CONVERGENCES DE VARIABLES ALEATOIRES

Soit $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace probabilisé

Pour $(\Omega,\mathcal{A},P)$, on définit une expérience qu'on répète n fois de façon indépendante

On considère alors que les résultats $x_1,\ldots,x_n$ des n expériences sont des réalisations de n variables aléatoires $X_1,\ldots,X_n$ indépendantes et de même loi (c'est le cas dans un échantillon).

Nous allons étudier les convergences de la famille $\{X_1,\ldots,X_n\}$ (quand n tend vers $+\infty$)

CONVERGENCES

Convergence en loi

Notons $F_1,\ldots,F_n$ les fonctions de répartition des variables aléatoires $X_1,\ldots,X_n$. On dit que la famille *converge en loi* vers une variable aléatoire X de fonction de répartition F ssi :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} F_n(t) = F(t) \quad \forall t \in D}$$

On le note : $X_n \overset{\mathcal{L}}{\to} X$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n \underset{\mathcal{L}}{=} X$

<u>Théorème de la limite centrale</u>

Supposons $X_1,\ldots,X_n$ indépendantes de même loi telles que $E(X_i)=\mu$ et $var(X_i)=\sigma^2$ alors

$$Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i-\mu}{\sigma} \underset{\mathcal{L}}{\to} \mathcal{N}(0,1) \Longleftrightarrow \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \underset{\mathcal{L}}{\longrightarrow} \mathcal{N}(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$$

CONVERGENCES

Applications du TCL

Convergence de la loi binomiale vers la loi normale :

Soit (X_n) une suite de variables B(n,p) alors

$$\boxed{\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \underset{\mathcal{L}}{\longrightarrow} \mathcal{N}(0,1)}$$

En pratique: np>5 et n(1-p)>5

Convergence de la loi de Poisson vers la loi normale :

Soit (X_n) une suite de variables $\mathcal{P}(\lambda)$ alors

$$\boxed{\frac{X_n - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \underset{\mathcal{L}}{\longrightarrow} \mathcal{N}(0,1)}$$

En pratique: λ>18

CONVERGENCES

Convergence en probabilités

On dit que la famille $X_1,\ldots,X_n$ converge en probabilités vers une variable aléatoire X ssi

$$\boxed{\forall\varepsilon>0,\quad \lim_{n\to+\infty} P\left[\,|X_n-X|\geq\varepsilon\right]=0}$$

On le note : $X_n \xrightarrow{p} X$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n \underset{p}{=} X$

<u>Loi faible des grands nombres</u>

Supposons $X_1,\ldots,X_n$ telles que $E(X_i)$ existe. On dit que la famille suit la loi faible des grands nombres ssi

$$Y_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-E(X_i)\right)\ \underset{p}{\to}\ 0$$

<u>Propriété</u>

Supposons $X_1,\ldots,X_n$ i.i.d. telles que $E(X_i)=\mu$ alors

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\ \underset{p}{\to}\ \mu$$

CONVERGENCES

Convergence en probabilités - Application

Soit X le nombre de clients se présentant à un guichet entre 10h et 12h. Alors X suit une loi $\mathcal{P}(\lambda)$. Comment déterminer λ?

On procède à une série d'observations :

Jour	nb pers	v.a
1	3	X_1 nb pers. au jour 1 – suit une loi $\mathcal{P}(\lambda)$
2	2	X_2 nb pers. au jour 2 – suit une loi $\mathcal{P}(\lambda)$
3	5	X_3 nb pers. au jour 3 – suit une loi $\mathcal{P}(\lambda)$
…		

Loi de Poisson $\Rightarrow$ $E(X_i)=\lambda=var(X_i)$

Loi des grands nombres $\Rightarrow$ $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[p]{} \lambda$

$\Rightarrow$ **Calcul de probabilité – Meilleur gestion des files d'attente**

CONVERGENCES

Convergence en probabilités - Exercice

Soit (X_n) une famille de v.a. continues de fonctions de densité

$$f_n(x) = \frac{ne^{-nx}}{(1+e^{-nx})^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Alors (X_n) converge en probabilité vers 0.

CONVERGENCES

Convergence presque sûre

On dit que la famille $X_1,\ldots,X_n$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire X ssi

$$\boxed{P\left[\lim_{n\to+\infty} X_n = X\right] = 1}$$

On le note : $X_n \xrightarrow{p.s} X$ ou $\lim_{n\to+\infty} X_n \underset{p.s}{=} X$

Loi forte des grands nombres

Supposons $X_1,\ldots,X_n$ telles que $E(X_i)$ existe. On dit que la famille suit la loi forte des grands nombres ssi

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - E(X_i)) \underset{p.s}{\rightarrow} 0$$

Propriété

Supposons $X_1,\ldots,X_n$ i.i.d. telles que $E(X_i)=\mu$ alors

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \underset{p.s}{\rightarrow} \mu$$

CONVERGENCES

Convergence en moyenne quadratique

Supposons $X_1,\ldots,X_n$ telles que $E(X_i)$ et $var(X_i)$ existent. On dit que la famille converge en moyenne quadratique vers une variable aléatoire X ssi

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} E\left[\left| X_n - X \right|^2\right] = 0}$$

On le note : $X_n \overset{m.q}{\longrightarrow} X$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n \underset{m.q}{=} X$

CONVERGENCES

Convergence en moyenne quadratique

Exemple

Soit un échantillon de taille n de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.

Alors

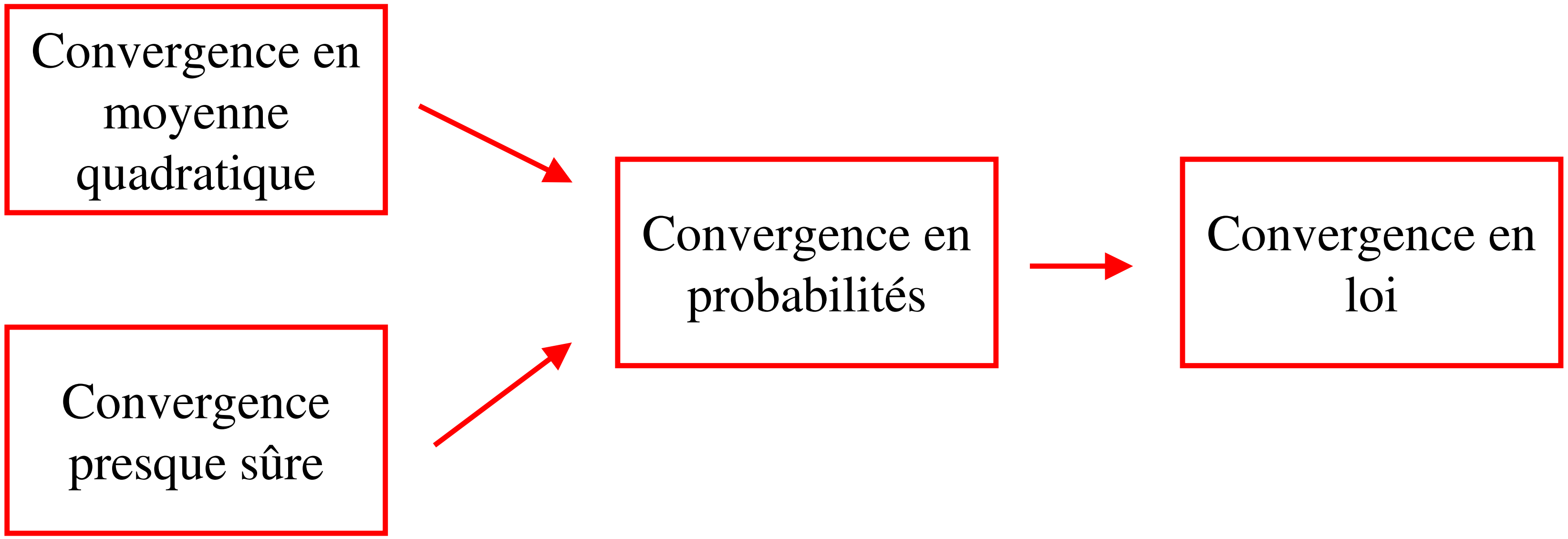
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \underset{m.q}{\longrightarrow} p$$

$\Rightarrow$ **Si la taille de l'échantillon est grande alors p peut être estimé par la moyenne des observations (ex. pile ou face)**

$\Rightarrow$ **Calcul de l'erreur et vitesse de convergence : p(1-p)n**

CONVERGENCES

Liens entre les différents types de convergence



CONVERGENCES

Quelques inégalités

- Inégalité de Markov :

$$\forall c > 0, \quad P\left[|Y| > c\right] \leq \frac{E\left(|Y|^2\right)}{c^2}$$

- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev : $Y = X - E(X)$

$$\forall c > 0, \quad P\left[|X - E(X)| > c\right] \leq \frac{\mathrm{var}(X)}{c^2}$$

CONVERGENCES

Exemple sur l'inégalité B.T.

On lance un dé équilibré. La fréquence d'apparition de l'as est de 1/6 en théorie. Si on lance plusieurs fois le dé, la fréquence d'apparition empirique de l'as ne sera pas tout à fait 1/6.

Combien faut-il de lancers pour pouvoir affirmer avec un risque d'erreur inférieur à 5%, que la fréquence d'apparition de l'as au cours de ces lancers différera de 1/6 d'au plus 1/100?