ESTIMATION

Estimation : donner une valeur approchée aux paramètres d'une population (μ, σ^2, …) à l'aide d'un échantillon de cette population

Exemples standards : $\overline{x}$ et s^2 donnent une estimation de μ et σ^2, car d'après la loi des grands nombres les estimateurs $\overline{X}$ et S^2 convergent vers μ et σ^2.

Pour un même paramètre, il peut y avoir plusieurs estimateurs possibles. Lequel choisir?

→ **Qualité d'un estimateur**

Exemple

Soit X le temps d'attente entre deux atterrissages sur un aéroport. On peut supposer que X suit une loi exponentielle car temps d'attente. Reste à estimer le paramètre θ d'après les observations

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
0.4	1	0.5	0.3	0.1	0.2	1.4	0.2	0.5

On sait $E(X)=1/\theta$ et $var(X)=1/\theta^2$. Donc deux possibilités pour estimer θ

Espérance $\rightarrow$ $\theta=1.96$

Variance $\rightarrow$ $\theta=2.35$

?

Sert ensuite à mieux gérer le temps des contrôleurs

QUALITE D'UN ESTIMATEUR (1/2)

Soit θ le paramètre à estimer et T un estimateur de θ

Remarque : ***T est une v.a. fonction de*** $X_1, X_2, \ldots, X_n$

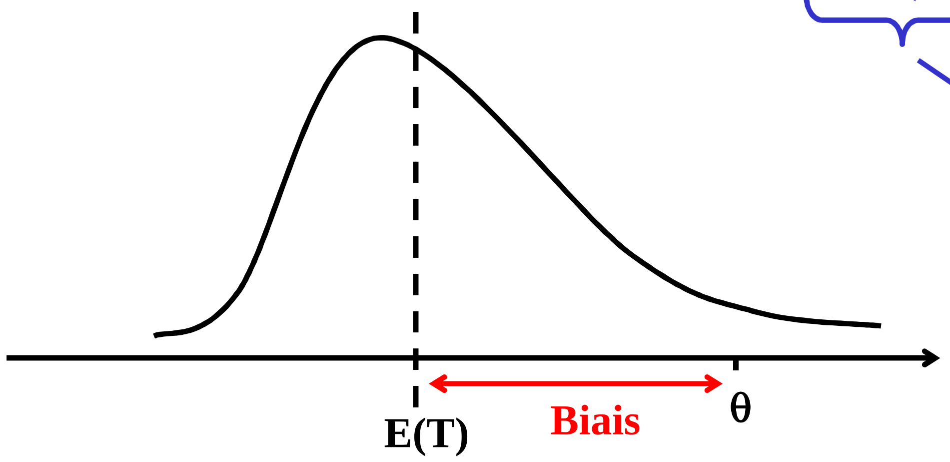
$$\boxed{\text{Condition nécessaire : } T \xrightarrow[n\to\infty]{p} \theta}$$

Vitesses de convergence différentes ⇒ Précision de l'estimateur ⇒ Erreur d'estimation : T-θ

$$T-\theta = \underbrace{T-E(T)} + \underbrace{E(T)-\theta}$$

$E(T)-\theta$ → Erreur systématique

$T-E(T)$ → Fluctuations de T autour de sa moyenne



QUALITE D'UN ESTIMATEUR (2/2)

- La constante $b=E(T)-\theta$ est appelé le biais de l'estimateur et on dit que l'estimateur est sans biais si $E(T) = \theta$.

- La précision de l'estimateur est mesurée par l'erreur quadratique moyenne : $R_\theta(T)=E[(T-\theta)^2]$

$$\boxed{R_\theta(T)=var(T)+b^2}$$

L'estimateur T_1 est meilleur que l'estimateur T_2 si

$$E[(T_1-\theta)^2]\leq E[(T_2-\theta)^2] \quad \Leftrightarrow \quad R_\theta(T_1) \leq R_\theta(T_2)$$

Si estimateurs sans biais, le meilleur est celui de variance minimale

HYPOTHESE DE L'ESTIMATION

Précision de l'estimateur T ➡ ***Variance de T*** ➡ ***Loi de T*** ➡ ***Loi des X_i***

Hypothèses :

1) Loi des X_i connue à un ou plusieurs paramètres près

   Exemple : Poisson $\mathcal{P}(\theta)$ où θ inconnu

   X_i est définie par une famille paramétrée de lois $f(x;\theta)$ où f a une expression analytique connue

   Exemple : Pour $\mathcal{P}(\theta)$, on a $f(x;\theta)=\dfrac{\theta^x}{x!}e^{-\theta}$

2) Pour une famille donnée $f(x;\theta)$, on cherche l'estimateur sans biais de variance minimale

   Exemple : Pour $\mathcal{P}(\theta)$, on a $E(X)=\theta \Rightarrow$ estimateur $\overline{X}$

LA VRAISEMBLANCE

La fonction de vraisemblance

$$\theta \mapsto L(\mathbf{x};\theta) = L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$$

est définie par la loi conjointe du vecteur $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$

<u>Remarque</u> : Les v.a. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes $\Rightarrow$ produit des lois

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a. discrètes de fonction de masse $p(x;\theta) \Rightarrow$

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i;\theta)$$

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a. continues de fonction de densité $f(x;\theta) \Rightarrow$

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$$

INFORMATION DE FISHER

On appelle quantité d'information de Fisher apportée par un échantillon sur le paramètre θ la quantité positive ou nulle suivante (si elle existe)

$$I_n(\theta) = E\left[\left(\frac{\partial \ln L(X_1,\ldots,X_n;\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right]$$

Propriété : Si le domaine de définition de X ne dépend pas de θ alors

$$\boxed{I_n(\theta) = -E\left[\frac{\partial^2 \ln L(X_1,\ldots,X_n;\theta)}{\partial\theta^2}\right]} \quad \text{et} \quad \boxed{I_n(\theta) = n \times I_1(\theta)}$$

Propriété : (Inégalité de Frechet-Darmois-Cramer-Rao)

Soit T un estimateur sans biais de h(θ), alors

$$\boxed{\mathrm{var}(T) \geq \frac{(h'(\theta))^2}{I_n(\theta)}}$$

- Si h=id alors $\mathrm{var}(T) \geq \dfrac{1}{I_n(\theta)}$
- Si égalité alors variance mini ⇒ estimateur efficace

Exemple

ESTIMATEUR DU MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE

Soient $x_1,\ldots,x_n$ les réalisations des v.a. $X_1,\ldots,X_n$ de loi $f(\mathbf{x};\theta)$. L'estimateur du maximum de vraisemblance de θ est la solution de l'équation,

$$\boxed{\frac{\partial \ln L(x_1,\ldots,x_n;\theta)}{\partial\theta} = 0}$$

Propriété : Si $\hat{\theta}$ est un estimateur MV de θ alors $g(\hat{\theta})$ est un estimateur MV de $g(\theta)$ où g est bijective.

Remarques :

1) L'équation du MV n'admet pas nécessairement de solution unique et/ou analytique
2) L'estimateur du MV n'est pas nécessairement sans biais
3) L'estimateur du MV est asymptotiquement efficace, *i.e* $\mathrm{var}(\hat{\theta}) \underset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{I_n(\theta)}$

EMV ET ESTIMATEURS USUELS

EMV pour une proportion

On considère un événement A tel que P(A)=p.

Sur un échantillon considérons les v.a. $X_1,\ldots,X_n$ telles que $X_i=1$ si l'événement A est réalisé à la $i^{ème}$ expérience ($i^{ème}$ individu) et 0 sinon.

- La fréquence empirique est l'estimateur du maximum vraisemblance de la probabilité p
- Il est sans biais, convergent, et efficace. De plus, sa loi asymptotique est une loi normale

EMV ET ESTIMATEURS USUELS

EMV pour un échantillon gaussien

Considérons un échantillon gaussien, c-à-d tel que les v.a. $X_1,\dots,X_n$ sont i.i.d de loi $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$

- La moyenne est l'estimateur du maximum vraisemblance de μ
- Il est sans biais, convergent, et efficace. De plus, sa loi asymptotique est une loi normale

- La variance empirique S^2 est l'estimateur du maximum vraisemblance de σ^2
- Il est sans biais $\Rightarrow$ S^{*2}, convergent, mais il n'est pas efficace