equation d'observation :  $y(t) = \mathbf{c} \mathbf{x}(t)$

où la matrice **A** et les vecteurs **b** et **c** sont donnés par :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n] \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

La forme particulière de la matrice **A** est appelée *forme diagonale*.

1.3.2. FT à pôles multiples

Supposons un pôle multiple  $p_1$  d'ordre  $k$  dans la FT du système : (les pôles de la FT sont notés  $p_i$ )

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{\sum_{i=0}^m a_i p^i}{p^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i p^i} = \frac{\prod_{i=1}^m (p - p'_i)}{(p - p_1)^k \prod_{i=k+1}^n (p - p_i)} = \sum_{i=1}^k \frac{c_i}{(p - p_1)^{k-i+1}} + \sum_{i=k+1}^n \frac{c_i}{p - p_i}$$

$$\rightarrow Y(p) = \sum_{i=1}^k \frac{c_i}{(p - p_1)^{k-i+1}} U(p) + \sum_{i=k+1}^n \frac{c_i}{p - p_i} U(p)$$

et avec une technique identique à celle du paragraphe précédent :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1(p) = \frac{1}{(p - p_1)^k} U(p) \rightarrow \frac{X_1(p)}{X_2(p)} = \frac{1}{p - p_1} \xrightarrow{\text{CI nulles}} \dot{x}_1(t) = p_1 x_1(t) + x_2(t) \\ X_2(p) = \frac{1}{(p - p_1)^{k-1}} U(p) \rightarrow \frac{X_2(p)}{X_3(p)} = \frac{1}{p - p_1} \xrightarrow{\text{CI nulles}} \dot{x}_2(t) = p_1 x_2(t) + x_3(t) \\ \dots \\ X_k(p) = \frac{1}{p - p_1} U(p) \rightarrow \frac{X_k(p)}{U(p)} = \frac{1}{p - p_1} \xrightarrow{\text{CI nulles}} \dot{x}_k(t) = p_1 x_k(t) + u(t) \\ X_{k+1}(p) = \frac{1}{p - p_{k+1}} U(p) \rightarrow \frac{X_{k+1}(p)}{U(p)} = \frac{1}{p - p_{k+1}} \xrightarrow{\text{CI nulles}} \dot{x}_{k+1}(t) = p_{k+1} x_{k+1}(t) + u(t) \\ \dots \\ X_n(p) = \frac{1}{p - p_n} U(p) \rightarrow \frac{X_n(p)}{U(p)} = \frac{1}{p - p_n} \xrightarrow{\text{CI nulles}} \dot{x}_n(t) = p_n x_n(t) + u(t) \end{array} \right.$$

on arrive à :

Equation d'Etat :  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{b} u(t)$

Equation d'observation :  $y(t) = \mathbf{c} \mathbf{x}(t)$

où la matrice  $\mathbf{A}$  et les vecteurs  $\mathbf{b}$  et  $\mathbf{c}$  sont donnés par :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & p_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & p_{k+1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & p_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n] \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

(k - 1) coeffs. 0

La forme particulière de la matrice  $\mathbf{A}$  est appelée *forme diagonale*.

### 1.4. Modèle général

Si d'une part on étend l'étude aux systèmes multivariables ( $\equiv$  avec des E/S vectorielles), et si d'autre part on considère des systèmes autres que des systèmes physiques (ou des systèmes physiques observés dans le domaine restreint aux basses fréquences), le cas  $m \geq n$  conduit, en plus du cas  $m < n$  déjà considéré, à la relation plus générale, appelée Représentation d'Etat (le plan  $(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t))$  est l'espace d'Etat ( $\equiv$  espace des phases)), ou encore Représentation interne, qui s'écrit pour un système linéaire stationnaire :

$$\begin{aligned} \text{Equation d'Etat :} \quad \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad \text{Etat initial } \mathbf{x}(t_0) \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \quad \mathbf{u} \in \mathbf{R}^p \quad \mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n} \quad \mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n \times p} \\ \text{Equation d'observation: } \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad \mathbf{y} \in \mathbf{R}^m \quad \mathbf{C} \in \mathbf{R}^{m \times n} \quad \mathbf{D} \in \mathbf{R}^{m \times p} \end{aligned}$$

La Représentation d'Etat n'est pas unique (les matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  sont non uniques) (forme canonique, ...).  
(Pour un système non stationnaire, les matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  dépendent du temps:  $\mathbf{A}(t)$ ,  $\mathbf{B}(t)$ ,  $\mathbf{C}(t)$ ,  $\mathbf{D}(t)$ )

### 1.5. Solution de l'équation d'Etat

La solution  $\mathbf{x}(t)$  de l'équation d'Etat  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$  est donnée par :

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau$$

En effet, la TL de l'équation d'Etat donne (CI non nulles) :  $p\mathbf{X}(p) - \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(p) + \mathbf{B}\mathbf{U}(p)$

d'où :  $\mathbf{X}(p) = [p\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{x}(t_0) + [p\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B}\mathbf{U}(p)$  et comme  $TL^{-1}\{[p\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\} = e^{\mathbf{A}t}$  on a,

en prenant l'origine des temps en  $t_0$  et non en 0, et en notant \* le produit de convolution :

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) + [e^{\mathbf{A}t} * \mathbf{B}\mathbf{u}(t)] = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau$$

L'observation  $\mathbf{y}(t)$  devient immédiatement :  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) + \mathbf{C} \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$

Ces solutions expriment l'Etat et l'observation en fonction de l'Etat initial  $\mathbf{x}(t_0)$ .

Elles expriment le fait que tout le « passé » du système est contenu dans l'Etat  $\mathbf{x}(t_0)$  à un instant  $t_0$  pris comme référence.

La Représentation d'Etat d'un système étant effectuée (matrices  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$  déterminées), pour connaître l'évolution du système pour  $t \geq t_0$ , la seule connaissance de l'Etat  $\mathbf{x}(t_0)$  suffit.

### 1.6. Matrice de Transition d'Etat

#### 1.6.1. Matrice de Transition d'Etat

La solution de l'équation *homogène* d'Etat  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$  peut s'écrire en fonction de l'Etat initial  $\mathbf{x}(t_0)$  :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \Phi(t, t_0) \mathbf{x}(t_0) \quad \text{où} \quad \Phi(t, t_0) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \quad \text{est la matrice de transition d'Etat.}$$

On a les propriétés :  $\Phi(t, t) = e^{\mathbf{A}0} = \mathbf{I}$

$$\Phi(t, 0) = e^{\mathbf{A}t} = TL^{-1}\{[p\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\}$$

$$[\Phi(t, t_0)]^n = [\Phi(nt, nt_0)]$$

Avec la matrice de transition d'Etat, la solution de l'équation d'Etat s'écrit :  $\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0) \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau$

**1.6.2. Calcul de la matrice de Transition d'Etat**

La matrice  $\Phi(t,0) = e^{At} = TL^{-1} \left\{ [p\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \right\}$  s'obtient en effectuant *terme à terme* la  $TL^{-1}$  de la matrice  $[p\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}$ .

Le calcul de la matrice  $[p\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}$  peut se faire itérativement à l'aide de l'algorithme de *Leverrier*.

**1.7. Réponses Impulsionnelle et indicielle. Fonction de Transfert**

La RI, la réponse indicielle et la FT du système peuvent être établies à partir de la Représentation d'Etat du système.

Soit  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \quad \forall t \leq t_0 = 0$ .

**1.7.1. Réponse Impulsionnelle**

Considérons le vecteur entrée  $\mathbf{u}(t) = [u_1(t) \quad \dots \quad u_p(t)]^T$  avec  $u_k(t) = 0 \quad \forall k = 1, \dots, p$  et  $k \neq j$  et  $u_j(t) = \delta(t)$  (Impulsion de Dirac).

On a donc  $\mathbf{u}(t) = [0 \quad \dots \quad 0 \quad \delta(t) \quad 0 \quad \dots \quad 0]^T$  noté  $\mathbf{u}_j(t) = [0 \quad \dots \quad 0 \quad \delta(t) \quad 0 \quad \dots \quad 0]^T$  pour indiquer que l'impulsion de Dirac a  $j$  pour index.

Cette entrée fournit le vecteur RI  $\mathbf{h}(t)$  noté également  $\mathbf{h}_j(t)$  et ainsi déterminé pour  $t \geq 0$  :

$$\mathbf{h}_j(t) = \mathbf{C} \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{b}_j \delta(\tau) d\tau + \mathbf{d}_j \delta(t) = \mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{b}_j \delta(\tau) d\tau + \mathbf{d}_j \delta(t) = \mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{b}_j + \mathbf{d}_j \delta(t)$$

où  $\mathbf{b}_j$  (resp.  $\mathbf{d}_j$ ) désigne la  $j$ -ième colonne de la matrice  $\mathbf{B}$  (resp.  $\mathbf{D}$ ).

Si l'on fait varier cet index  $j$  ( $j = 1, \dots, p$ ), on obtient la matrice de RI :  $[\mathbf{h}(t)] = [\mathbf{h}_1(t) \quad \mathbf{h}_2(t) \quad \dots \quad \mathbf{h}_p(t)]$  qui s'écrit :  $[\mathbf{h}(t)] = \mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} + \mathbf{D} \delta(t)$

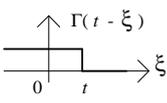
**1.7.2. Réponse indicielle**

On considère maintenant le vecteur entrée  $\mathbf{u}(t) = [u_1(t) \quad \dots \quad u_p(t)]^T$  avec  $u_k(t) = 0 \quad \forall k = 1, \dots, p$  et  $k \neq j$  et  $u_j(t) = \Gamma(t)$  (Echelon unité).

On a donc  $\mathbf{u}(t) = [0 \quad \dots \quad 0 \quad \Gamma(t) \quad 0 \quad \dots \quad 0]^T$  noté  $\mathbf{u}_j(t) = [0 \quad \dots \quad 0 \quad \Gamma(t) \quad 0 \quad \dots \quad 0]^T$

Cette entrée fournit le vecteur réponse indicielle  $\mathbf{r}(t)$  noté également  $\mathbf{r}_j(t)$  et ainsi déterminé pour  $t \geq 0$  :

$$\mathbf{r}_j(t) = \mathbf{C} \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{b}_j \Gamma(\tau) d\tau + \mathbf{d}_j = \mathbf{C} \int_0^t e^{\mathbf{A}\xi} \mathbf{b}_j \Gamma(t-\xi) d\xi + \mathbf{d}_j = \mathbf{C} \int_0^t e^{\mathbf{A}\xi} \mathbf{b}_j d\xi + \mathbf{d}_j$$

car  $\Gamma(t-\xi) = 1$  entre 0 et  $t$  : 

Comme  $\int_0^t e^{\mathbf{A}\xi} d\xi = \mathbf{A}^{-1} (e^{\mathbf{A}t} - \mathbf{I}) = (e^{\mathbf{A}t} - \mathbf{I}) \mathbf{A}^{-1}$  (à condition que  $\mathbf{A}$  soit bien sûr régulière), on a donc :

$$\mathbf{r}_j(t) = \mathbf{C} \mathbf{A}^{-1} [e^{\mathbf{A}t} - \mathbf{I}] \mathbf{b}_j + \mathbf{d}_j = \mathbf{C} [e^{\mathbf{A}t} - \mathbf{I}] \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}_j + \mathbf{d}_j$$

Si l'on fait varier l'index  $j$  ( $j = 1, \dots, p$ ), on obtient la matrice de réponses indicielles :

$$[\mathbf{r}(t)] = [\mathbf{r}_1(t) \quad \mathbf{r}_2(t) \quad \dots \quad \mathbf{r}_p(t)] \text{ qui s'écrit : } [\mathbf{r}(t)] = \mathbf{C} \mathbf{A}^{-1} [e^{\mathbf{A}t} - \mathbf{I}] \mathbf{B} + \mathbf{D} = \mathbf{C} [e^{\mathbf{A}t} - \mathbf{I}] \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}$$

### 1.7.3. Fonction de Transfert

Pour calculer la FT  $\mathbf{H}(p)$  du système, il suffit d'appliquer la  $TL$  à l'expression de la RI, soit :

$$TL\{\mathbf{h}(t)\} = TL\{\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} + \mathbf{D} \delta(t)\}$$

En utilisant le fait que :  $TL\{e^{\mathbf{A}t}\} = [p\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}$  et que :  $TL\{\delta(t)\} = 1$ , il vient :

$$\mathbf{H}(p) = \mathbf{C}[p\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}$$

Les pôles de la FT sont les valeurs propres  $\lambda_i$  de la matrice  $\mathbf{A}$  :

$$[p\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} = \frac{\text{adj}[p\mathbf{I} - \mathbf{A}]}{\det[p\mathbf{I} - \mathbf{A}]} \quad \det[p\mathbf{I} - \mathbf{A}] = \prod_{i=1}^m (p - \lambda_i)$$

$\text{adj}[\mathbf{M}]$  est la matrice adjointe de  $\mathbf{M}$ , obtenue à partir de la matrice  $\mathbf{C}$  des cofacteurs :  $\text{adj}[\mathbf{M}] = \mathbf{C}^T$   
 $\det[\mathbf{M}]$  représente le déterminant de la matrice  $\mathbf{M}$ .  $m$  est le nombre de pôles de  $\mathbf{H}(p)$

Les modes du système (RI des sous-systèmes élémentaires du 1er ordre) s'obtiennent à partir des pôles de la FT.

Le régime permanent s'obtient en faisant tendre  $t \rightarrow \infty$ . Pour la réponse indicielle, on a :

$$[\mathbf{r}_{rp}(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} [\mathbf{r}(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} \{\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}[e^{\mathbf{A}t} - \mathbf{I}]\mathbf{B} + \mathbf{D}\} = -\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} = \mathbf{H}(0)$$

pour un système stable ( $\equiv$  système dont les modes sont évanescents :  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{0}$ ).

### 1.8. Matrice de changement d'Etat

La Représentation d'Etat d'un système n'étant pas unique, on peut définir un nouvel Etat du système, noté  $\hat{\mathbf{x}}(t)$ , et obtenu à partir de l'ancien Etat  $\mathbf{x}(t)$  par la transformation  $\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{x}(t)$  où  $\mathbf{P}$  est une matrice régulière ( $\mathbf{P} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ). On a donc :  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{x}}(t)$  et les Représentations d'Etat équivalentes :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \hat{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{x}}(t) + \hat{\mathbf{B}} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \hat{\mathbf{C}} \hat{\mathbf{x}}(t) + \hat{\mathbf{D}} \mathbf{u}(t) \end{cases}$$

L'ancienne Représentation d'Etat  $\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t) \end{cases}$  devient  $\begin{cases} \mathbf{P}^{-1} \cdot \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{P}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{P}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t) \end{cases}$

$$\text{soit } \hat{\mathbf{A}} = \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{P}^{-1} \quad \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{P} \mathbf{B} \quad \hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \mathbf{P}^{-1} \quad \hat{\mathbf{D}} = \mathbf{D}$$

Les 2 systèmes ainsi représentés sont équivalents, c'est-à-dire qu'ils ont même RI et FT, et la matrice de transition d'Etat est donnée par :  $\hat{\Phi}(t,0) = \mathbf{P} \Phi(t,0) \mathbf{P}^{-1}$

### 1.9. Stabilité

Un système causal stable est tel que sa RI  $h(t)$  vérifie :  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0$  soit :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\mathbf{h}(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} + \mathbf{D} \delta(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\mathbf{A}t} = 0$$

En fréquence, cette condition s'écrit : tous les pôles de la FT  $H(p)$  ont une partie réelle négative.

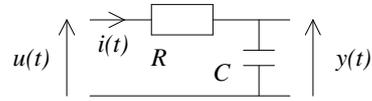
La FT a pour expression :  $\mathbf{H}(p) = \mathbf{C}[p\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}$ . Soit  $\lambda_i$  les  $m$  valeurs propres de la matrice  $\mathbf{A}$  : les pôles de la FT étant les valeurs propres de  $\mathbf{A}$ , cette condition devient :  $\text{Re}(\lambda_i) < 0 \quad \forall i \in [1, m]$ .

## 1.10. Représentation d'Etat de Systèmes à TC modélisés

## SYSTEMES PHYSIQUES

## Systèmes électriques

Circuit RC intégrateur à TC      Entrée : tension  $u(t)$       -      Sortie : tension  $y(t)$



$$\text{Lois de Kirschhoff : } \begin{cases} y'(t) = \frac{1}{C} i(t) \\ y(t) = -Ri(t) + u(t) \end{cases}$$

En choisissant le vecteur d'Etat :  $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ i(t) \end{bmatrix}$  on a la Représentation d'Etat du système :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} y'(t) \\ i'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/C \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 0 & -R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ i(t) \end{bmatrix} + 1 \cdot u(t) \end{cases} \quad \text{soit : } \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1/C \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 0 & -R \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + 1 \cdot u(t) \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} u(t) \\ y(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} u(t) \end{cases} \quad \text{avec : } \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1/C \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & -R \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = 1$$

## 2. Représentation d'Etat des systèmes à TD

La forme générale d'un système à TD d'entrée  $u(k)$  et de sortie  $y(k)$  régi par une équation aux différences linéaire et stationnaire ( $\equiv$  à coefficients constants) est donnée par : (Cas *causal*)

$$y(k) + \sum_{i=1}^N b_i y(k-i) = \sum_{i=0}^N a_i u(k-i) \quad \text{correspondant à la FT (CI nulles) : } H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N b_i z^{-i}} \quad (0)$$

### 2.1. Forme commandable (ou canonique, ou contrôlable ou encore gouvernable)

On peut écrire : 
$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N b_i z^{-i}} = \frac{\sum_{i=0}^N a_i z^{N-i}}{z^N + \sum_{i=1}^N b_i z^{N-i}} = a_0 + \frac{\sum_{i=1}^N (a_i - b_i a_0) z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N b_i z^{-i}} \quad \text{d'où :}$$

$$Y(z) = a_0 U(z) + \frac{\sum_{i=1}^N (a_i - b_i a_0) z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N b_i z^{-i}} U(z) = a_0 U(z) + \sum_{i=1}^N (a_i - b_i a_0) z^{-i} Q(z) \quad (1)$$

si on pose : 
$$Q(z) = \frac{U(z)}{1 + \sum_{i=1}^N b_i z^{-i}} \quad \text{c'est-à-dire : } Q(z) = -\sum_{i=1}^N b_i z^{-i} Q(z) + U(z) \quad (2)$$

En définissant les variables d'Etat :

$$\begin{cases} X_1(z) = z^{-N} Q(z) \\ X_2(z) = z^{-N+1} Q(z) \\ \dots \\ X_{N-1}(z) = z^{-2} Q(z) \\ X_N(z) = z^{-1} Q(z) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} zX_1(z) = X_2(z) \\ zX_2(z) = X_3(z) \\ \dots \\ zX_{N-1}(z) = X_N(z) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k) \\ x_2(k+1) = x_3(k) \\ \dots \\ x_{N-1}(k+1) = x_N(k) \end{cases}$$

(2) s'écrit : 
$$zX_N(z) = -b_1 X_N(z) - b_2 X_{N-1}(z) - \dots - b_N X_1(z) + U(z) \quad (3) \quad \text{qui en temps donne}$$

(si CI nulles) : 
$$x_N(k+1) = -b_1 x_N(k) - b_2 x_{N-1}(k) - \dots - b_N x_1(k) + u(k) \quad (4)$$

(1) s'écrit : 
$$Y(z) = a_0 U(z) + \sum_{i=1}^N (a_i - b_i a_0) X_{N+1-i}(z) \quad (5) \quad \text{qui dans le domaine temporel donne :}$$

$$y(k) = a_0 u(k) + \sum_{i=1}^N (a_i - b_i a_0) x_{N+1-i}(k) \quad (6)$$

(3) et (4) aboutissent à l'équation d'Etat, et (6) à l'équation d'observation.

On a les relations matricielles :

Equation d'Etat : 
$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \mathbf{b} u(k)$$

Equation d'observation : 
$$y(k) = \mathbf{c} \mathbf{x}(k) + \mathbf{d} u(k)$$

où la matrice  $\mathbf{A}$  et les vecteurs  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  et  $\mathbf{d}$  ne dépendent pas du temps (système stationnaire  $\equiv$  équation aux différences à coeffs. constants) :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -b_N & -b_{N-1} & -b_{N-2} & \cdots & -b_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = [a_N - b_N a_0 \quad a_{N-1} - b_{N-1} a_0 \quad \cdots \quad a_1 - b_1 a_0] \quad \mathbf{d} = [a_0] \quad \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \cdots \\ x_N(k) \end{bmatrix}$$

La forme particulière de la matrice  $\mathbf{A}$  est appelée *forme compagnon*.

## 2.2. Forme observable

D'après la relation (0) on a:  $Y(z) = a_0 U(z) + z^{-1}[a_1 U(z) - b_1 Y(z) + z^{-1}[a_2 U(z) - b_2 Y(z)] + \cdots]$  (7)

On définit les variables d'Etat comme suit :

$$\begin{cases} X_N(z) = z^{-1}[a_1 U(z) - b_1 Y(z) + X_{N-1}(z)] \\ X_{N-1}(z) = z^{-1}[a_2 U(z) - b_2 Y(z) + X_{N-2}(z)] \\ \cdots \\ X_2(z) = z^{-1}[a_{N-1} U(z) - b_{N-1} Y(z) + X_1(z)] \\ X_1(z) = z^{-1}[a_N U(z) - b_N Y(z)] \end{cases} \quad (8)$$

(7) s'écrit :  $Y(z) = a_0 U(z) + X_N(z)$  (9) qui permet d'exprimer (8) ainsi :

$$\begin{cases} zX_N(z) = X_{N-1}(z) - b_1 X_N(z) + (a_1 - b_1 a_0)U(z) \\ zX_{N-1}(z) = X_{N-2}(z) - b_2 X_N(z) + (a_2 - b_2 a_0)U(z) \\ \cdots \\ zX_2(z) = X_1(z) - b_{N-1} X_N(z) + (a_{N-1} - b_{N-1} a_0)U(z) \\ zX_1(z) = -b_N X_N(z) + (a_N - b_N a_0)U(z) \end{cases}$$

qui donne par  $TZ^{-1}$  (si CI nulles) :

$$\begin{cases} x_N(k+1) = x_{N-1}(k) - b_1 x_N(k) + (a_1 - b_1 a_0)u(k) \\ x_{N-1}(k+1) = x_{N-2}(k) - b_2 x_N(k) + (a_2 - b_2 a_0)u(k) \\ \cdots \\ x_2(k+1) = x_1(k) - b_{N-1} x_N(k) + (a_{N-1} - b_{N-1} a_0)u(k) \\ x_1(k+1) = -b_N x_N(k) + (a_N - b_N a_0)u(k) \end{cases}$$

(9) donne en temporel :  $y(k) = x_N(k) + a_0 u(k)$

Et sous forme matricielle :

$$\text{Equation d'Etat :} \quad \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \mathbf{b} u(k)$$

$$\text{Equation d'observation :} \quad y(k) = \mathbf{c} \mathbf{x}(k) + \mathbf{d} u(k)$$

où la matrice  $\mathbf{A}$  et les vecteurs  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  et  $\mathbf{d}$  sont donnés par :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -b_N \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -b_{N-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -b_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -b_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_N - b_N a_0 \\ a_{N-1} - b_{N-1} a_0 \\ \cdots \\ a_2 - b_2 a_0 \\ a_1 - b_1 a_0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 1] \quad \mathbf{d} = [a_0] \quad \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \cdots \\ x_N(k) \end{bmatrix}$$

La forme particulière de la matrice  $\mathbf{A}$  est appelée *forme observable*.

### 2.3. Forme diagonale

Le découplage des variables d'Etat est obtenu en rendant la matrice  $\mathbf{A}$  diagonale. Ceci peut par exemple se faire directement à partir de la FT du système décomposée en éléments simples : (les pôles de la FT sont notés  $p_i$ )

#### 2.3.1. FT à pôles simples

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N b_i z^{-i}} = a_0 + \frac{\sum_{i=1}^N (a_i - b_i a_0) z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N b_i z^{-i}} = a_0 + \frac{\sum_{i=1}^N (a_i - b_i a_0) z^{N-i}}{\prod_{i=1}^N (z - p_i)} = a_0 + \sum_{i=1}^N \frac{c_i}{z - p_i} \quad \text{avec}$$

$$c_i = (z - p_i) \left. \frac{Y(z)}{U(z)} \right|_{z=p_i} \rightarrow Y(z) = a_0 U(z) + \sum_{i=1}^N \frac{c_i}{z - p_i} U(z) \quad (10)$$

et en choisissant les variables d'Etat comme suit :

$$\left| \begin{array}{l} \frac{X_1(z)}{U(z)} = \frac{1}{z - p_1} \rightarrow zX_1(z) = p_1 X_1(z) + U(z) \xrightarrow{\text{CI nulles}} x_1(k+1) = p_1 x_1(k) + u(k) \\ \frac{X_2(z)}{U(z)} = \frac{1}{z - p_2} \rightarrow zX_2(z) = p_2 X_2(z) + U(z) \xrightarrow{\text{CI nulles}} x_2(k+1) = p_2 x_2(k) + u(k) \\ \cdots \\ \frac{X_N(z)}{U(z)} = \frac{1}{z - p_N} \rightarrow zX_N(z) = p_N X_N(z) + U(z) \xrightarrow{\text{CI nulles}} x_N(k+1) = p_N x_N(k) + u(k) \end{array} \right.$$

l'observation en (10) s'écrit :  $Y(z) = a_0 U(z) + \sum_{i=1}^N c_i X_i(z)$

Sous forme matricielle, on a :

$$\text{Equation d'Etat :} \quad \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \mathbf{b} u(k)$$

$$\text{Equation d'observation :} \quad y(k) = \mathbf{c} \mathbf{x}(k) + \mathbf{d} u(k)$$

où la matrice  $\mathbf{A}$  et les vecteurs  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  et  $\mathbf{d}$  sont donnés par :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_N \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_N] \quad \mathbf{d} = [a_0] \quad \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \cdots \\ x_N(k) \end{bmatrix}$$

La forme particulière de la matrice  $\mathbf{A}$  est appelée *forme diagonale*.

2.3.2. FT à pôles multiples

Supposons un pôle multiple  $p_1$  d'ordre  $m$  dans la FT du système : (les pôles de la FT sont notés  $p_i$ )

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N b_i z^{-i}} = a_0 + \frac{\sum_{i=1}^N (a_i - b_i a_0) z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N b_i z^{-i}} = a_0 + \frac{\sum_{i=1}^N (a_i - b_i a_0) z^{N-i}}{(z - p_1)^m \prod_{i=m+1}^N (z - p_i)} = a_0 + \sum_{i=1}^m \frac{c_i}{(z - p_1)^{m+i-1}} + \sum_{i=m+1}^N \frac{c_i}{z - p_i}$$

$$\rightarrow Y(z) = a_0 U(z) + \sum_{i=1}^m \frac{c_i}{(z - p_1)^{m+i-1}} U(z) + \sum_{i=m+1}^N \frac{c_i}{z - p_i} U(z) \quad (11)$$

En choisissant les variables d'Etat comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1(z) = \frac{1}{(z - p_1)^m} U(z) \rightarrow \frac{X_1(z)}{X_2(z)} = \frac{1}{z - p_1} \xrightarrow{\text{CI nulles}} x_1(k+1) = p_1 x_1(k) + x_2(k) \\ X_2(z) = \frac{1}{(z - p_1)^{m-1}} U(z) \rightarrow \frac{X_2(z)}{X_3(z)} = \frac{1}{z - p_1} \xrightarrow{\text{CI nulles}} x_2(k+1) = p_1 x_2(k) + x_3(k) \\ \dots \\ X_m(z) = \frac{1}{z - p_1} U(z) \rightarrow \frac{X_m(z)}{U(z)} = \frac{1}{z - p_1} \xrightarrow{\text{CI nulles}} x_m(k+1) = p_1 x_m(k) + u(k) \\ X_{m+1}(z) = \frac{1}{z - p_{m+1}} U(z) \rightarrow \frac{X_{m+1}(z)}{U(z)} = \frac{1}{z - p_{m+1}} \xrightarrow{\text{CI nulles}} x_{m+1}(k+1) = p_{m+1} x_{m+1}(k) + u(k) \\ \dots \\ X_N(z) = \frac{1}{z - p_N} U(z) \rightarrow \frac{X_N(z)}{U(z)} = \frac{1}{z - p_N} \xrightarrow{\text{CI nulles}} x_N(k+1) = p_N x_N(k) + u(k) \end{array} \right.$$

l'observation en (11) s'écrit :  $Y(z) = a_0 U(z) + \sum_{i=1}^N c_i X_i(z)$

Sous forme matricielle, on a :

Equation d'Etat :  $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \mathbf{b} u(k)$

Equation d'observation :  $y(k) = \mathbf{c} \mathbf{x}(k) + \mathbf{d} u(k)$

où la matrice  $\mathbf{A}$  et les vecteurs  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  et  $\mathbf{d}$  sont donnés par :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & p_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & p_{m+1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & p_N \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_N] \quad \mathbf{d} = [a_0] \quad \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \dots \\ x_N(k) \end{bmatrix}$$

(m-1) coeffs. 0

La forme particulière de la matrice  $\mathbf{A}$  est appelée *forme diagonale*.

### 2.4. Modèle général

Si on étend l'étude aux systèmes multivariables (≡ avec des E/S vectorielles), on aboutit à la relation plus générale, appelée Représentation d'Etat (le plan  $(\mathbf{x}(k), \mathbf{x}(k+1))$  est l'espace d'Etat (≡ espace des phases) discret), ou encore Représentation interne, qui s'écrit pour un système linéaire stationnaire :

$$\text{Equation d'Etat : } \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \quad \text{Etat initial } \mathbf{x}(k_0) \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^N \quad \mathbf{u} \in \mathbf{R}^p \quad \mathbf{A} \in \mathbf{R}^{N \times N} \quad \mathbf{B} \in \mathbf{R}^{N \times p}$$

$$\text{Eq. d'observation: } \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \quad \mathbf{y} \in \mathbf{R}^m \quad \mathbf{C} \in \mathbf{R}^{m \times N} \quad \mathbf{D} \in \mathbf{R}^{m \times p}$$

La Représentation d'Etat n'est pas unique (les matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  sont non uniques) (forme canonique, ...).  
(Pour un système non stationnaire, les matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  dépendent du temps:  $\mathbf{A}(k)$ ,  $\mathbf{B}(k)$ ,  $\mathbf{C}(k)$ ,  $\mathbf{D}(k)$ )

### 2.5. Solution de l'équation d'Etat

La solution  $\mathbf{x}(k)$  de l'équation d'Etat  $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$  est donnée par :

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^k \mathbf{x}(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-i-1} \mathbf{B}\mathbf{u}(i) \quad k = 1, 2, \dots$$

On peut obtenir ce résultat par récursivité à partir de l'instant  $k = 0$  pris comme instant initial :

$$\mathbf{x}(1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(0)$$

$$\mathbf{x}(2) = \mathbf{A}\mathbf{x}(1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(1) = \mathbf{A}^2 \mathbf{x}(0) + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(1)$$

$$\mathbf{x}(3) = \mathbf{A}\mathbf{x}(2) + \mathbf{B}\mathbf{u}(2) = \mathbf{A}^3 \mathbf{x}(0) + \mathbf{A}^2 \mathbf{B}\mathbf{u}(0) + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(2)$$

...

De même la sortie (vectorielle) ou observation est donnée par ( $k = 0$  pris comme instant initial) :

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{A}^k \mathbf{x}(0) + \mathbf{C} \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-i-1} \mathbf{B}\mathbf{u}(i) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \quad k = 1, 2, \dots$$

Ces solutions expriment l'Etat et l'observation en fonction de l'Etat initial  $\mathbf{x}(0)$ .

Elles expriment le fait que tout le « passé » du système est contenu dans l'Etat  $\mathbf{x}(k_0)$  à un instant  $k_0$  pris comme référence.

La Représentation d'Etat d'un système étant effectuée (matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  déterminées), pour connaître l'évolution du système pour  $k \geq k_0$ , la seule connaissance de l'Etat  $\mathbf{x}(k_0)$  suffit.

### 2.6. Matrice de Transition d'Etat

#### 2.6.1. Matrice de Transition d'Etat

On définit la matrice transition d'Etat du système (instant initial  $k_0$ ) :

$$\Phi(k, k_0) = \mathbf{A}^{k-k_0} \quad \Phi(k, 0) = \mathbf{A}^k$$

La solution de l'équation peut s'écrire en fonction de la matrice transition d'Etat :

$$\mathbf{x}(k) = \Phi(k, 0)\mathbf{x}(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \Phi(k-1, i)\mathbf{B}\mathbf{u}(i) \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\text{ou encore : } \mathbf{x}(k) = \Phi(k, 0)\mathbf{x}(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \Phi(i, 0)\mathbf{B}\mathbf{u}(k-i-1) \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\text{On a la propriété : } \Phi(k, k) = \mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$$

Avec la matrice de transition d'Etat, la solution de l'équation d'Etat s'écrit :

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\Phi(k, 0)\mathbf{x}(0) + \mathbf{C} \sum_{i=0}^{k-1} \Phi(k-1, i)\mathbf{B}\mathbf{u}(i) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\text{ou encore : } \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\Phi(k, 0)\mathbf{x}(0) + \mathbf{C} \sum_{i=0}^{k-1} \Phi(i, 0)\mathbf{B}\mathbf{u}(k-i-1) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \quad k = 1, 2, \dots$$

### 2.6.2. Calcul de la matrice de Transition d'Etat

On a l'expression de la matrice de transition d'Etat :  $\Phi(k,0) = \mathbf{A}^k = TZ^{-1} \left\{ [z\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \right\}$

En effet, si on prend la  $TZ$  de l'équation d'Etat :  $z\mathbf{X}(z) - z\mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(z) + \mathbf{B}\mathbf{U}(z)$  on a :

$$\mathbf{X}(z) = [z\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} z\mathbf{x}(0) + [z\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B}\mathbf{U}(z)$$

d'où :  $\mathbf{x}(k) = TZ^{-1} \left\{ [z\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} z \right\} \mathbf{x}(0) + TZ^{-1} \left\{ [z\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B}\mathbf{U}(z) \right\}$

En identifiant cette relation avec la solution de l'équation d'Etat, on obtient l'expression de la matrice de transition d'Etat :

$$\Phi(k,0) = \mathbf{A}^k = TZ^{-1} \left\{ [z\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} z \right\}$$

et :  $\sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-i-1} \mathbf{B}\mathbf{u}(i) = TZ^{-1} \left\{ [z\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B}\mathbf{U}(z) \right\}$

La matrice  $\Phi(k,0) = \mathbf{A}^k = TZ^{-1} \left\{ [z\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} z \right\}$  s'obtient en effectuant *terme à terme* la  $TZ^{-1}$  de la matrice  $\left\{ [z\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} z \right\}$ .

Le calcul de la matrice  $[z\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}$  peut se faire itérativement à l'aide de l'algorithme de *Leverrier*.

### 2.7. Réponses Impulsionnelle et indicielle. Fonction de Transfert

La RI, la réponse indicielle et la FT du système peuvent être établies à partir de la Représentation d'Etat du système.

Soit  $\mathbf{x}(k) = \mathbf{0} \quad \forall k \leq k_0 = 0$ .

#### 2.7.1. Réponse Impulsionnelle

Posons :

$$\mathbf{u}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} = \delta(0) \quad \mathbf{u}(k) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \text{ pour } k \geq 1 \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

La solution de l'équation d'Etat donne :  $\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{B} \delta(0) \quad k \geq 1$

et l'équation de la sortie est immédiate :  $\mathbf{h}(k) = \mathbf{C} \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{B} \delta(0) \quad k \geq 1 \quad \mathbf{h}(0) = \mathbf{D} \delta(0)$

L'expression de la RI en fonction du vecteur d'Etat utilise l'équation d'Etat :  $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \mathbf{B} \mathbf{u}(k)$

qui donne, du fait de l'entrée impulsionnelle :  $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A} \mathbf{x}(k) \quad k \geq 1$

et l'équation d'observation :  $\mathbf{y}(k) = \mathbf{C} \mathbf{x}(k) + \mathbf{D} \mathbf{u}(k)$  donne :

$$\mathbf{h}(k) = \mathbf{C} \mathbf{x}(k) + \mathbf{D} \delta(k) \quad \text{soit :} \quad \mathbf{h}(k) = \mathbf{C} \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \delta(k) \quad k = 1, 2, \dots$$

### 2.7.2. Réponse indicielle

Posons :

$$\mathbf{u}(k) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}_{k \geq 0} = \Gamma(k) \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

La solution de l'équation d'Etat donne :  $\mathbf{x}(k) = \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{A}^i \mathbf{B} \Gamma(0) \quad k \geq 1$

et l'équation de la sortie est immédiate :

$$\mathbf{r}(k) = \mathbf{C} \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{A}^i \mathbf{B} \Gamma(0) \mathbf{D} \Gamma(0) \quad k \geq 1 \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{D} \Gamma(0)$$

La relation précédemment établie pour la RI permet de retrouver le résultat :  $\mathbf{r}(k) = \sum_{i=0}^k \mathbf{h}(i) \quad k \geq 0$

L'expression de la RI en fonction du vecteur d'Etat utilise l'équation d'Etat :  $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \mathbf{B} \mathbf{u}(k)$  qui donne, du fait de l'entrée indicielle :  $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \mathbf{B} \Gamma(0) \quad k \geq 0$

et l'équation d'observation :  $\mathbf{y}(k) = \mathbf{C} \mathbf{x}(k) + \mathbf{D} \mathbf{u}(k)$  donne :  $\mathbf{r}(k) = \mathbf{C} \mathbf{x}(k) + \mathbf{D} \Gamma(0) \quad k \geq 0$

Le régime permanent s'obtient en faisant :  $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k)$  d'où l'Etat en régime permanent :

$$\mathbf{x}(k) = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \Gamma(0)$$

et la réponse indicielle en régime permanent :

$$\mathbf{r}(k) = [\mathbf{C}(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}] \Gamma(0)$$

Pour atteindre le régime permanent, il faut donc que la matrice  $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$  soit régulière.

### 2.7.3. Fonction de Transfert

Pour calculer la FT du système, il suffit d'appliquer la *TZ* à l'expression de la sortie, après avoir pris la *TZ* de l'équation d'Etat (CI nulles) :

$$\text{Etat : } \mathbf{X}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \mathbf{U}(z)$$

$$\text{Sortie : } \mathbf{Y}(z) = \mathbf{C} \mathbf{X}(z) + \mathbf{D} \mathbf{U}(z) \quad \text{d'où : } \mathbf{Y}(z) = [\mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}] \mathbf{U}(z)$$

relation qui donne immédiatement la FT du système discret comme *TZ* de la RI :

$$\mathbf{H}(z) = \mathbf{C}[z\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \quad \text{car : } \mathbf{H}(z) = \frac{\mathbf{Y}(z)}{\mathbf{U}(z)} \quad \text{avec : } \mathbf{u}(k) = \delta(k) \quad \mathbf{U}(z) = 1$$

Les pôles de la FT sont les valeurs propres  $\lambda_i$  de la matrice  $\mathbf{A}$  :

$$[z\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} = \frac{\text{adj}[z\mathbf{I} - \mathbf{A}]}{\det[z\mathbf{I} - \mathbf{A}]} \quad \det[z\mathbf{I} - \mathbf{A}] = \prod_{i=1}^m (z - \lambda_i)$$

$\text{adj}[\mathbf{M}]$  est la matrice adjointe de  $\mathbf{M}$ , obtenue à partir de la matrice  $\mathbf{C}$  des cofacteurs :  $\text{adj}[\mathbf{M}] = \mathbf{C}^T$

$\det[\mathbf{M}]$  représente le déterminant de la matrice  $\mathbf{M}$ .  $m$  est le nombre de pôles de  $\mathbf{H}(z)$

Les modes du système (RI des sous-systèmes élémentaires du 1er ordre) s'obtiennent à partir des pôles de la FT.

Le régime permanent s'obtient en faisant tendre  $k \rightarrow \infty$ . Pour la réponse indicielle, on a :

$$[\mathbf{r}_{rp}(k)] = \lim_{k \rightarrow \infty} [\mathbf{r}(k)] = \mathbf{H}(1) \quad \text{pour un système stable (}\equiv \text{ système dont les modes sont évanescents).}$$

**2.8. Matrice de changement d'Etat**

La Représentation d'Etat d'un système n'étant pas unique, on peut définir un nouvel Etat du système, noté  $\hat{\mathbf{x}}(k)$ , et obtenu à partir de l'ancien Etat  $\mathbf{x}(k)$  par la transformation  $\hat{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{x}(k)$  où  $\mathbf{P}$  est une matrice régulière ( $\mathbf{P} \in \mathbf{R}^{N \times N}$ ). On a donc :  $\mathbf{x}(k) = \mathbf{P}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{x}}(k)$  et les Représentations d'Etat équivalentes :

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \hat{\mathbf{x}}(k+1) = \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}}(k) + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{x}}(k) + \hat{\mathbf{D}}\mathbf{u}(k) \end{cases}$$

L'ancienne Représentation d'Etat  $\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \end{cases}$  devient  $\begin{cases} \mathbf{P}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{P}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{P}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \end{cases}$

soit  $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}$      $\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{P}\mathbf{B}$      $\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{P}^{-1}$      $\hat{\mathbf{D}} = \mathbf{D}$

Les 2 systèmes ainsi représentés sont équivalents, c'est-à-dire qu'ils ont même RI et FT, et la matrice de transition d'Etat est donnée par :  $\hat{\Phi}(k,0) = \mathbf{P}\Phi(k,0)\mathbf{P}^{-1}$ .

**2.9. Stabilité**

Un système causal stable est tel que sa RI  $h(k)$  vérifie :  $\lim_{k \rightarrow \infty} h(k) = 0$  soit :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [\mathbf{h}(k)] = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}\delta(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{A}^k$$

En fréquence, cette condition s'écrit : tous les pôles de la FT  $H(z)$  ont un module inférieur à 1.

La FT a pour expression :  $\mathbf{H}(z) = \mathbf{C}[z\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$ . Soit  $\lambda_i$  les  $m$  valeurs propres de la matrice  $\mathbf{A}$  :

les pôles de la FT étant les valeurs propres de  $\mathbf{A}$ , cette condition devient :  $|\lambda_i| < 1 \quad \forall i \in [1, m]$ .

**2.10. Représentation d'Etat de Systèmes à TD modélisés**

**SYSTEMES DEMOGRAPHIQUES**

*Elevage d'animaux à TD*    Entrée : croisement / mortalité  $u(k)$  - Sortie : nombres de couples  $y(k)$

On observe un élevage d'animaux qui obéit aux lois suivantes : chaque mois un couple, s'il est fertile, engendre (après une gestation d'1 mois) 1 couple nouveau-né, et cela indéfiniment. Un couple nouveau-né devient fertile au bout d'1 mois et le reste constamment.

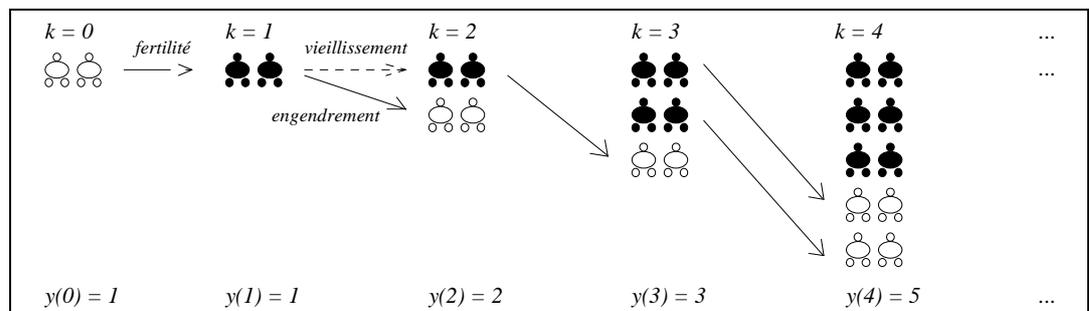
La mortalité et le croisement sont supposés ne concerner que les nouveaux-nés.

Un nombre de couples  $u(k) < 0$  traduit la mortalité (ou la vente !) des couples nouveaux-nés.  $u(k) > 0$  indique un croisement (immigration, introduction d'une population extérieure de couples nouveaux-nés).

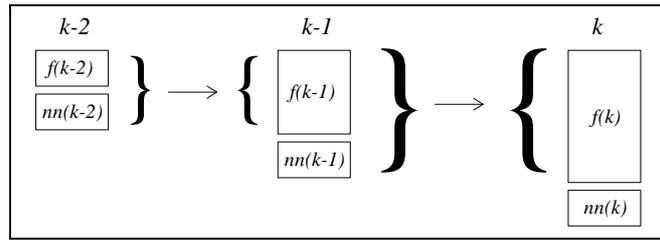
L'élevage débute au mois numéro 0.

On cherche à déterminer le nombre de couples  $y(k)$  le  $k$ -ième mois, présents dans l'élevage.

Exemple : avec  $u(k) = \delta(k)$  :



Soient :  $f(k)$  les couples fertiles et  $nn(k)$  les couples nouveau-nés, au mois  $k$  :



On a : 
$$\begin{cases} y(k) = y(k-1) + nn(k) \\ nn(k) = f(k-1) + u(k) \\ f(k) = y(k-1) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y(k) = y(k-1) + y(k-2) + u(k) \\ \text{avec } y(k < 0) = 0 \end{cases}$$

En choisissant l'état  $\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$  constitué des composantes :

$x_1(k) = f(k)$  (couples fertiles) et  $x_2(k) = nn(k)$  (couples nouveaux-nés)

on peut écrire que l'élevage  $y(k+1)$  se compose au mois  $(k+1)$  :

- des couples fertiles en  $(k+1)$ , formés d'une part de tous les couples du mois précédent : les anciens ayant vieilli sans perdre leur fécondité et les nouveaux-nés l'ayant acquise, et d'autre part du croisement / mortalité survenu le mois précédent donc rendu fertile :

$$x_1(k+1) = x_1(k) + x_2(k) + u(k)$$

- des couples nouveaux-nés en  $(k+1)$  constitués des enfants des fertiles du mois précédent :

$$x_2(k+1) = x_1(k)$$

- et des couples nouveaux-nés de croisement / mortalité survenus au mois  $(k+1)$

soit :  $y(k) = x_1(k) + x_2(k) + u(k)$

On a donc la Représentation d'Etat :

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + x_2(k) + u(k) \\ x_2(k+1) = x_1(k) \\ y(k) = x_1(k) + x_2(k) + u(k) \end{cases} \quad \text{soit matriciellement : } \begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = [1 \quad 1] \mathbf{x}(k) + 1 \cdot u(k) \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \mathbf{B} u(k) \\ y(k) = \mathbf{C} \mathbf{x}(k) + \mathbf{D} u(k) \end{cases} \quad \text{avec : } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = [1 \quad 1] \quad \mathbf{D} = 1$$

## TD 4 ANNEXE. Représentation d'Etat des systèmes

### 1. Calcul de la matrice de transition

Effectuer le calcul de la matrice de transition  $\Phi(t,0) = e^{At} = TL^{-1} \left\{ [p\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \right\}$  avec  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$  par les différentes méthodes suivantes :

1. Par inversion matricielle directe et  $TL^{-1}$
2. Par inversion matricielle de *Leverrier* et  $TL^{-1}$  :

Algorithme de *Leverrier* pour l'inversion matricielle symbolique en  $p$  (ou en  $z$ ) :

$$\cdot [p\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} = \frac{1}{L(p)} \cdot \mathbf{M}(p) \quad \text{avec :}$$

$$L(p) = p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0 \quad \text{polynôme en } p, \text{ où } n \text{ est l'ordre de la matrice } \mathbf{A}$$

$$\text{et } \mathbf{M}(p) = \mathbf{M}_{n-1}p^{n-1} + \mathbf{M}_{n-2}p^{n-2} + \dots + \mathbf{M}_1p + \mathbf{M}_0 \quad \text{polynôme de matrices}$$

. Les matrices  $\mathbf{M}_i$  et les coefficients  $a_i$  sont calculés récursivement :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{M}_{n-1} = \mathbf{I} & a_{n-1} = -\text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{M}_{n-1}) \\ \mathbf{M}_{n-2} = \mathbf{A}\mathbf{M}_{n-1} + \mathbf{I}a_{n-1} & a_{n-2} = -\frac{1}{2}\text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{M}_{n-2}) \\ \mathbf{M}_{n-3} = \mathbf{A}\mathbf{M}_{n-2} + \mathbf{I}a_{n-2} & a_{n-3} = -\frac{1}{3}\text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{M}_{n-3}) \\ \dots & \\ \mathbf{M}_1 = \mathbf{A}\mathbf{M}_2 + \mathbf{I}a_2 & a_1 = -\frac{1}{n-1}\text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{M}_1) \\ \mathbf{M}_0 = \mathbf{A}\mathbf{M}_1 + \mathbf{I}a_1 & a_0 = -\frac{1}{n}\text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{M}_0) \end{array} \right.$$

$$\text{soit : } \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{M}_i = \mathbf{A}\mathbf{M}_{i+1} + \mathbf{I}a_{i+1} & i < n-1, \quad \mathbf{M}_{n-1} = \mathbf{I} \\ a_i = -\frac{1}{n-i}\text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{M}_i) & i \leq n-1 \end{array} \right.$$

- *Rappel* : la trace  $\text{tr}(\mathbf{X})$  d'une matrice  $\mathbf{X}$  est la somme des éléments de sa diagonale principale.

3. Par développement en série :  $e^{At} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} (\mathbf{A}t)^i$
4. Par l'application du théorème de *Cayley-Hamilton* :
  - Calcul des valeurs propres  $\lambda_i$  de  $\mathbf{A}$
  - Développement de  $e^{At}$  en un nombre fini de termes, égal à l'ordre  $n$  de la matrice  $\mathbf{A}$
5. Par diagonalisation de  $\mathbf{A}$  :
  - Soit  $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ . Calculer à partir des valeurs propres  $\lambda_i$  et des vecteurs propres  $\mathbf{V}_i$  associés à la matrice  $\mathbf{A}$ , la matrice diagonalisante  $\mathbf{P}$ .
  - En déduire  $\hat{\mathbf{A}}$  puis  $e^{\hat{\mathbf{A}}t}$ . Calculer enfin  $e^{At} = \mathbf{P}e^{\hat{\mathbf{A}}t}\mathbf{P}^{-1}$ .

## 2. SLTI à TD - Elevage d'animaux

*Elevage d'animaux à TD*      *Entrée : croisement / mortalité  $u(k)$*  - *Sortie : nombres de couples  $y(k)$*

On observe un élevage d'animaux qui obéit aux lois suivantes : chaque mois un couple, s'il est fertile, engendre (après une gestation d'1 mois) 1 couple nouveau-né, et cela indéfiniment. Un couple nouveau-né devient fertile au bout d'1 mois et le reste constamment.

La mortalité et le croisement sont supposés ne concerner que les nouveaux-nés.

Un nombre de couples  $u(k) < 0$  traduit la mortalité (ou la vente !) des couples nouveaux-nés.  $u(k) > 0$  indique un croisement (immigration, introduction d'une population extérieure de couples nouveaux-nés).

L'élevage débute au mois numéro 0.

On cherche à déterminer le nombre de couples  $y(k)$  le  $k$ -ième mois, présents dans l'élevage, avec  $u(k) = \delta(k)$ .

### Représentation Externe

1. Donner l'équation aux différences du SLTI.
2. Donner la FT du système.
3. Résoudre cette équation par la méthode de la Transformée en  $z$ .

### Représentation Interne

4. Donner une Représentation d'Etat du système par modélisation directe.
5. Résoudre les équations d'Etat et d'observation et retrouver le résultat de la question 3.
6. Retrouver à partir du modèle d'Etat la FT du système.

## 3. SLTI à TC - Pendule simple

Soit un pendule simple de masse  $m$  suspendu à un point par une tige sans masse de longueur  $l$ . L'équation différentielle non linéaire stationnaire décrivant le mouvement du pendule par rapport à sa position d'équilibre  $\theta_0 = 0$  s'écrit :

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{l} \sin \theta(t) = 0 \quad \text{avec : } \theta(0) = \theta_0 = 0 \quad \text{et} \quad \dot{\theta}(0) = 0$$

Si on se limite à de faibles amplitudes pour les oscillations du pendule, on à l'équation différentielle linéaire :

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{l} \theta(t) = 0$$

- Donner alors une Représentation d'Etat du pendule simple et l'expression de la solution issue de cette représentation.

## 4. SLTI à TC - Circuit électrique

Exprimer les équations différentielles linéaires stationnaires décrivant le fonctionnement d'un condensateur  $C$  et d'une self  $L$  sous forme de Représentation d'Etat, donner leur solution et déduire la FT :

(Entrée : tension  $u(t)$  aux bornes du composant - Sortie : courant  $i(t)$  traversant le composant)

$$C: \quad i(t) = C d \frac{u(t)}{dt}$$

$$L: \quad u(t) = L d \frac{i(t)}{dt}$$

### 5. SLTI à TD - Registre à décalage

Exprimer les équations aux différences linéaires stationnaires décrivant le fonctionnement d'un registre à décalage à droite 4 bits :  $[x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]$  et les écrire sous forme de Représentation d'Etat :

- dans le cas d'un décalage circulaire.
  - dans le cas d'un décalage non circulaire à entrée de donnée.  
(On notera  $u_k$  l'entrée de donnée à l'instant  $k$  du registre à décalage non circulaire).
-

## 8 ANNEXE. Signaux aléatoires

« Le hasard est souvent la volonté des autres » Alfred Capus.

### 0. INTRODUCTION

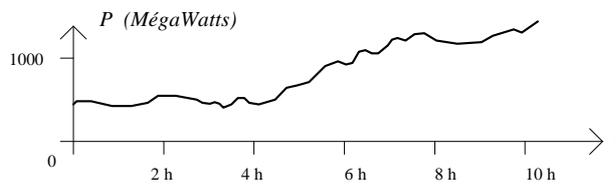
On peut dire qu'un signal aléatoire est une fonction du temps, qui est, contrairement aux signaux déterministes, sujette au hasard. Un signal aléatoire n'est donc pas prévisible.

De plus, on ne dispose pas de l'équation décrivant cette fonction (pas d'expression analytique du signal) contrairement aux signaux déterministes dont on a souvent l'expression analytique directement ou par identification.

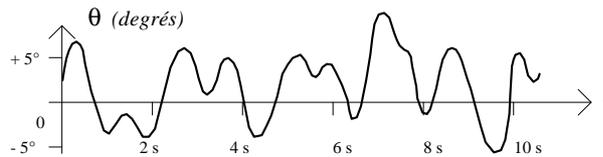
Un signal aléatoire ne sera donc pas décrit analytiquement, mais statistiquement à l'aide de paramètres tels que moyenne, variance ...

*Exemples de signaux aléatoires*

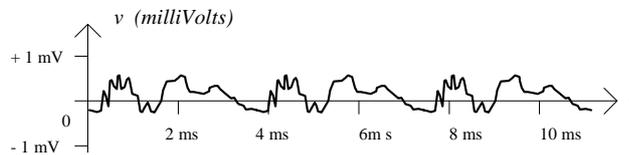
*Consommation d'électricité dans une région donnée un jour de décembre*



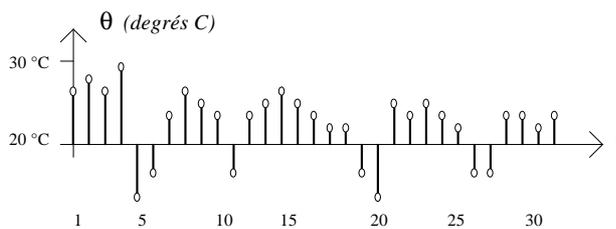
*Roulis d'un navire, dans un état de mer donné, pour un cap et une vitesse donnés*



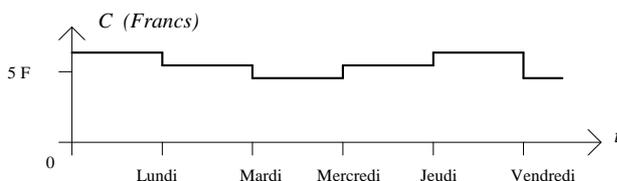
*Signal de parole, issu d'un microphone*



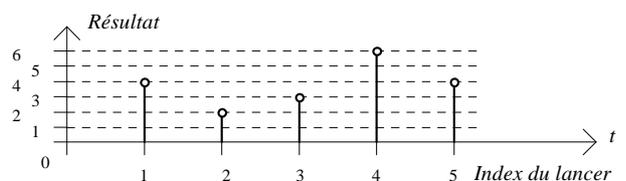
*Température sous abri relevée chaque jour à midi en un lieu donné pendant le mois de juillet*



*Cours du dollar déterminé en fin de séance journalière à 18 h*



*Lancer d'un dé à 6 faces*



L'exemple du lancer d'un dé permet de dire qu'on peut voir un signal aléatoire comme un signal déterministe dépendant de tellement de paramètres qu'une expression analytique (issus des lois de la mécanique ici) ne serait pas envisageable ou, même si elle pouvait être obtenue, serait moins exploitable qu'une expression statistique à l'aide de caractéristiques de moyenne, variance ...

## 1. THEORIE DES PROBABILITES

### 1.1. Définitions

#### Univers

On définit par  $S$  l'ensemble de tous les événements possibles d'une expérience donnée.

#### Exemple

Lancer d'un dé à 6 faces  $S = \{1,2,3,4,5,6\}$

Dans cet exemple, chaque événement est quantifié (on a déjà une Variable Aléatoire), mais chaque face du dé aurait pu être caractérisée par une couleur plutôt que par un entier.

#### Evénement

On définit par  $A (\subset S)$  l'ensemble des événements (issus de cette expérience) ayant des caractéristiques données.

#### Exemple

Lancer d'un dé à 6 faces  $A = \{2,4,6\}$  on s'intéresse à la sortie des numéros pairs.

#### Probabilité

Supposant que  $A$  se produise  $m$  fois lors de  $n$  expériences identiques et indépendantes entre elles, on définit la probabilité de réalisation de  $A$  par :

$$p(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n}$$

Cette approche expérimentale de la notion de probabilité présente un grand intérêt pratique (même si en pratique on ne peut faire  $n \rightarrow \infty$ , mais la convergence de  $m/n$  en fonction de  $n$  est rapide) et est compatible avec la définition axiomatique présentée ci-après.

#### Probabilité conditionnelle

$p(B/A)$  : probabilité de réalisation de  $B$ , si  $A$  est réalisé.

### 1.2. Axiomes des probabilités (Kolmogorov)

Compte tenu des définitions précédentes :

- .  $0 \leq p(A) \leq 1$
- .  $p(S) = 1$
- . Si  $A \subset S, B \subset S, A \cap B = \emptyset$   $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$
- .  $p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$  que l'on note aussi  $p(A \cap B) / p(A)$

#### Exemples

Lancer d'un dé à 6 faces

$$A = \{2,4,6\}, B = \{1,3,5\} \rightarrow A \cap B = \emptyset, A \cup B = S, p(A) = p(B) = \frac{1}{2}$$

$$A = \{2,4,6\}, B = \{6\} \rightarrow p(B/A) = \frac{1}{3}, p(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

### 1.3. Théorèmes principaux

- .  $p(\emptyset) = 0$
- .  $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$
- .  $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
- . Si  $A \subset B$ ,  $p(A) \leq p(B)$
- .  $p(B / A) = p(B) \Rightarrow A$  et  $B$  indépendants

*Théorème de Bayes*

Soit  $S = \bigcup_{i=1}^m B_i$  (partition de  $S$  :  $B_i \cap B_j = \emptyset$ ,  $\forall i \neq j$  et  $p(B_i) > 0 \forall i$ )

- .  $p(A) = \sum_{i=1}^m p(A / B_i) p(B_i)$
- .  $p(B_j / A) = \frac{p(A / B_j) p(B_j)}{\sum_{i=1}^m p(A / B_i) p(B_i)} \quad 1 \leq j \leq m$

## 2. VARIABLES ALEATOIRES (VA)

### 2.1. Définitions

Considérons un phénomène aléatoire tel que le lancer d'une fléchette sur une cible par un joueur bien défini.

Le résultat d'un essai peut être traduit par un couple de nombres réels (coordonnées  $x$ ,  $y$  du point d'impact). C'est la quantification des événements.

Pour simplifier, considérons d'abord un seul axe de coordonnées, soit  $x$  l'écart par rapport à l'axe médian ( $\equiv$  vertical passant par le centre) de la cible.

Supposons que le joueur effectue  $n$  essais identiques et indépendants.

Concrètement, le terme « identique » signifie que la probabilité d'atteindre une région quelconque donnée de la cible reste identique d'un essai à l'autre (le tireur ne s'améliore pas au cours des essais, mêmes conditions de lancer ...), et l'indépendance suppose que le résultat d'un essai n'influe pas sur les suivants (le tireur ne tient pas compte des résultats précédents pour effectuer d'éventuelles corrections !).

Notons  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  le résultat des  $n$  essais ( $\equiv$  épreuves, réalisations, tirages, expériences ...).

$x_1, x_2, \dots, x_n$  sont des Variables Aléatoires et l'on dit que ce sont des réalisations indépendantes d'une Variable Aléatoire réelle que l'on notera  $X$ .

Les Variables Aléatoires sont susceptibles de constituer des modèles convenables pour divers phénomènes réels.  $X$  n'étant pas, dans notre exemple, à valeurs discrètes, la variable aléatoire est dite continue.

On veillera à ne pas confondre  $X$  qui représente le phénomène aléatoire proprement dit (écart aléatoire du point d'impact, dans cet exemple) avec la réalisation effectivement observée  $x$  lors d'un essai donné.

Une Variable Aléatoire  $X$  est complètement caractérisée si l'on est capable de donner la probabilité d'occurrence d'un événement quelconque défini à partir de  $X$ .

Ainsi, on note :  $p(X \in [a, b])$  la probabilité pour que la Variable Aléatoire  $X$  (ici écart du point d'impact) soit comprise entre les valeurs  $a$  et  $b$ .

**REPRESENTATION NON PARAMETRIQUE**

*Fonction de répartition*

On admettra que la fonction  $F(x)$ , appelée *fonction de répartition* de  $X$ , définit entièrement la variable aléatoire  $X$  :

$$F(x) = p(X \leq x)$$

$F(x)$  est une fonction monotone croissante telle que :  $F(0) = 0$  et  $F(\infty) = 1$ .

On admettra que si  $\{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n\}$  sont les résultats de  $n$  essais indépendants, et si  $n(x)$  est le nombre de réalisations telles que  $x_i \leq x$ , on a :

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(x)}{n}$$

Le rapport  $\frac{n(x)}{n}$  représente la *fréquence relative* de événement considéré ( $X \leq x$ ).

Tant que  $n$  reste fini, les rapports  $\frac{n(x)}{n}$  obtenus lors de plusieurs séries d'expériences distinctes n'ont aucune raison d'être strictement égaux, mais ils convergent tous vers la même valeur lorsque  $n$  tend vers l'infini.

*Densité de probabilité*

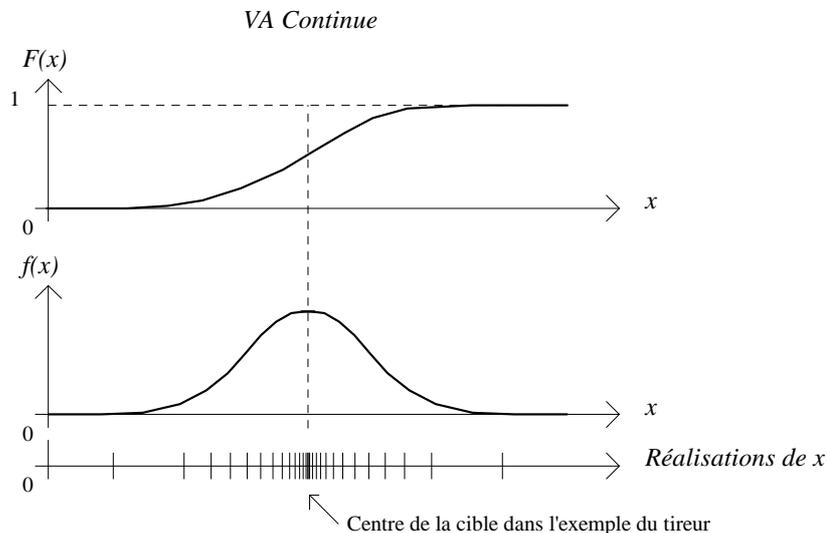
On appelle *densité de probabilité* la dérivée  $f(x)$  de la fonction de répartition  $F(x)$ .

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \qquad \text{« Inversement »} \qquad F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$$

$f(x)$  est une fonction positive dont l'amplitude en chaque point est proportionnelle à la concentration (densité) des réalisations qu'on y observe sur un nombre - à la limite - infini d'expériences (c'est l'*histogramme* des statisticiens).

**V A Continues**

Si  $X$  peut prendre un nombre infini de valeurs (exemple de l'angle par rapport à l'horizontale d'une aiguille lancée au sol),  $X$  est alors une Variable Aléatoire continue: (l'amplitude de  $X$  n'est pas quantifiée)



On établit aisément :

$$p(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(u) du$$

$$p(x \leq X \leq x + dx) = F(x + dx) - F(x) = f(x) dx$$

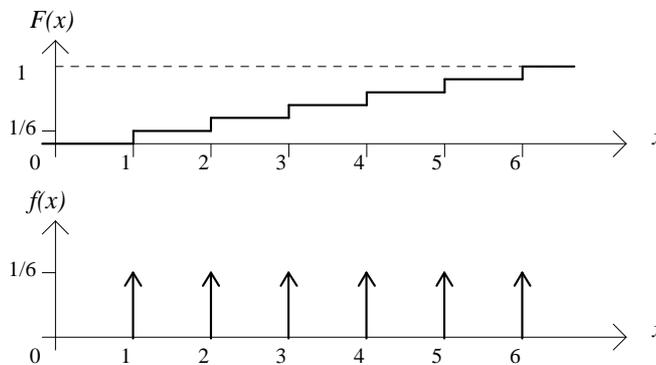
**V A Discrètes**

Si  $X$  ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs  $x_i$  (exemple du dé),  $X$  est alors une Variable Aléatoire discrète (l'amplitude de  $X$  est quantifiée) et, notant  $p(x_i) = p(X = x_i)$ , on a :

$$F(x) = \sum_i p(x_i) \Gamma(x - x_i) \quad \text{avec : } \Gamma(x) : \text{ échelon unité}$$

$$f(x) = \sum_i p(x_i) \delta(x - x_i) \quad \text{avec : } \delta(x) : \text{ delta discret (symbole de kronecker)}$$

VA Discrète - Exemple du lancer d'un dé à 6 faces



De même que la fonction de répartition  $F(x)$ , la densité de probabilité  $f(x)$  définit totalement la VA  $X$  et sa représentation graphique constitue un modèle mathématique *non paramétrique* de  $X$ .

Il est néanmoins intéressant d'établir une *représentation paramétrique* de  $X$  à l'aide de quelques paramètres décrivant les principales propriétés de  $X$ .

**REPRESENTATION PARAMETRIQUE**

**2.2. Moyenne, variance, variable gaussienne (≡ normale)**

*Espérance mathématique*

On conçoit aisément que la *moyenne* peut apporter des informations, peut-être partielles mais néanmoins toujours intéressantes sur la Variable Aléatoire  $X$ .

Considérons par exemple  $n$  réalisations  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  et effectuons la *moyenne*  $\bar{x}$ , ainsi définie :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Ici encore, si  $n$  reste fini, les moyennes relevées sur différentes séries de  $n$  expériences pourront être divergentes, mais si l'on imagine des séries d'une infinité d'expériences, toutes ces moyennes convergent vers une valeur unique.

Soit  $E(X)$  cette valeur, appelée *espérance mathématique*, ou *valeur moyenne* de  $X$ , ou *moment d'ordre 1* :

$$E(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Les notations les plus courantes sont  $E(X)$ , ou  $\bar{x}$ , ou  $\langle x \rangle$ , ou  $m$ , ou encore  $m_x$ .

Il est à noter que l'opérateur  $E(\cdot)$  est un opérateur linéaire.

Dans l'exemple du tireur de fléchettes, les grandeurs  $x_i$  sont relevées par rapport à l'axe médian de la cible.

Si le joueur effectue un tir centré, on a :  $E(X) = 0$ .

On dit alors que la Variable Aléatoire  $X$  est en moyenne nulle, ou qu'elle est une Variable Aléatoire centrée, ce qui ne signifie évidemment pas que  $X$  est toujours nulle.

L'espérance mathématique s'écrit aussi :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad \text{si la VA } X \text{ est continue}$$

$$E(X) = \sum_j x_j p(x_j) \quad \text{si la VA } X \text{ est discrète et prend un nombre fini de valeurs } x_j$$

$$E(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_i \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^n x_i p(x_i)$$

*Variance*

Pour apprécier la dispersion des réalisations autour de la valeur moyenne, on introduit un paramètre statistique appelé *variance*.

La *variance*, ou *moment d'ordre 2*, est l'espérance mathématique du carré des écarts par rapport à la valeur moyenne :

$$v = E[(X - m)^2] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2$$

On a la propriété :

$$v = \overline{x^2} - \bar{x}^2 \quad \text{car} \quad E[(X - m)^2] = E[X^2 - 2mX + m^2] = E[X^2] - 2mE[X] + m^2$$

du fait que l'opérateur  $E(\cdot)$  est linéaire et que  $m$  n'est pas aléatoire :

$$E[m] = m \quad \text{et} \quad E[m^2] = m^2$$

$$\text{d'où : } E[(X - m)^2] = E[X^2] - 2m^2 + m^2 = E[X^2] - m^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$$

On utilise souvent la grandeur  $\sigma = \sqrt{v}$  appelée *écart-type* ou encore *écart moyen* de  $X$ , qui présente l'intérêt d'avoir la même dimension que  $x$ .

En d'autres termes, on est en droit d'attendre une grande concentration de réalisations  $x_i$  dans l'intervalle  $[m - \sigma, m + \sigma]$ .

La *variance* s'écrit aussi :

$$E(X - m)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 f(x) dx \quad \text{si la VA } X \text{ est continue}$$

$$E(X - m)^2 = \sum_j (x_j - m)^2 p(x_j) \quad \text{si la VA } X \text{ est discrète et prend un nombre fini de valeurs } x_j$$

*Moment d'ordre n*

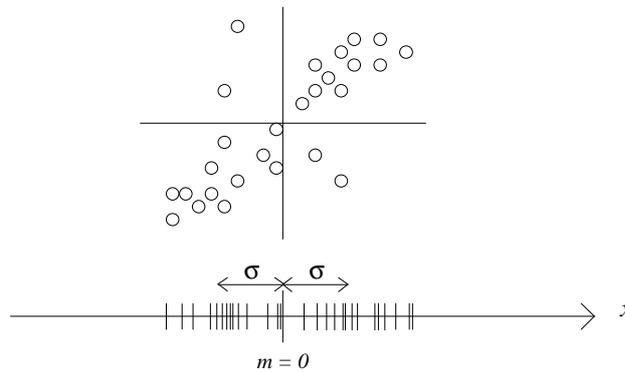
On généralise les paramètres moments d'ordre 1 et d'ordre 2 que sont la moyenne et la variance au moment d'ordre  $n$  :

$$E(X - m)^n = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^n f(x) dx \quad \text{Moment centré d'ordre } n \text{ de la VA } X \text{ continue}$$

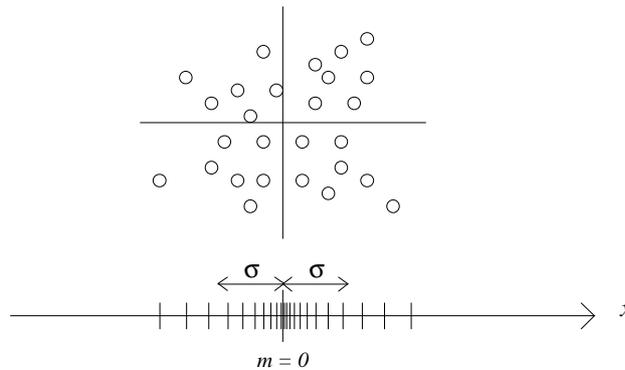
$$E(X - m)^n = \sum_j (x_j - m)^n p(x_j) \quad \text{Moment centré d'ordre } n \text{ de la VA } X \text{ discrète de valeurs } x_j$$

Moyenne et variance, ou moments d'ordre 1 et 2, constituent 2 paramètres statistiques de  $X$  qui, en général, ne suffisent pas à représenter complètement la Variable Aléatoire  $X$ .

En effet, imaginons un joueur affecté d'un défaut peu commun qui consiste à concentrer involontairement ses impacts en 2 points diamétralement opposés de la cible :



Moyenne et variance peuvent être identiques à celles d'un tir « normalement » distribué :



Moyenne et variance ne suffisent donc pas à décrire entièrement une Variable Aléatoire  $X$  quelconque.

Néanmoins, si on se limite à des *Variables Aléatoires* « normales », au sens intuitif du terme, c'est-à-dire concentrées autour de la valeur moyenne avec une probabilité de réalisation d'autant plus faible que l'on s'écarte de cette valeur moyenne (cf. figure ci-dessus), on conçoit que :

**moyenne et variance (ou écart-type) constituent une description suffisante.**

Ceci entraîne la conséquence suivante :

On a vu précédemment que la densité de probabilité  $f(x)$  (ou la fonction de répartition) caractérise totalement la Variable Aléatoire  $X$ .

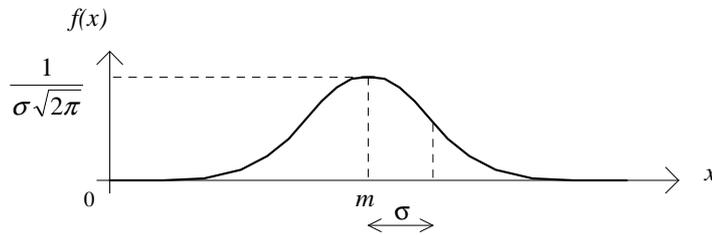
Dans le cas où il est possible de faire l'hypothèse que  $f(x)$  peut être décrit analytiquement par les 2 paramètres  $m$  et  $\sigma$  de moyenne et écart-type, la *représentation paramétrique*  $(m, \sigma)$  pourra avantageusement se substituer au *graphe, non paramétrique*, de  $f(x)$ .

Loi de probabilité

On vient de voir qu'un cas particulièrement important est celui des VA normales ( $\equiv$  gaussiennes) dont la densité de probabilité  $f(x)$  est donnée par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$$

dont le graphe est la célèbre courbe en « cloche » :



Les VA gaussiennes constituent un modèle mathématique convenable pour beaucoup de phénomènes aléatoires réels; en particulier, chaque fois qu'un phénomène peut être considéré comme la résultante d'un grand nombre de causes aléatoires indépendantes, on peut présumer que ce phénomène est gaussien (*théorème central limite*).

On peut retenir le tableau de probabilités suivant :

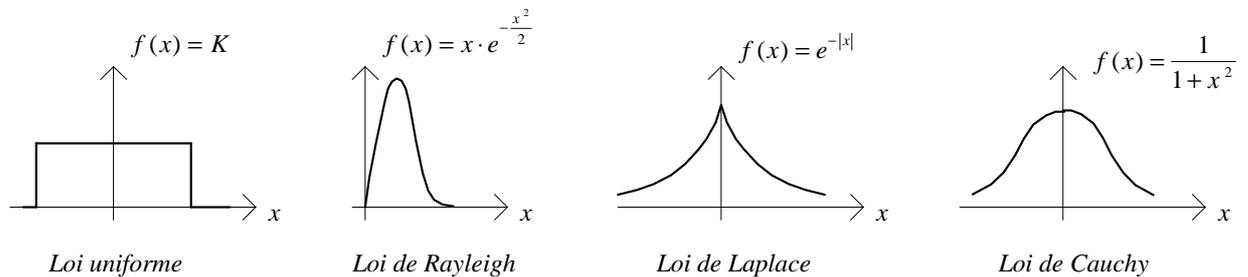
- .  $p(|X - m| > \sigma) = 22 \%$
- .  $p(|X - m| > 2\sigma) = 5 \%$
- .  $p(|X - m| > 3\sigma) = 0.3 \%$
- .  $p(|X - m| > 4\sigma) = 0.0063 \%$

Ces résultats font apparaître que la probabilité pour qu'une réalisation d'une VA gaussienne s'écarte de sa valeur moyenne de plus de 2 ou 3 écarts-types est pratiquement nulle. On dit encore que l'intervalle de confiance à 95 % est égal à  $m \pm 2\sigma$ .

D'une manière générale, pour toute loi de probabilité, on a l'*inégalité de Tchebychev* :

$$p(|X - m| > \lambda) \leq \frac{\sigma^2}{\lambda^2}, \quad \forall \lambda > 0$$

Parmi les principales lois de probabilité, on peut citer aussi les lois de probabilité *uniforme*, de *Rayleigh*, de *Laplace*, ou encore celle de *Cauchy* :



Ces lois de probabilités permettent d'établir un lien entre un phénomène réel et sa modélisation par une VA, lien difficile à établir sauf si l'on imagine la possibilité d'une infinité d'essais.

**2.3. Système de Variables Aléatoires. Covariance**

Si l'on considère à nouveau l'exemple du tir d'une fléchette et si l'on s'intéresse maintenant au système des 2 VA  $X$  et  $Y$  définies par l'abscisse et l'ordonnée du point d'impact par rapport au centre de la cible.

Les résultats d'une série de  $n$  expériences seront alors constitués par un ensemble de couples :

$$\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$$

**REPRESENTATION NON PARAMETRIQUE**

Pour représenter complètement ce systèmes de VA, il faudrait introduire la *fonction de répartition mutuelle* :

$$F(x, y) = p(X \leq x \text{ et } Y \leq y)$$

ou la *densité de probabilité* :

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

**REPRESENTATION PARAMETRIQUE**

Ici encore, on peut avantageusement se limiter à un nombre restreint de paramètres statistiques :

*Moyenne*

$$m_x = E(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (\text{VA } X \text{ discrète}) \quad m_x = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad (\text{VA } X \text{ continue})$$

$$m_y = E(Y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad (\text{VA } Y \text{ discrète}) \quad m_y = E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y) dy \quad (\text{VA } Y \text{ continue})$$

*Variance*

$$v_x = E(X - m_x)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^2 \quad (X \text{ discrète}) \quad v_x = E(X - m_x)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx \quad (X \text{ continue})$$

$$v_y = E(Y - m_y)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - m_y)^2 \quad (Y \text{ discrète}) \quad v_y = E(Y - m_y)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (y - m_y)^2 f(y) dy \quad (Y \text{ continue})$$

Pour caractériser l'interdépendance éventuelle des 2 VA  $X$  et  $Y$ , on introduit le *coefficient de covariance* :

*Coefficient de covariance*

$$c_{xy} = E[(X - m_x)(Y - m_y)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)(y_i - m_y) \quad (X, Y \text{ discrètes})$$

$$c_{xy} = E[(X - m_x)(Y - m_y)] = \iint (x - m_x)(y - m_y) f(x, y) dx dy \quad (X, Y \text{ continues})$$

On a :  $c_{xx} = v_x$

*Propriétés du coefficient de covariance  $c_{xy}$*

Reprenons l'exemple du joueur de fléchettes. A priori, il n'y a aucune raison pour qu'un tir trop haut soit toujours également trop à droite et qu'un tir trop bas soit toujours trop à gauche (ou l'inverse).

Les produits  $(x_i - m_x)$  et  $(y_i - m_y)$  seront donc tantôt positifs, tantôt négatifs, et leur moyenne sera nulle, entraînant ainsi un coefficient de covariance  $c_{xy}$  nul.

Par contre, si le tir était concentré sur une diagonale, il apparaîtrait un coefficient  $c_{xy}$  non nul traduisant une certaine corrélation entre les VA  $X$  et  $Y$ .

*Coefficient de corrélation*

On définit un paramètre sans dimension voisin du coefficient de covariance appelé *coefficient de corrélation* de 2 VA  $X$  et  $Y$  et donné par :

$$\rho_{xy} = \frac{c_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

Considérons les 2 cas extrêmes :

- les VA  $X$  et  $Y$  sont *indépendantes* :  $\rho_{xy} = 0$
- les VA  $X$  et  $Y$  sont *entièrement dépendantes* :

Par exemple, tous les impacts se retrouveraient sur la même droite  $y = ax$ .

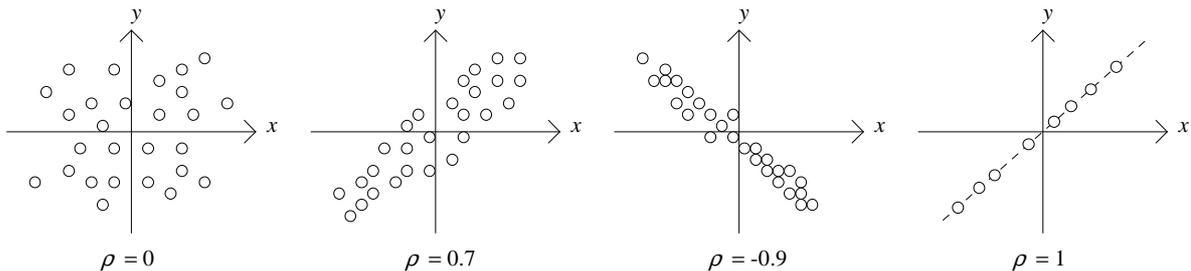
Si on suppose les moyennes  $m_x$  et  $m_y$  nulles, on a :

$$c_{xy} = E(XY) = aE(X^2) = av_x \quad \text{et} \quad v_y = E(Y^2) = a^2E(X^2) = a^2v_x \quad \text{d'où :}$$

$$\rho_{xy} = \frac{av_x}{\sqrt{a^2v_x}\sqrt{v_x}} = \frac{a}{\sqrt{a^2}} = \pm 1 \quad (\pm \text{ selon le signe de } a) \quad \text{soit :} \quad |\rho_{xy}| = 1.$$

Dans les cas intermédiaires, on a plus généralement :  $-1 \leq \rho_{xy} \leq 1$ .

$|\rho_{xy}|$  sera d'autant plus proche de 1 que les réalisations de  $(X, Y)$  seront plus concentrées autour d'une droite déterminée :



Ici encore, on admettra que les paramètres  $m_x$ ,  $m_y$ ,  $v_x$ ,  $v_y$  et  $c_{xy}$  constituent une description suffisante d'un couple de VA  $(X, Y)$ . (Ce sont les moments d'ordre 1 et 2 du couple de VA  $(X, Y)$  et ils constituent d'ailleurs une description complète dans le cas d'un couple gaussien).

*Combinaison linéaire de Variables Aléatoires*

Il est à noter que si l'on définit une nouvelle VA comme une combinaison linéaire de VA données, les moments du 1er et du 2nd ordre de la nouvelle VA sont fonction seulement des moments du 1er et du 2nd ordre des VA données.

Ceci justifie le fait que moyenne et variance-covariance constituent une représentation suffisante pour une majorité de VA.

Par exemple, si l'on définit la VA  $Z$  comme fonction linéaire des VA  $X$  et  $Y$ , soit :  $Z = aX + bY + d$  (ce qui signifie que si  $\{(x_1, y_1), \dots, (x_i, y_i), \dots\}$  constitue un ensemble de réalisations du couple  $(X, Y)$ , les réalisations  $\{z_1, \dots, z_i, \dots\}$  de la VA  $Z$  sont égales à :  $z_i = ax_i + by_i + d$ )

les moyenne et variance  $m_z$  et  $v_z$  de  $Z$  se calculent à partir des moments du 1er et du 2nd ordre de  $X$  et  $Y$ , quelle que soit la fonction de répartition  $F(x, y)$ .

La moyenne  $m_z$  de la VA  $Z$  est donnée par :

$$m_z = E(Z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n y_i + nd \right) \rightarrow \boxed{m_z = am_x + bm_y + d}$$

La variance  $v_z$  de la VA  $Z$  s'écrit :

$$v_z = E[(Z - m_z)^2] = E\left[\{a(X - m_x) + b(Y - m_y)\}^2\right] = E\left[a^2(X - m_x)^2 + b^2(Y - m_y)^2 + 2ab(X - m_x)(Y - m_y)\right]$$

$$\rightarrow \boxed{v_z = a^2v_x + b^2v_y + 2abc_{xy}}$$

*Système de Variables Aléatoires*

On peut généraliser ces résultats au cas d'un système d'un nombre quelconque de VA.

Soit  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  un système de  $n$  VA. On note vectoriellement :

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{bmatrix}$$

On définit le vecteur *valeur moyenne* :

$$\mathbf{m}_x = E(\mathbf{X}) = E \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(X_1) \\ E(X_2) \\ \dots \\ E(X_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{x_1} \\ m_{x_2} \\ \dots \\ m_{x_n} \end{bmatrix}$$

et on introduit la notation destinée à alléger les écritures :

$$\mathbf{X}^0 = \mathbf{X} - \mathbf{m}_x \qquad X_i^0 = X_i - m_{x_i}$$

La variance et la covariance des différentes composantes de  $\mathbf{X}$  peuvent être réunies en une matrice dite *matrice des variances-covariances* :

$$\mathbf{C}_{xx} = \begin{bmatrix} v_{x_1} & c_{x_1x_2} & \dots & c_{x_1x_n} \\ c_{x_2x_1} & v_{x_2} & \dots & c_{x_2x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{x_nx_1} & c_{x_nx_2} & \dots & v_{x_n} \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{C}_{xx} = \begin{bmatrix} X_1^{0^2} & X_1^0 X_2^0 & \dots & X_1^0 X_n^0 \\ X_2^0 X_1^0 & X_2^{0^2} & \dots & X_2^0 X_n^0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_n^0 X_1^0 & X_n^0 X_2^0 & \dots & X_n^{0^2} \end{bmatrix} = E \left( \begin{bmatrix} X_1^0 \\ X_2^0 \\ \dots \\ X_n^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1^0 & X_2^0 & \dots & X_n^0 \end{bmatrix} \right)$$

soit :  $\boxed{\mathbf{C}_{xx} = E(\mathbf{X}^0 \mathbf{X}^{0T})}$

$\mathbf{m}_x$  et  $\mathbf{C}_{xx}$  sont les moments d'ordre 1 et 2 du Vecteur Aléatoire  $\mathbf{X}$ .

*Combinaison linéaire de Vecteurs Aléatoires*

On peut alors généraliser le calcul des moments d'ordre 1 et 2 d'une fonction linéaire de Variables Aléatoires.

Soit le Vecteur Aléatoire combinaison linéaire :  $\mathbf{Y} = \mathbf{A}^T \mathbf{X} + \mathbf{b}$

Le calcul de  $\mathbf{m}_y$  et  $\mathbf{C}_{yy}$  connaissant  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{m}_x$  et  $\mathbf{C}_{xx}$  conduit à :

$$\mathbf{m}_y = E(\mathbf{Y}) = E(\mathbf{A}^T \mathbf{X} + \mathbf{b}) = \mathbf{A}^T E(\mathbf{X}) + \mathbf{b} \quad \rightarrow \quad \boxed{\mathbf{m}_y = \mathbf{A}^T \mathbf{m}_x + \mathbf{b}}$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}^0 &= \mathbf{A}^T (\mathbf{X} - \mathbf{m}_x) = \mathbf{A}^T \mathbf{X}^0 \rightarrow \mathbf{C}_{yy} = E(\mathbf{Y}^0 \mathbf{Y}^{0T}) = E(\mathbf{A}^T \mathbf{X}^0 \mathbf{X}^{0T} \mathbf{A}) = \mathbf{A}^T E(\mathbf{X}^0 \mathbf{X}^{0T}) \mathbf{A} \\ &\rightarrow \quad \boxed{\mathbf{C}_{yy} = \mathbf{A}^T \mathbf{C}_{xx} \mathbf{A}} \end{aligned}$$

Cette relation illustre une propriété générale des matrices des variances-covariances :

Soit une Variable aléatoire scalaire combinaison linéaire :

$$Y = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n \quad \rightarrow \quad Y = [a_1, a_2, \dots, a_n] \mathbf{X} = \mathbf{a}^T \mathbf{X}$$

La variance de  $Y$  s'écrit :

$$v_y = \mathbf{C}_{yy} = [a_1, a_2, \dots, a_n] \mathbf{C}_{xx} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \mathbf{a}^T \mathbf{C}_{xx} \mathbf{a}$$

Comme  $v_x$  est non négatif quels que soient les coefficients  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , il en résulte qu'une matrice de variance-covariance est toujours définie non négative (elle est également par définition même).

Considérons alors une matrice de variance-covariance de dimension 2 :

$$\begin{bmatrix} v_{x_1} & c_{x_1 x_2} \\ c_{x_2 x_1} & v_{x_2} \end{bmatrix}$$

Cette matrice étant non négative, son déterminant est positif ou nul :  $v_{x_1} v_{x_2} - c_{x_1 x_2} c_{x_2 x_1} = v_{x_1} v_{x_2} - c_{x_1 x_2}^2 \geq 0$

$$\rightarrow \rho_{x_1 x_2}^2 = \frac{c_{x_1 x_2}^2}{v_{x_1} v_{x_2}} \leq 1. \quad \text{On retrouve le fait qu'un coefficient de corrélation est toujours } \leq 1 \text{ en valeur absolue.}$$

3. SIGNAUX ALEATOIRES

3.1. Caractéristiques statistiques

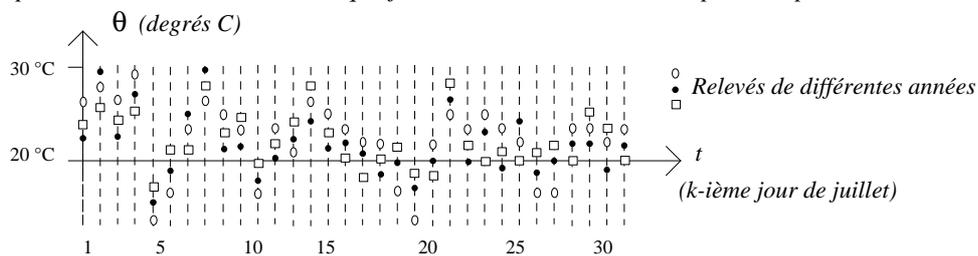
Dans les exemples de signaux aléatoires donnés en introduction (§ 0.), on a représenté des fonctions  $x(t)$  dont chacune n'est en fait qu'une réalisation particulière, notée  $x_i(t)$  d'un processus aléatoire  $X(t)$ .

(On utilise la notation  $x_i(t)$  même si précédemment elle a indiqué une valeur discrète de  $x(t)$  et ici une réalisation particulière).

En supposant qu'il soit possible de répéter chaque expérience une infinité de fois dans les mêmes conditions, on obtiendrait une infinité de réalisations  $x_i(t)$  qui permettraient de déduire toutes les caractéristiques statistiques du processus aléatoire  $X(t)$ .

Ainsi, le relevé des températures sous abri chaque jour à midi en un lieu donné pour un grand nombre de mois de juillet permet d'obtenir la moyenne journalière et sa dispersion (variance) ainsi que les covariances qui fournissent des informations sur l'évolution probable des températures d'une journée à l'autre.

Température sous abri relevée chaque jour à midi en un lieu donné pendant plusieurs mois de juillet



Processus aléatoire

Processus aléatoire à Temps Discret

En effet, si on note  $t_k$  le  $k$ -ième jour de juillet, et  $X(t_k)$  la Variable Aléatoire que constitue la température du  $k$ -ième jour de juillet, on est ainsi en présence d'un processus aléatoire à Temps Discret, c'est-à-dire un système de  $n = 31$  Variables Aléatoires  $\{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)\}$  pour lequel on peut définir :

- . les moyennes de  $X(t_k)$  :  $m(t_k) = E[X(t_k)] \quad k = 1, \dots, n$
- . les covariance de  $X(t_k)$  :  $c(t_k, t_m) = E[X^0(t_k)X^0(t_m)] \quad k = 1, \dots, n \quad m = 1, \dots, n$
- . les variances de  $X(t_k)$  :  $c(t_k, t_k) = E[X^{0^2}(t_k)] = v(t_k) = \sigma^2(t_k) \quad k = 1, \dots, n$

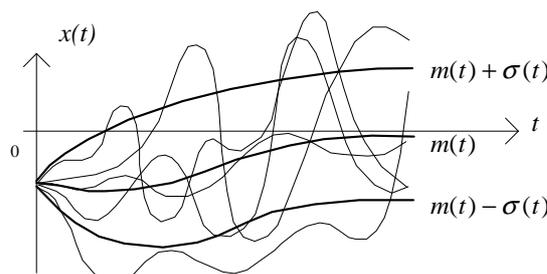
Processus aléatoire à Temps Continu

Pour les signaux aléatoires à Temps Continu,  $t_k$  prend une infinité de valeurs et on a alors :

- . la moyenne de  $X(t)$  :  $m(t) = E[X(t)]$
- . la covariance de  $X(t)$  :  $c(t, \tau) = E[X^0(t)X^0(\tau)]$
- . la variance de  $X(t)$  :  $c(t, t) = E[X^{0^2}(t)] = v(t) = \sigma^2(t) \quad (\equiv \text{covariance pour } \tau = t)$

La fonction aléatoire  $X(t)$  est donc définie par la connaissance de la fonction valeur moyenne  $m(t)$  et par celle de la fonction de covariance  $c(t, \tau)$  pour toutes les valeurs de  $t$  et  $\tau$ .

La fonction de covariance  $c(t, \tau)$  renseigne sur la vitesse de variation du signal.



Les fonctions  $m(t) \pm \sigma(t)$  (valeur moyenne  $\pm$  écart-type) sont intéressantes car c'est entre ces 2 fonctions que l'on est en droit d'attendre la plus grande concentration de réalisations  $x_i(t)$ .

La 3ème caractéristique statistique de covariance  $c(t, \tau)$  est plus difficile à visualiser en tant que fonction de 2 variables, sauf si, comme c'est souvent le cas, on est en présence de phénomènes stationnaires auquel cas la covariance est seulement fonction d'une variable  $c(t, \tau) = c(t)$ .

**3.2. Stationnarité**

*Un processus aléatoire est stationnaire si ses caractéristiques statistiques sont indépendantes de l'origine des temps.*

La conséquence de cette définition est que :

*Processus aléatoire stationnaire à Temps Discret*

. les moyennes de  $X(t_k)$  :  $m(t_k) = E[X(t_k)]$  deviennent :  
 $m = E[X(t_k)] = E[X(t_m)] = C^{te}$

. les covariances de  $X(t_k)$  :  $c(t_k, t_m) = E[X^0(t_k)X^0(t_m)]$  deviennent :  
 $c(t_k, t_m) = c(t_k - t, t_m - t) \quad \forall t$ . En particulier, pour  $t = t_k$ , d'où :  
 $c(t_k, t_m) = c(0, t_m - t_k) = c(0, \tau)$  en posant  $\tau = t_m - t_k$

On note alors la fonction de covariance  $c(0, \tau)$  devenue d'une seule variable par  $\varphi(\tau) = c(0, \tau)$   $\varphi(\tau)$  est appelée *fonction de corrélation* :

*Fonction de corrélation*

$$\varphi(\tau) = E[X^0(t_p)X^0(t_p + \tau)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^0(t_p)x_i^0(t_p + \tau) \quad \forall t_p \quad (n \text{ réalisations})$$

. En toute rigueur, cette dénomination ne devrait s'appliquer qu'à la fonction :

$$\rho(\tau) = \frac{\varphi(\tau)}{\varphi(0)}$$

déjà rencontrée (§ 2.3.) sous forme de coefficient de corrélation de 2 Variables Aléatoires.

L'usage est néanmoins d'appeler fonction de corrélation aussi bien  $\varphi(\tau)$  que  $\rho(\tau)$ .

*Processus aléatoire stationnaire à Temps Continu*

. la moyenne de  $X(t)$  :  $m(t) = E[X(t)]$  devient :  $m = E[X(t)] = C^{te}$

. la covariance de  $X(t)$  :  $c(t, \theta) = E[X^0(t)X^0(\theta)]$  devient  $\varphi(\tau) = c(0, \tau)$  en posant  $\tau = \theta - t$  :

*Fonction de corrélation*

$$\varphi(\tau) = E[X^0(t)X^0(t + \tau)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^0(t)x^0(t + \tau)dt$$

*Propriétés de la fonction de corrélation  $\varphi(\tau)$*

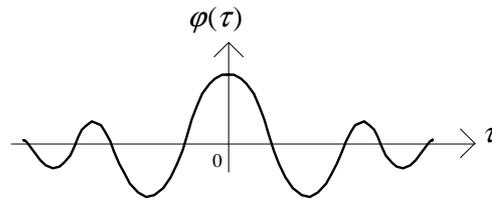
.  $\varphi(0) = v$  : variance du signal

.  $\varphi(\tau) = \varphi(-\tau)$  : la fonction de corrélation est paire. En effet :  $\varphi(-\tau) = E[X^0(t)X^0(t - \tau)]$   
 ou, en posant  $t - \tau = t'$  :  $\varphi(-\tau) = E[X^0(t' + \tau)X^0(t')] = \varphi(\tau)$ .

. Si  $X(t)$  est indépendant de  $X(t + \tau)$  lorsque  $\tau \rightarrow \infty$ , alors  $\varphi(\tau) \rightarrow 0$  lorsque  $\tau \rightarrow \infty$ .

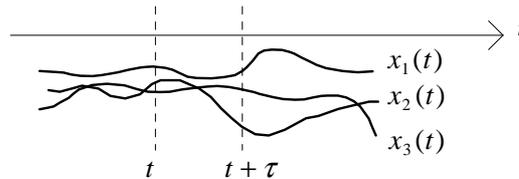
.  $|\varphi(\tau)| \leq \varphi(0)$  : ceci vient du fait que le coefficient de corrélation  $\rho(\tau)$  est, en valeur absolue,  $\leq 1$ .

Compte tenu de ces remarques, une allure typique pour une fonction de corrélation est la suivante :

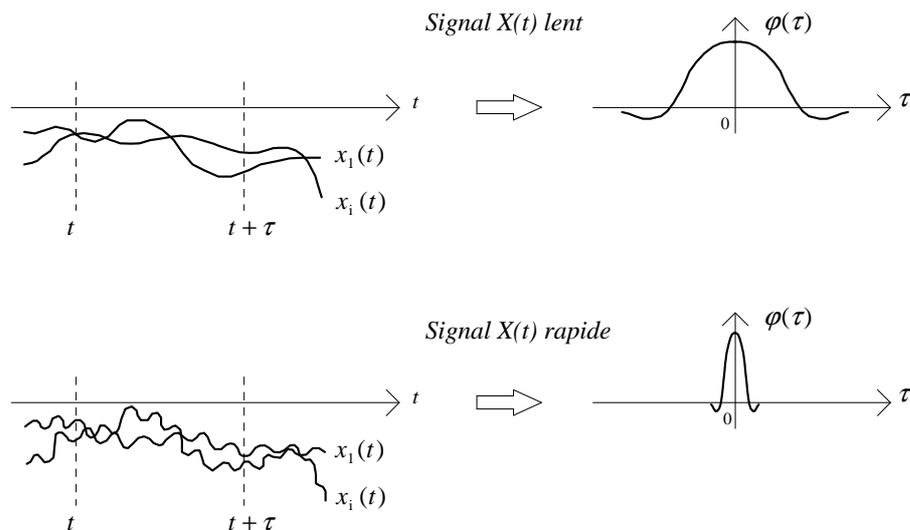


Relations entre la fonction de corrélation  $\varphi(\tau)$  et la rapidité du signal

Considérons diverses réalisations  $x_i(t)$  d'un signal aléatoire  $X(t)$  et 2 instants  $t$  et  $t + \tau$  :



Il apparaît ainsi que, pour un même intervalle de temps  $\tau$ , la fonction de corrélation  $\varphi(\tau)$  décroît d'autant plus rapidement que le signal  $X(t)$  est rapide, du fait d'une corrélation moins importante entre les réalisations aux 2 instants  $t$  et  $t + \tau$  (un signal rapide « voit » un  $\tau$  grand) :



### 3.3. Ergodicité

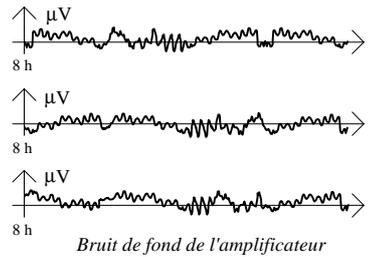
Jusqu'ici, nous avons défini par ce qu'on appelle des *moyennes statistiques* ( $\equiv$  *moyennes d'ensemble*, *moyennes dans l'espace*). La détermination expérimentale des caractéristiques statistiques doit être faite par des moyennes sur un nombre à la limite infini de réalisations indépendantes.

Cependant, si on considère une seule réalisation, il peut se faire qu'on puisse admettre que les différentes portions de ce signal sont indépendantes, et qu'on puisse ainsi obtenir les valeurs moyennes statistiques par des *moyennes dans le temps* effectuées sur un seul échantillon de réalisation dont la durée serait à la limite infiniment grande. L'*ergodicité* représente la propriété d'égalité entre *moyennes statistique* et *temporelle*.

L'ergodicité est une propriété intéressante car les caractéristiques d'un processus aléatoire s'obtiennent à partir d'une seule expérience, de durée suffisamment grande, au lieu d'exiger la connaissance d'un très grand nombre d'échantillons.

*Exemple : Bruit de fond d'un amplificateur dans une enceinte à 25 °C avec entrée court-circuitée*

En négligeant le vieillissement des composants de l'amplificateur, on peut faire l'hypothèse de stationnarité. Soit l'expérience qui consiste mettre l'amplificateur sous tension chaque matin à 8 h :



Négligeons le temps d'échauffement de l'amplificateur et supposons que le bruit de fond soit suffisamment rapide pour qu'une durée d'observation de quelques heures puisse être considérée comme infinie.

On peut alors penser qu'il n'y a pas de raison pour que les moyennes temporelles effectuées un jour donné soient différentes des moyennes statistiques ( $\equiv$  moyennes d'ensemble) effectuées sur les tensions relevées à des heures déterminées un grand nombre de jours différents. Ceci constitue l'hypothèse d'ergodicité.

En revanche, si au lieu de considérer le bruit de fond pour un amplificateur donné à des jours différents, on envisage le bruit de fond pour un ensemble d'amplificateurs, on a alors une série d'essais qui ne satisfont pas l'ergodicité, car des amplificateurs même identiques ont leurs composants qui présentent une certaine dispersion de leurs caractéristiques.

En faisant alors une moyenne temporelle sur le bruit de fond observé pour un amplificateur donné, on ne retrouvera pas la moyenne statistique de l'ensemble des amplificateurs, même avec une très grande durée d'observation.

*Moyenne d'un processus aléatoire  $X(t)$  stationnaire ergodique*

Si un processus  $X(t)$  est stationnaire et ergodique, on obtient sa valeur moyenne  $m = E[X(t)]$ , indifféremment à partir de  $n$  réalisations, ou à partir d'une réalisation particulière (de par l'ergodicité)  $x(t)$  (processus à Temps Continu) ( $x(t_k)$  (processus à Temps Discret)) par les 2 expressions suivantes : (la stationnarité fait que  $m(t) = C^{te} = m$  et l'ergodicité autorise indifféremment les 2 expressions de  $m$  )

*Processus  $X(t)$  (discret ou continu, donc de réalisations  $x_i$  quantifiées ou non) à TD*

$$m = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_i(t_k) \quad \forall i \quad (\text{moyenne temporelle sur } n \text{ instants sur 1 seule réalisation } i)$$

$$m = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k(t_m) \quad \forall m \quad (\text{moyenne statistique sur } n \text{ réalisations à un instant } t_m \text{ donné})$$

*Processus  $X(t)$  (discret ou continu, donc de réalisations  $x_i$  quantifiées ou non) à TC*

$$m = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_i(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_i(t) dt \quad \forall i \quad (\text{moyenne temporelle sur 1 seule réalisation } i)$$

$$m = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k(t) \quad \forall t \quad (\text{moyenne statistique sur } n \text{ réalisations à un instant } t \text{ donné})$$

*Fonction de corrélation d'un processus aléatoire  $X(t)$  stationnaire ergodique*

$\varphi(\tau) = E[X^0(t)X^0(t + \tau)]$  est obtenue par :

(la stationnarité fait que  $c(t, \theta) = \varphi(\tau)$  et l'ergodicité autorise indifféremment les 2 expressions de  $\varphi(\tau)$  ):

*Processus  $X(t)$  (discret ou continu, donc de réalisations  $x_i$  quantifiées ou non) à TD*

$$\varphi(\tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_i^0(t_k)x_i^0(t_k + \tau) \quad \forall i \quad (\text{somme temporelle sur } n \text{ instants sur 1 seule réalisation } i)$$

$$\varphi(\tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^0(t_m)x_k^0(t_m + \tau) \quad \forall m \quad (\text{somme statistique sur } n \text{ réalisations à un instant } t_m)$$

*Processus  $X(t)$  (discret ou continu, donc de réalisations  $x_i$  quantifiées ou non) à TC*

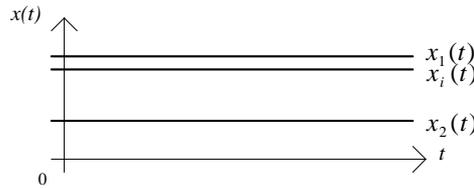
$$\varphi(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_i^0(t)x_i^0(t + \tau) dt \quad \forall i \quad (\text{somme temporelle sur 1 seule réalisation } i)$$

$$\varphi(\tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^0(t)x_k^0(t + \tau) \quad \forall t \quad (\text{somme statistique sur } n \text{ réalisations à un instant } t)$$

*Stationnarité et ergodicité*

La stationnarité et l'ergodicité sont deux propriétés qui ne s'impliquent pas l'une l'autre.

Par exemple, une constante aléatoire est un signal stationnaire non ergodique :



La stationnarité de ce processus va de soi, mais ce signal n'est pas ergodique car la connaissance d'une réalisation particulière  $x(t)$  même depuis  $t = -\infty$  jusqu'à  $t = +\infty$  ne permet en aucune façon d'en déduire la valeur moyenne :

$$m = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(t)$$

Inversement, on va voir (§ 3.4.) qu'un *processus de Wiener* est ergodique mais non stationnaire.

Néanmoins, on souhaitera généralement avoir simultanément les 2 propriétés de stationnarité et d'ergodicité.

Sous ces 2 hypothèses, un processus aléatoire est suffisamment défini par sa valeur moyenne  $m$  et sa fonction d'autocorrélation  $\varphi(\tau)$ .

Sauf indication contraire, on supposera toujours par la suite que les processus considérés sont stationnaires et ergodiques.

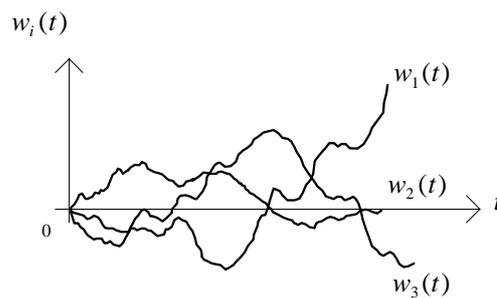
**3.4. Signaux fondamentaux : bruit de Wiener et bruit blanc**

Le bruit de Wiener et le bruit blanc sont aux signaux aléatoires ce que sont l'échelon et l'impulsion de Dirac aux signaux déterministes.

**3.4.1. Signal de Wiener**

Le signal de Wiener  $W(t)$  constitue le modèle mathématique de nombreux phénomènes aléatoires réels dont le plus caractéristique est le mouvement Brownien ( $\equiv$  mouvement d'une particule dans un fluide homogène sous la seule influence de l'agitation thermique).

Si l'on considère le mouvement selon un seul axe, en prenant pour origine le point de départ de la particule, diverses réalisations du mouvement prennent les allures suivantes :



Les relations suivantes constituent la définition mathématique du signal de Wiener  $W(t)$  dont le paramètre  $Q$  constitue le paramètre statistique :

- La particule n'ayant pas plus de raison de se diriger dans le sens positif que négatif, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w_i(t) = 0 \quad \text{soit :} \quad \boxed{m(t) = E(W(t)) = 0} \quad (1)$$

- Les impulsions reçues pendant un intervalle de temps  $(t, t + \theta)$  sont complètement indépendantes des impulsions reçues pendant un autre intervalle. Ceci se traduit par l'indépendance des accroissements :

$$E[(W(t_2) - W(t_1))(W(t_4) - W(t_3))] = 0 \quad \text{si } t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4 \quad (2)$$

- La stationnarité des accroissements indique que la variance d'un accroissement de  $W(t)$  pendant un intervalle de temps  $\theta$  n'est fonction que de  $\theta$  :

$$E[(W(t + \theta) - W(t))^2] = Q(\theta) \quad (3)$$

- Du fait que  $W(0) = 0$ , on peut écrire :

$$W(n\theta) = [W(\theta) - W(0)] + [W(2\theta) - W(\theta)] + \dots + [W(n\theta) - W((n-1)\theta)]$$

les accroissements étant indépendants, la variance de la somme est égale à la somme des variances :

$$E(W^2(n\theta)) = nQ(\theta) \quad \text{ou encore, en écrivant } t = n\theta : E(W^2(t)) = t \frac{Q(\theta)}{\theta} \quad \text{soit en notant}$$

$$Q = \frac{Q(\theta)}{\theta} : \quad E(W^2(t)) = tQ \quad (4)$$

Au regard de sa variance fonction de  $t$ , on observe que le processus de Wiener  $W(t)$  est non stationnaire.

Calculons sa fonction de covariance  $c(t, \tau) = E(W(t)W(\tau))$  :

En se plaçant dans le cas  $t < \tau$ , on a du fait que  $W(0) = 0$  :

$$c(t, \tau) = E\{[W(t) - W(0)][W(\tau) - W(0) - (W(\tau) - W(t))]\} \quad \text{qui donne, puisque les}$$

accroissements  $W(t) - W(0)$  et  $W(\tau) - W(t)$  sont indépendants :  $c(t, \tau) = E(W^2(t)) = tQ$ .

$$\text{Dans le cas général, on a donc : } \quad c(t, \tau) = Q \text{ Inf}(t, \tau) \quad (5)$$

Bien que non stationnaire, le processus de Wiener  $W(t)$  est ergodique car on peut obtenir son paramètre caractéristique  $Q$  en faisant une moyenne dans le temps :

$$Q = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{\theta} (w(t + \theta) - w(t))^2 dt \quad \text{où } w(t) \text{ représente une réalisation particulière de } W(t).$$

### 3.4.2. Séquence indépendante. Bruit blanc

*Séquence indépendante - Bruit Blanc à Temps Discret*

Un processus aléatoire discret fondamental est le processus « séquence indépendante unitaire » ou *Bruit Blanc à Temps Discret*, noté  $\{\Delta_n\}$  et défini par les propriétés :

*Moyenne*

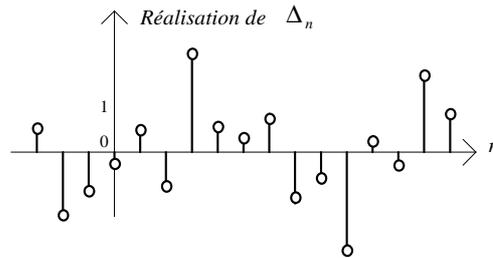
$$\text{Elle est nulle (signal centré) : } \quad E(\Delta_n) = 0$$

*Variance*

$$\text{Elle est unitaire : } \quad E(\Delta_n^2) = 1$$

*Fonction d'autocorrélation*

$$\text{Elle est nulle } \forall n \neq m : \quad E(\Delta_m \Delta_n) = \delta_{m,n} \quad \equiv (E(\Delta_m \Delta_n) = 0 \quad \forall n \neq m)$$



*Bruit Blanc*

Le *Bruit Blanc* est en quelque sorte la source élémentaire de hasard pour les processus à Temps Continu.

Le terme *Bruit Blanc* a été choisi par analogie avec celui de lumière blanche pour exprimer que toutes les fréquences y sont représentées avec la même puissance, comme pour les sept couleurs fondamentales (rouge, orange, jaune, vert, bleu, indigo, violet) composant la lumière blanche.

On définit le *Bruit Blanc* unitaire  $B(t)$  comme un signal stationnaire centré ( $\equiv$  de moyenne  $E(B(t))$  nulle) dont la fonction d'autocorrélation  $\varphi_{bb}(\tau)$  est une impulsion de Dirac :

$$E(B(t)) = 0$$

$$\varphi_{bb}(\tau) = E[B(t) B(t + \tau)] = \delta(\tau)$$

Il en résulte que la variance du *Bruit Blanc* est infinie :  $v = E[B^2(t)] = \delta(0) = \infty$

Le *Bruit Blanc* constitue donc une idéalisation d'un signal réel.

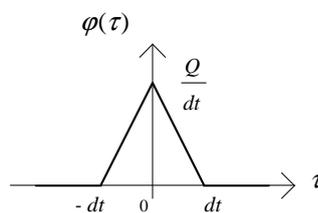
De même qu'on a pu définir, pour les signaux déterministes, l'impulsion de Dirac comme la dérivée de l'échelon unité, on peut exprimer le *Bruit Blanc* comme la dérivée du processus de Wiener  $W(t)$ .

En effet, soit le signal :  $D(t) = \frac{W(t + dt) - W(t)}{dt}$ .

Comme  $E(W(t)) = 0$ , on a  $E(D(t)) = 0$ .

Le calcul de la fonction de corrélation  $\varphi(\tau) = E[D(t) D(t + \tau)]$  est immédiat d'après (2) et (5) :

$$\varphi(\tau) = \frac{Q}{dt} \left( 1 - \frac{|\tau|}{dt} \right) \text{ pour } |\tau| < dt \quad \text{et :} \quad \varphi(\tau) = 0 \text{ pour } |\tau| > dt$$



Quand  $dt \rightarrow 0$ ,  $\varphi(\tau) \rightarrow Q\delta(\tau)$  et  $D(t) \rightarrow \dot{W}(t)$ , ce qui traduit le fait que le *Bruit Blanc*  $B(t)$  est la dérivée du bruit de Wiener  $W(t)$ .

4. SPECTRES

On a déjà établi la notion de spectre (≡ décomposition en fréquence) d'un signal lors du chapitre sur les Représentations Fréquentielles des signaux.

Notamment, à l'aide des relations de Parseval entre les Représentation Temporelle et Fréquentielle de Fourier :

- pour un signal déterministe périodique  $x(t)$  de période  $T$ , on a exprimé la puissance moyenne:

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot \overline{x(t)} \cdot dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)|^2 \cdot dt \quad \text{à l'aide du Th. de Parseval:} \quad P = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k|^2$$

où  $\{X_k\}$  représente la suite des coefficients de Fourier de  $x(t)$ .

Comme  $P$  exprime une puissance,  $|X_k|^2$  constitue un spectre de puissance et est appelé *Densité Spectrale de Puissance (DSP)* du signal  $x(t)$ .

- pour un signal déterministe non périodique  $x(t)$  de carré sommable ( $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$ ), on a exprimé l'énergie:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \quad \text{à l'aide du Th. de Parseval:} \quad E = \int_{-\infty}^{\infty} |X(\nu)|^2 d\nu \quad (= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega) \quad (\omega = 2\pi\nu)$$

où  $X(\nu)$  représente la Transformée de Fourier (TF) de  $x(t)$ .

Comme  $E$  exprime une énergie,  $|X(\nu)|^2$  constitue un spectre d'énergie et est appelé *Densité Spectrale d'Énergie (DSE)* du signal  $x(t)$ .

4.1. Cas d'un signal aléatoire

On vient de voir que si l'énergie d'un signal est finie, celui-ci possède un spectre d'énergie (DSE). S'il n'en est pas ainsi, il faut diviser l'énergie par le temps et exprimer la puissance du signal, qui aura donc un spectre de puissance (DSP).

C'est le cas des signaux aléatoires stationnaires ergodiques pour lesquels on a en général :

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \infty$$

Dans ces conditions, on définit la *puissance* :

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt \quad \text{si } x(t) \text{ est réel.}$$

Cette relation exprime également la *variance*  $V$  du signal (du fait de l'ergodicité) :  $V = P$ .

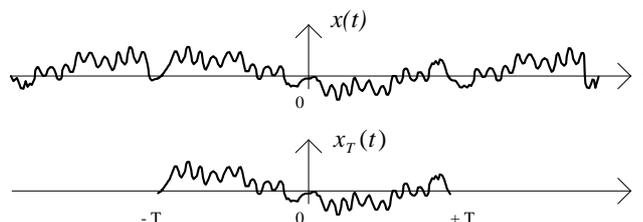
Le théorème de Wiener-Khinchine permet de calculer la DSP d'un signal aléatoire stationnaire ergodique.

4.2. Densité Spectrale de Puissance d'un signal aléatoire stationnaire ergodique - Th. de Wiener-Khinchine

La démonstration procède sur une restriction d'un signal aléatoire dont la Densité Spectrale est connue par :

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(\nu)|^2 d\nu = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \quad (6) \quad (x(t) \text{ réel}).$$

Soit une réalisation  $x(t)$  d'un signal aléatoire stationnaire ergodique, et sa restriction  $x_T(t)$  sur l'intervalle  $[-T, +T]$  dont la Transformée de Fourier (de variable  $\omega = 2\pi\nu$  et non de variable  $\nu$ ) est notée  $X_T(\omega)$  :



D'après (6), on a :

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_T^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2T} |X_T(\omega)|^2 d\omega \quad \text{et, à la limite,}$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_T^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |X_T(\omega)|^2 d\omega \stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega \quad (7)$$

Calculons  $S(\omega)$  :

On a :  $X_T(\omega) = \int_{-T}^T x_T(t) e^{-i\omega t} dt$  ( $X_T(\omega)$  est la *TF* (de variable  $\omega = 2\pi\nu$ ) de  $x_T(t)$ )

$$|X_T(\omega)|^2 = X_T(\omega) \cdot \bar{X}_T(\omega) = \int_{-T}^T \int_{-T}^T x_T(t_1) e^{-i\omega t_1} x_T(t_2) e^{+i\omega t_2} dt_1 dt_2 \quad \text{et d'après (7)}$$

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{-T}^T x_T(t_1) x_T(t_2) e^{-i\omega(t_1-t_2)} dt_1 dt_2 \quad \text{soit, en posant } t = t_1 \text{ et } \tau = t_1 - t_2 :$$

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T+1}^{T+1} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_T(t) x_T(t-\tau) dt e^{-i\omega\tau} d\tau = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \varphi(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad \text{et finalement :}$$

$$S(\omega) = TF[\varphi(\tau)] \stackrel{\Delta}{=} \Phi(\omega) \quad \text{et d'après (7) :}$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_T^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) d\omega = V$$

où :

$\Phi(\omega)$  est la DSP de  $x(t)$ .

$\Phi(\omega)$  est la *TF* de la fonction d'autocorrélation  $\varphi(\tau)$  ( $= \varphi_{xx}(\tau)$ ) du signal  $x(t)$ .

*Propriétés de la DSP  $\Phi(\omega)$*

- .  $\Phi(\omega) = \Phi(-\omega)$  :  $\Phi(\omega)$  est paire (du fait que  $\varphi(\tau)$  est paire et d'après les propriétés de la *TF*)
- .  $\Phi(\omega) \geq 0 \quad \forall \omega$

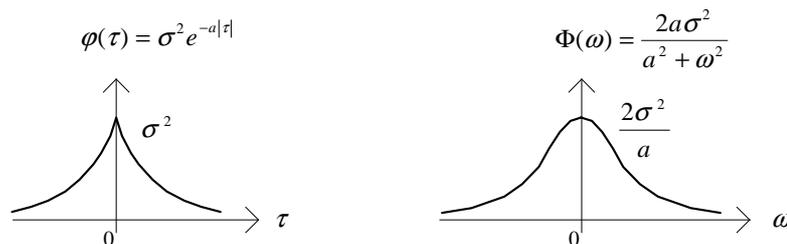
*Bruit de Markov du 1er ordre*

Un exemple type de fonction  $\Phi(\omega)$  est donné par le bruit de Markov du 1er ordre de fonction de corrélation :

$$\varphi(\tau) = \sigma^2 e^{-a|\tau|}$$

et de DSP :

$$\Phi(\omega) = TF[\varphi(\tau)] = \frac{2a\sigma^2}{a^2 + \omega^2}$$



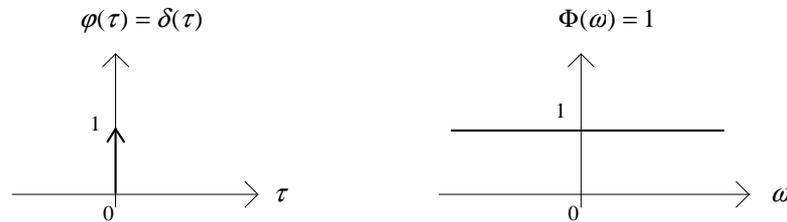
Bruit de Markov du 1er ordre

*Bruit Blanc*

Le Bruit Blanc, dont la fonction de corrélation est  $\varphi(\tau) = \delta(\tau)$  a donc pour DSP :

$$\Phi(\omega) = TF[\varphi(\tau)] = 1$$

ceci signifie que toutes les fréquences  $\omega$  sont représentées avec la même puissance, ce qui permet de retrouver le fait qu'un Bruit Blanc n'est pas physiquement réalisable puisque sa puissance (ou sa variance) est infinie.



*Bruit Blanc*

**5. CONCLUSION**

Les signaux aléatoires rencontrés le plus souvent, même s'ils ne sont pas rigoureusement gaussiens, peuvent être caractérisés (représentation paramétrique) à l'aide de 3 paramètres statistiques :

- la valeur moyenne  $m(t)$  du signal aléatoire  $X(t)$  dont une réalisation est notée  $x(t)$ .
- la fonction de covariance  $c(t, \tau)$  du signal, qui renseigne sur la vitesse de variation du signal.
- la variance ou carré de l'écart-type du signal :  $v(t) = \sigma^2(t)$  qui constitue une valeur particulière de la fonction de corrélation  $c(t, t)$  et qui détermine le domaine où l'on est en droit d'attendre la plus grande concentration de réalisations du signal aléatoire.

Dans le cas où ces caractéristiques sont indépendantes de l'origine du temps, on a affaire à un signal *stationnaire* pour lequel moyenne et variance sont des constantes, et la covariance, fonction d'une seule variable est appelée fonction de corrélation  $\varphi(\tau)$  :

$$m(t) = m \qquad v(t) = v \qquad c(t, t + \tau) = \varphi(\tau)$$

Si de plus, le signal est ergodique, il y a autant d'informations dans une réalisation particulière suffisamment longue du signal, que dans un grand nombre de réalisations de moindre durée. On a alors :

*Cas continu*

$$m = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt$$

$$\varphi(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (x(t) - m)(x(t + \tau) - m) dt \qquad \varphi(0) = v$$

*Cas discret*

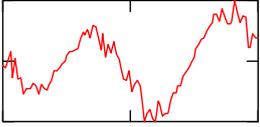
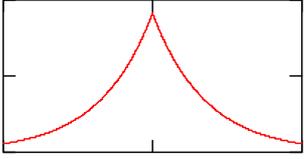
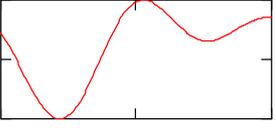
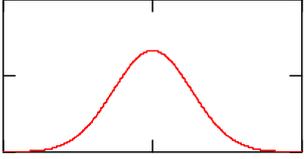
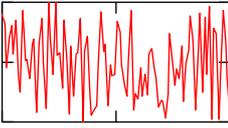
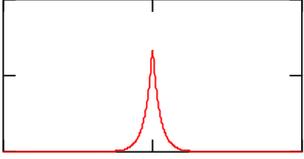
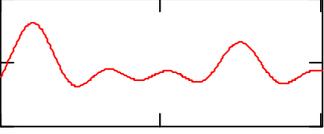
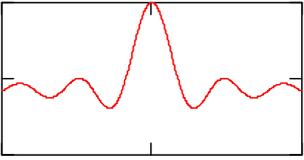
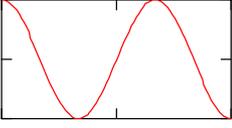
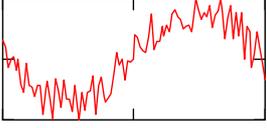
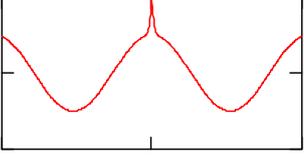
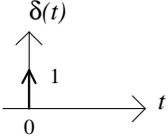
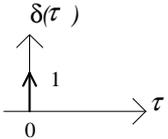
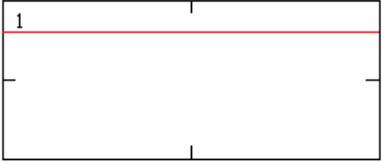
$$m = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \sum_{k=-n}^n x_k$$

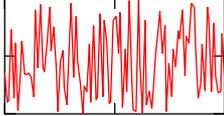
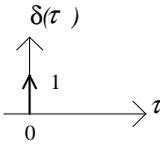
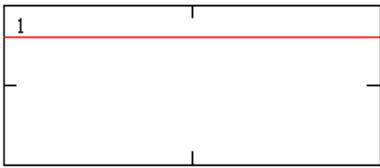
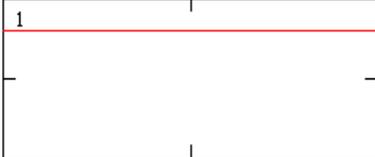
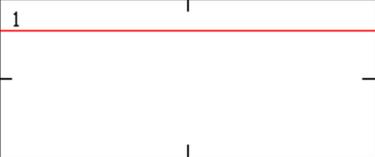
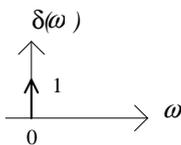
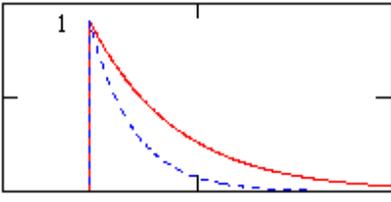
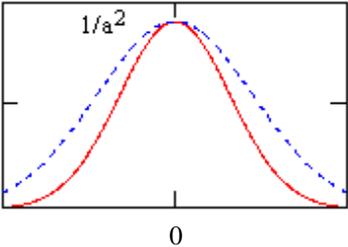
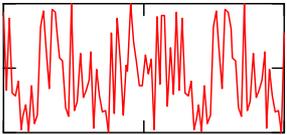
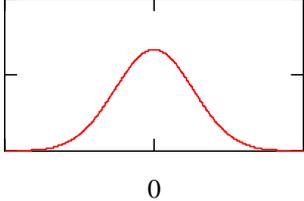
$$\varphi_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \sum_{p=-n}^n (x_p - m)(x_{p+k} - m) \qquad \varphi_0 = v$$

Parmi les signaux aléatoires fondamentaux, on rencontre le bruit blanc (séquence indépendante dans le cas discret) signal idéal dont la fonction de corrélation  $\varphi(\tau)$  est l'impulsion de Dirac  $\delta(t)$  et qui peut être défini comme la dérivée d'un bruit de Wiener, signal réel dont un représentant est le mouvement Brownien.

Comme les signaux déterministes, les signaux aléatoires possèdent une Représentation Fréquentielle : pour un signal à énergie finie, on définit sa Densité Spectrale d'Énergie (DSE) et s'il s'agit d'un signal à énergie infinie, sa Densité Spectrale de Puissance (DSP) qui est la Transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation du signal.

Comme pour les signaux déterministes, la largeur de bande ( $\equiv$  domaine d'occupation en fréquence) d'un signal aléatoire est d'autant plus importante que les variations du signal sont rapides.

Signal $x(t)$	Autocorrélation $\varphi_{xx}(\tau)$	DSP ou DSE $\Phi(\omega) = TF[\varphi_{xx}(\tau)]$
signal peu prédictible 	 0	
signal lent, assez prédictible 	 0	
signal rapide, peu prédictible 	 0	
signal avec une bande de fréquences dominante 	 0	
signal sinusoïdal 		
signal sinusoïdal perturbé par un bruit à large bande 	 0	
impulsion de Dirac 		DSE 

Signal $x(t)$	Autocorrélation $\varphi_{xx}(\tau)$	DSP ou DSE $\Phi(\omega) = TF[\varphi_{xx}(\tau)]$
<p>bruit blanc</p> 		<p>DSP</p> 
<p>signal constant</p> 		<p>DSP</p> 
<p>signal exponentiel <math>x(t) = e^{-at} \Gamma(t)</math></p> 		<p>DSE</p> 
<p>signal de Gauss-Markov du 1er ordre (système du 1er ordre excité par un bruit blanc)</p> 		

## TD 8 ANNEXE. Signaux aléatoires

### 1. Signal amplifié

Soit  $m$  et  $\sigma^2$  la valeur moyenne et la variance du signal d'entrée de l'amplification de gain  $A$ . Déterminer la valeur moyenne et la variance du signal de sortie.



### 2. Fonction d'autocovariance et moments

Montrer que la fonction d'autocovariance  $R_{XX}(t_1, t_2) = E[X^0(t_1) \cdot X^0(t_2)] = E[\{X(t_1) - E[X(t_1)]\} \cdot \{X(t_2) - E[X(t_2)]\}]$  d'un processus aléatoire  $X(t)$  où  $X^0(t) = X(t) - E[X(t)]$  désigne le processus  $X(t)$  centré, s'écrit en fonction des 2 premiers moments :

$$R_{XX}(t_1, t_2) = M_{XX}(t_1, t_2) - m_X(t_1) \cdot m_X(t_2) \quad \text{où} \quad M_{XX}(t_1, t_2) = E[X(t_1) \cdot X(t_2)] \quad \text{et} \quad m_X(t) = E[X(t)]$$

### 3. Fonction de covariance et moments

Montrer que la fonction de covariance  $R_{XY}(t_1, t_2) = E[X^0(t_1) \cdot Y^0(t_2)] = E[\{X(t_1) - E[X(t_1)]\} \cdot \{Y(t_2) - E[Y(t_2)]\}]$  de 2 processus aléatoires  $X(t)$  et  $Y(t)$  où  $X^0(t) = X(t) - E[X(t)]$  désigne le processus  $X(t)$  centré, s'écrit en fonction des 2 premiers moments :

$$R_{XY}(t_1, t_2) = M_{XY}(t_1, t_2) - m_X(t_1) \cdot m_Y(t_2) \quad \text{où} \quad M_{XY}(t_1, t_2) = E[X(t_1) \cdot Y(t_2)] \quad \text{et} \quad m_X(t) = E[X(t)]$$

### 4. Estimation - Prédiction

Soit  $X(t)$  un signal aléatoire, centré, stationnaire, de fonction de corrélation  $\varphi_{XX}(\tau)$ . On considère une estimation  $\hat{X}(t+T)$  de  $X(t+T)$ , que l'on suppose fonction linéaire de  $X(t)$  :  $\hat{X}(t+T) = \alpha X(t) + \beta$

On appelle  $\mathcal{E}(t+T)$  l'erreur d'estimation sur  $X(t+T)$  :  $\mathcal{E}(t+T) = X(t+T) - \hat{X}(t+T)$

- 1) Déterminer le scalaire  $\beta$  qui satisfait la condition :  $E[\mathcal{E}(t+T)] = 0$ .
- 2) Déterminer le scalaire  $\alpha$  qui minimise la variance de l'erreur d'estimation  $\mathcal{E}(t+T)$ .

## TP 8 ANNEXE. Signaux aléatoires

### 1. Génération de signaux aléatoires

#### Signaux aléatoires par fonction modulo

Une méthode de génération de signaux aléatoires (en fait pseudo-aléatoires du fait de la périodicité des signaux engendrés) consiste à utiliser la fonction modulo.

Programmer les séquences aléatoires à distribution uniforme, de Rayleigh et gaussienne par les relations :

##### *Signal aléatoire à distribution uniforme*

Le signal  $x(n)$  aléatoire à distribution uniforme est décrit par :  $x(n) = A * x(n-1)$  modulo  $P$

L'initialisation  $x(0)$  devant vérifier :  $0 < x(0) < P$

(En indexant l'initialisation sur une horloge par exemple, on a un signal aléatoire générant à chaque essai une séquence différente. Sinon la séquence engendrée est déterministe dans le sens où l'équation décrivant le signal est analytique, paramétrique).

On a :  $0 < x(n) < P$

(Pour avoir  $0 < x(n) < 1$ , il suffit de diviser chaque terme de la séquence par  $P$ ).

Le signal généré est pseudo-aléatoire car périodique de période  $P$ . Pour ne pas, lorsque  $n$  augmente, retomber vite sur la même série de coefficients de la séquence, il vaut mieux choisir  $P$  grand.

$P$  doit être un nombre premier pour que le résultat du modulo ne soit pas nul.

On pourra prendre par exemple :  $x(0) = 100, A = 281, P = 31357$ .

##### *Signal aléatoire à distribution de Rayleigh*

Le signal  $y(n)$  aléatoire à distribution de Rayleigh peut être obtenu à partir du signal aléatoire  $x(n)$  à distribution uniforme :

$$y(n) = 2\sigma \text{Ln}[1/x(n)]$$

$\sigma$  caractérise la dynamique du signal.

On pourra prendre par exemple :  $\sigma = 10$ .

##### *Signal aléatoire à distribution gaussienne*

Le signal  $w(n)$  aléatoire à distribution gaussienne peut être obtenu à partir des signaux aléatoires  $x(n)$  à distribution uniforme et  $y(n)$  à distribution de Rayleigh :

$$w(n) = y(n) \cos[2\pi x(n)]$$

#### Signaux aléatoires par fonction OU exclusif

Une autre méthode de génération de signaux aléatoires consiste à utiliser la fonction OU exclusif.

Un échantillon de la séquence aléatoire est codé sur  $m$  bits. Le mot de l'échantillon  $x(n+1)$  de la séquence est obtenu à partir du mot de l'échantillon  $x(n)$  en effectuant un OU exclusif entre les 2 bits de plus faible poids de  $x(n)$ , et en décalant circulairement vers la droite les bits du mot : le LSB est perdu, et il rentre le résultat du OU exclusif pour nouveau MSB.

Un mot a conventionnellement son MSB à l'extrême gauche et son LSB à l'extrême droite. Le MSB est le bit de plus fort poids, le LSB celui de poids le plus faible.

Programmer les séquences aléatoires à distribution uniforme, de Rayleigh et gaussienne par les relations :

## 9 ANNEXE. Filtrage multicanal

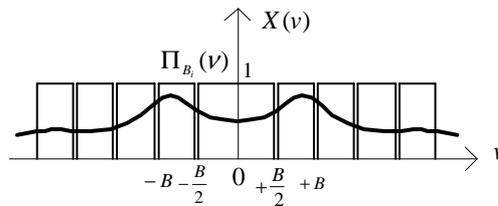
Le filtrage multicanal, encore appelé codage en sous-bandes, consiste en une décomposition d'un signal suivant différentes composantes fréquentielles. Une application possible est la compression de signal (avec pertes) de sorte que les composantes dominantes (de plus forte puissance) se voient allouer un nombre relatif de bits de codage plus important.

### 1. Décomposition en sous-bandes et reconstruction exacte

#### 1.1. Analyse et décomposition en bandes de fréquences

Considérons un signal à TC  $x(t)$  que l'on cherche à analyser en décomposant son spectre (sa TF)  $X(\nu)$  en  $N = 2^k$  trames fréquentielles (suite de signaux  $x_i(t) \Big|_{i=1..N}$  avec  $k \in \mathbf{N}$ , et issus de  $x(t)$  par fenêtrage rectangulaire glissant de  $X(\nu)$ , fenêtres sans recouvrement et contigües sur tout le support des fréquences) :

$$X_i(\nu) = \Pi_{B_i}(\nu) \cdot X(\nu) \quad \text{avec les plages de fréquences de largeur identique } \frac{B}{2} : \quad B_i = \left[ \frac{i-1}{2^k} B, \frac{i}{2^k} B \right]$$



#### 1.2. Synthèse et reconstruction

L'opération inverse, duale de la décomposition est la reconstruction. La première étape de la reconstruction est une phase de filtrage des composantes artificielles produites par la décomposition. La seconde étape consiste à additionner les différentes composantes issues du filtrage pour synthétiser le signal original.

#### 1.3. Algorithme

On s'intéresse ici au cas particulier de la décomposition binaire d'un signal sur  $N = 2$  bandes, la décomposition en  $2^k$  bandes étant obtenue par composition  $k$  fois de la décomposition binaire.

Supposons que le contenu fréquentiel  $X$  du signal  $x$  à décomposer a pour support la bande limitée  $[-B, +B]$ .

##### 1.3.1. Décomposition

Le signal  $x$  est appliqué simultanément dans deux filtres Passe-Bas (FT  $H_0(z)$ ) et Passe-Haut (FT  $H_1(z)$ ) (plus exactement Passe-Haut avec Modulation  $\equiv$  Translation horizontale du spectre) pour donner respectivement les signaux  $\hat{x}_0$  et  $\hat{x}_1$  caractérisés par leurs TZ :

$$\begin{cases} \hat{X}_0(z) = H_0(z)X(z) \\ \hat{X}_1(z) = H_1(z)X(z) \end{cases}$$

Lors de cette décomposition, on double le nombre de bits de codage puisqu'on a, après décomposition, deux signaux échantillonnés à la même fréquence d'échantillonnage que le signal initial (soit  $2B$  si on prend la limite minimale fixée par le théorème de Shannon).

Cependant, si les filtres passe-bas et passe-haut sont réglés pour réduire de moitié le contenu fréquentiel du signal  $x$ , soit  $B/2$ , un taux d'échantillonnage  $B$  suffit pour échantillonner  $\hat{x}_0$  et  $\hat{x}_1$ . Ceci revient à ne considérer qu'un bit sur deux des signaux  $\hat{x}_0$  et  $\hat{x}_1$  échantillonnés au taux  $2B$ . Cette étape est appelée *décimation d'ordre 2* ou encore *sous-échantillonnage* ou enfin *expansion spectrale*. Le signal  $x$  est ainsi décomposé à nombre de bits constant.

Soient  $x_0$  et  $x_1$  les signaux issus de la décimation. On a les relations faisant intervenir les *TZ* :

$$\begin{cases} X_0(z) = \frac{1}{2} [\hat{X}_0(z^{1/2}) + \hat{X}_0(-z^{1/2})] \\ X_1(z) = \frac{1}{2} [\hat{X}_1(z^{1/2}) + \hat{X}_1(-z^{1/2})] \end{cases} \quad (\text{voir démonstration en TD})$$

Dans une application de compression de signal, après décimation interviennent différents algorithmes de compression avec perte, appliqués de manière indépendante à  $x_0$  et  $x_1$ . Ceux-ci peuvent par exemple re-quantifier plus grossièrement l'un des deux, être eux-mêmes suivis de compression sans perte, etc... pour enfin être appliqués au canal de transmission.

En sortie de canal, le premier traitement consiste à appliquer les décodeurs liés aux différents algorithmes de compressions utilisés et ainsi restituer les signaux  $x_0$  et  $x_1$ .

### 1.3.2. Reconstruction

La reconstruction se fait alors en 3 étapes.

On commence par sur-échantillonner les deux signaux  $x_0$  et  $x_1$  : cela revient à insérer un 0 (échantillon nul) entre 2 échantillons successifs de  $x_0$  et  $x_1$  (étape appelée *interpolation d'ordre 2* ou encore *sur-échantillonnage* ou enfin *compression spectrale*). On note  $\tilde{x}_0$  et  $\tilde{x}_1$  les deux signaux obtenus. Leur *TZ* vérifie :

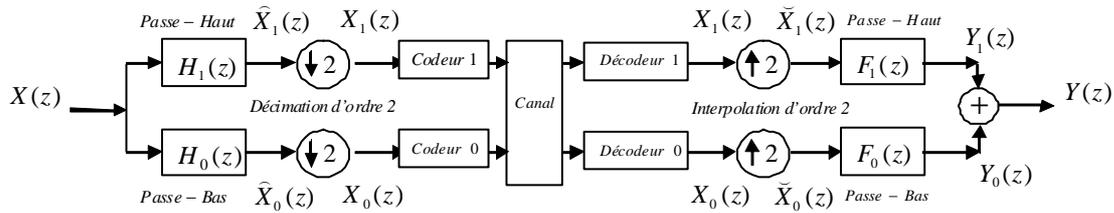
$$\begin{cases} \tilde{X}_0(z) = X_0(z^2) \\ \tilde{X}_1(z) = X_1(z^2) \end{cases} \quad (\text{voir démonstration en TD})$$

La seconde étape est un filtrage, nécessaire car l'interpolation a introduit une partie artificielle dans le spectre par périodicité. Le filtrage de  $\tilde{x}_0$  et  $\tilde{x}_1$  est assuré par deux filtres passe-bas (de FT  $F_0(z)$ ) et passe-haut (de FT  $F_1(z)$ ) appliqués simultanément pour donner respectivement les signaux  $y_0$  et  $y_1$  de *TZ* respective  $Y_0(z)$  et  $Y_1(z)$ .

La dernière étape consiste à ajouter les signaux  $y_0$  et  $y_1$  pour reconstruire le signal initial  $x$  :

$$y = y_0 + y_1 = x.$$

La structure complète de décomposition-reconstruction est appelée *banc de codage en sous-bandes* :



On a les relations :

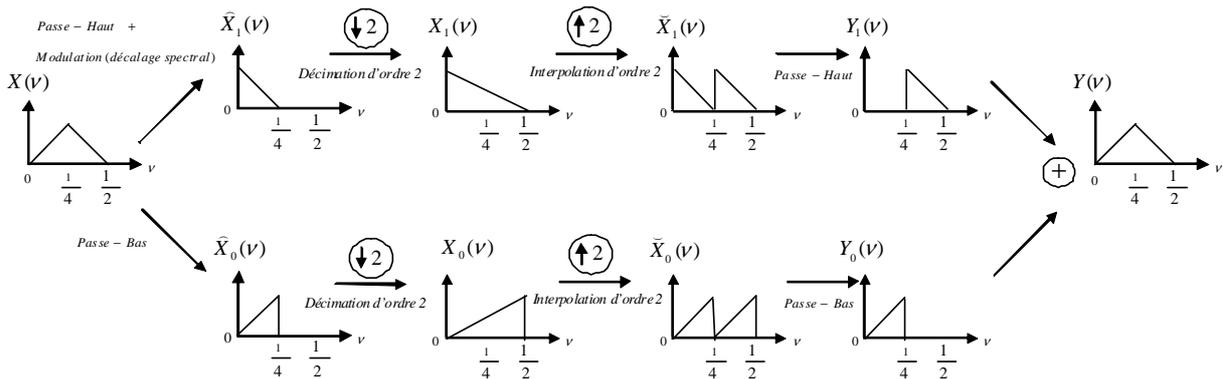
$$Y(z) = Y_0(z) + Y_1(z) = \frac{1}{2} [H_0(z)F_0(z) + H_1(z)F_1(z)]X(z) + \frac{1}{2} [H_0(-z)F_0(z) + H_1(-z)F_1(z)]X(-z)$$

Il y a reconstruction exacte, avec un retard de  $p$  échantillons, soit :  $y_n = x_{n-p}$  ou encore :  $Y(z) = z^{-p} X(z)$

si et seulement si :

$$\begin{cases} H_0(z)F_0(z) + H_1(z)F_1(z) = 2z^{-p} \\ H_0(-z)F_0(z) + H_1(-z)F_1(z) = 0 \end{cases} \quad (\text{Condition de non - repliement, d'anti - aliasing})$$

Un exemple de représentation spectrale illustre la décomposition-reconstruction :



## 2. Filtrage en quadrature (QMF) (Quadrature Mirror Filters)

La condition d'anti-repliement :  $H_0(-z)F_0(z) + H_1(-z)F_1(z) = 0$  est automatiquement vérifiée si on impose les relations :

$$\begin{cases} F_0(z) = H_1(-z) \\ F_1(z) = -H_0(-z) \end{cases}$$

Il reste alors à résoudre la seconde condition de reconstruction à un retard de  $p$  échantillons près :

$$H_0(z)F_0(z) + H_1(z)F_1(z) = 2z^{-p}$$

Une solution est l'approche QMF (Quadrature Mirror Filters) consistant à imposer :

$$H_1(z) = H_0(-z)$$

qui introduit une relation de symétrie (Mirror) autour de la fréquence  $\nu = 1/4$  entre les Réponses Fréquentielles  $H_0(\nu)$  et  $H_1(\nu)$ .

La condition qui en découle sur le filtre Passe-Bas  $H_0$  devient :

$$H_0^2(z) - H_0^2(-z) = 2z^{-p}$$

Cette relation n'admet de solution FIR (Réponse Impulsionnelle Finie) pour  $H_0$  que pour  $p = 0$  ou  $p = 1$ .

Le cas  $p = 1$  admet une solution triviale, le *filtre de Haar* (filtre RIF à phase linéaire), décrit par :

$$\text{sa FT : } H_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + z^{-1}) \quad \text{et sa RI : } h_{0_n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\delta_n + \delta_{n-1})$$

---

### TD 9 ANNEXE. Filtrage multiscadence

#### 0. Compression - Expansion

On considère les deux filtres numériques suivants :

- *Filtre interpolateur (expandeur, sur-échantillonneur)* d'ordre  $N$  ( $N$  entier supérieur ou égal à 2) :  
Il y a insertion de  $N - 1$  zéros entre 2 échantillons successifs :

$$u(k) \longrightarrow \boxed{\uparrow N} \longrightarrow x(k) \qquad x(k) = \begin{cases} u\left(\frac{k}{N}\right) & \text{si } k = 0 \bmod N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \equiv \begin{cases} u\left(\frac{k}{N}\right) & \text{si } \frac{k}{N} \text{ entier} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- *Filtre décimateur (compresseur, sous-échantillonneur)* d'ordre  $M$  ( $M$  entier supérieur ou égal à 2) :  
Il y a conservation d'un échantillon sur  $M$  échantillons :

$$u(k) \longrightarrow \boxed{\downarrow M} \longrightarrow s(k) \qquad s(k) = u(kM)$$

**Filtre interpolateur** - Ce filtre est-il ?

1. Stationnaire ?
2. Causal ?
3. Linéaire ?
4. Stable ?

**Filtre décimateur** - Ce filtre est-il ?

5. Stationnaire ?
6. Causal ?
7. Linéaire ?
8. Stable ?

#### 1. Compression - Expansion 2

On considère les deux filtres suivants :

- *Filtre interpolateur* ( $\equiv$  *expandeur*,  $\equiv$  *sur-échantillonneur*) d'ordre  $N$  :  
Insertion de  $N - 1$  zéros entre 2 échantillons successifs :

$$u(k) \longrightarrow \boxed{\uparrow N} \longrightarrow x(k) \qquad x(k) = \begin{cases} u\left(\frac{k}{N}\right) & \text{si } k = 0 \bmod N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

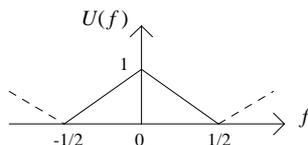
$U(z)$  représente la Transformée en  $z$  (TZ) de  $u(k)$       TZ:       $X(z) = U(z^N)$

- *Filtre décimateur* ( $\equiv$  *compresseur*,  $\equiv$  *sous-échantillonneur*) d'ordre  $M$  :  
Conservation d'un échantillon sur  $M$  échantillons :

$$u(k) \longrightarrow \boxed{\downarrow M} \longrightarrow s(k) \qquad s(k) = u(kM)$$

TZ:       $S(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} U(z^{\frac{1}{M}} \cdot e^{-i2\pi \frac{k}{M}})$

On donne le spectre ( $\equiv$  Réponse en Fréquence)  $U(f)$  de  $u(k)$  :



**1. Filtre interpolateur**

1.0. Etablir l'expression de la TZ  $X(z) = U(z^N)$  de  $x(k) = \begin{cases} u\left(\frac{k}{N}\right) & \text{si } k = 0 \text{ mod } N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ .

Cas particulier où  $M = 2$ .

- 1.1. Ce filtre est-il réversible ? (restauration exacte du signal original)
- 1.2. Donner l'expression du spectre  $X(f)$  de  $x(k)$  en fonction de celui de  $u(k)$ .
- 1.3. Dans le cas  $N = 2$ , vérifier le résultat de la question 1.1.1. en représentant graphiquement  $X(f)$ .

**2. Filtre décimateur**

2.0. Etablir l'expression de la TZ  $S(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} U(z^{\frac{1}{M}} \cdot e^{-i2\pi \frac{k}{M}})$  de  $s(k) = u(kM)$  en remarquant que :

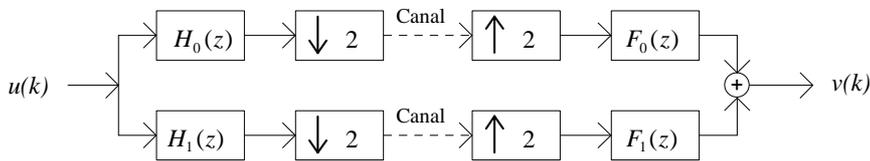
$$\frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} e^{i2\pi n \frac{k}{M}} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \text{ mod } M \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cas particulier où  $M = 2$ .

- 2.1. Ce filtre est-il réversible ?
- 2.2. Donner l'expression du spectre  $S(f)$  de  $s(k)$  en fonction de celui de  $u(k)$ .
- 2.3. Dans le cas  $M = 2$ , vérifier le résultat de la question 2.1.1. en représentant graphiquement  $S(f)$ .

**2. Filtrage Q.M.F. (Quadrature-Mirror-Filter)**

On considère le système de décomposition-reconstruction QMF d'un signal à base de décimation-interpolation :



$F_0(z), F_1(z)$  sont à déterminer;  $H_0(z)$  : filtre passe-bas;  $H_1(z)$  : filtre passe-haut.

- 1. En supposant le canal de transmission parfait, donner le système d'équations permettant de déterminer  $F_0(z)$  et  $F_1(z)$  pour qu'il y ait une parfaite reconstruction, c'est-à-dire  $v(k) = u(k)$ .
- 2. Déterminer  $F_0(z)$  et  $F_1(z)$  dans le cas où  $H_0(z)$  et  $H_1(z)$  sont des filtres passe-tout :

$$\begin{cases} H_0(z) = z^{-1} \\ H_1(z) = 1 \end{cases}$$

Quelle remarque peut-on faire sur le filtrage opéré ?

### 3. Filtrage demi-bande (Filtrage Q.M.F. Quadrature-Mirror-Filter)

Un filtre numérique demi-bande de type RIF à phase linéaire, d'entrée  $x(nT)$  et de sortie  $y(nT)$  (notés plus simplement  $x_n$  et  $y_n$ ) où  $T$  représente la période d'échantillonnage ( $F = 1/T$  est la fréquence d'échantillonnage) est défini par une Réponse Fréquentielle  $H(f)$  réelle, antisymétrique par rapport au point  $(F/4, 0.5)$  :

$$\begin{cases} H\left(\frac{F}{4}\right) = 0.5 \\ H\left(\frac{F}{4} + f\right) = 1 - H\left(\frac{F}{4} - f\right) \end{cases}$$

On considère ici le filtre dont l'équation récurrente est donnée par : 
$$y_n = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{1}{2} x_{n-1} + \frac{1}{2} x_{n+1} \right)$$

- Déduire de la Fonction de Transfert  $H(z)$  du filtre, sa Réponse Fréquentielle  $H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}$  exprimée en fonction de la fréquence d'échantillonnage  $F$ .
- Ce filtre est-il RIF demi-bande ?
- Tracer l'allure de sa Réponse Fréquentielle et en déduire la nature du filtre (passe-bas, passe-haut, passe-bande ou coupe-bande).
- L'équation récurrente d'un demi-bande RIF causal s'écrit de façon générale : ( $M \in \mathbf{N}^*$ )

$$y_n = \frac{1}{2} \left[ x_{n-2M} + \sum_{i=1}^{2M} a_i x_{n-2i+1} \right]$$

Ecrire sa Fonction de Transfert  $H_0(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$  sous la forme :  $H_0(z) = \frac{1}{2} [G_0(z^2) + z^{-1} G_1(z^2)]$  où  $G_0(z^2)$  et  $G_1(z^2)$  sont à préciser.

---

# **SIGNAUX & SYSTEMES**

## **PROJETS**

- Le travail demandé est à programmer sous Mathcad ou LabWindows/CVI, par groupe de 4 élèves maximum.
- Le travail à rendre (sous la forme d'un fichier zip dénommé avec l'intitulé du sujet et tous les noms des membres du groupe de projet, fichier à déposer sur Arelv2) doit contenir le programme Mathcad ou CVI avec toutes les données nécessaires, les commentaires et rapport.
- Des questions de cours individuelles seront posées lors de la soutenance du projet.

*A ■ Enoncés de projet détaillés se trouvant dans le répertoire : CORRIGES/GA/SIGSY/SIGSYPROJET*

01. Speech signal compression with FFT
02. Image signal compression with FFT
03. Implementation of discrete-time systems - Parole & image
04. Analysis of discrete-time signals
05. Segmentation parole en mots (détection de début/fin de mots par mesure d'énergie)
06. Détection d'activité vocale (détection par mesure d'énergie, éventuellement améliorée par l'analyse spectrale)
07. Repliement de spectre

*B ■ Enoncés de projet d'exploration*

01. Synthèse d'un filtre de Butterworth passe-bas d'ordre 2 sur signal parole (speech.wav) en coupant les fréquences > 1 kHz. Vérifier avec Cool Edit et comparer avec la librairie Mathcad IIR (iirlow) et FIR (lowpass)
02. Logiciel d'oscilloscope sur PC (avec carte d'Entrées/Sorties NI ou carte SON SB) (WinXP - CVI)
03. Analyseur de spectre sur PC (avec carte d'Entrées/Sorties NI ou carte SON SB) (Win XP - CVI) + analyse ondelettes
04. Programme de commande (player audio, recorder audio) bas-niveau (avec carte d'Entrées/Sorties NI ou carte SON SB) (E/S d'échantillons en traitement point par point, en Temps Réel) + Fonction Wait (avec une résolution = 1 ms) (Win XP - CVI) : (recorder + effet + player + synthétiseur) (effet : écho, réverbération, trémolo, phasing, flanging ...)
05. Programme de capture d'écran/son (frames/sec. réglable) enregistré dans un fichier AVI (~VirtualDub) (VisualC MFC-WinXP).
06. Toolbox d'acquisition sonore Mathcad: création d'une librairie (DLL) de fonctions timer et d'acquisition/restitution temps réel d'échantillons sonores (commande de la carte son) à intégrer dans Mathcad.
07. Programmation d'un effet 3D sonore logiciel par Traitement du Signal à partir de 2 Haut-Parleurs (décalage, déphasage entre les 2 canaux Gauche et Droit pour donner l'impression physiologique 3D de relief sonore).
08. Toolbox d'effets spéciaux audio (en Temps Différé) : Banc de filtres audio numériques (écho, réverbération, phasing, flanging, trémolo ...) à synthétiser. Programmation sous Mathcad.
09. Toolbox d'effets spéciaux audio (en Temps Réel) : Banc de filtres audio numériques (écho, réverbération, phasing, flanging, trémolo ...) à synthétiser. Programmation sous CVI.
10. Toolbox d'effets spéciaux audio (en Temps Réel) : Banc de filtres audio numériques (écho, réverbération, phasing, flanging, trémolo ...) à synthétiser. Programmation sous CVI (signal acquis/restitué par carte d'E/S NI, déclenchement par la carte d'E/S).
11. Logiciel d'étude pour le traitement du signal (acquisition, gestion de fichiers, algorithmes de traitement, spectre de fréquences, éditeur de signal ...) Programmation en C DirectX de la carte son SB sous Win2k dans un contexte Temps Différé.
12. Logiciel d'étude pour le traitement du signal (acquisition, gestion de fichiers, algorithmes de traitement, spectre de fréquences, éditeur de signal ...) (~CoolEdit). Programmation en C DirectX de la carte son SB sous WinXP dans un contexte TEMPS REEL (signal acquis / restitué par la carte son).
13. Editeur/Player bas-niveau de fichiers audio WAV/MP3 sous Win XP - CVI ou Visual C.
14. Traitement du signal par DSP (carte son) (programmation bas-niveau du DSP: Digital Signal Processor de la carte son)
15. Mixage numérique de plusieurs fichiers sons (en Temps Différé (TD)) (Addition, soustraction pondérées ...) (Mathcad & CVI)
16. Editeur de signal au format .wav (création, génération de signaux à la souris, import de données tableur+interface graphique)(CVI)
17. Player audio (~Winamp) avec visualisation graphique (images virtuelles ou Bar graph vu-mètre) en fonction de la puissance audio (~Windows MediaPlayer7) (prgramme autonome CVI ou plug-in Winamp)
18. Débruitage de signaux audio (craquements sur disques vinyle) par filtrage médian (taille du masque médian grande devant largeur craquement) (filtrage temporel) et par filtrage fréquentiel (coupe-bande) (Mathcad)
19. Suppression automatique de la voix dans des chansons stéréo pour karaoké (Mathcad) (par filtrage temporel soustractif, la voix étant enregistrée de façon identique sur les canaux gauche et droit et par filtrage fréquentiel (coupe-bande) + étude bibliographique).
20. Programme de codage/décodage (codec) MP3 audio (*Fraunhofer*) + implémentation comme DLL Mathcad. Etude bibliographique.

*Les projets de numéro en gras peuvent être en outre développés à l'aide de la carte d'acquisition NI + logiciel CVI et dans un contexte Temps Réel*