EISTI

TD N°1 : Estimation

ESTIMATEURS USUELS

Exercice 1

Suite à une étude réalisée dans une société, on a constaté que le montant des factures suit une loi d'espérance 5000€ avec un écart-type de 2000€.
Sur le 1er trimestre, 100 factures ont été émises. Quelle est la probabilité pour le montant moyen des factures dépasse 5100€ ?

Exercice 2

Soit X le temps d'attente avant d'être servi au RU. Une série d'observations journalières donne l'échantillon suivant (en min)

10	11	15	8	9	12	13	11	10	7	19	5	10	6	12	15	16	5	6	10
9	10	14	7	8	11	12	10	9	12	15	7	9	5	11	14	15	8	9	9

On calcule la moyenne $\overline{x}$=10.35 min et l'écart-type empirique s=3.3 min.

1) Quelle loi suit X ?
1) Comment déterminer le paramètre de cette loi à partir de l'échantillon ?
2) En déduire la probabilité qu'un étudiant attende plus de 15 min avant d'être servi.

Exercice 3

Un expérimentateur utilise un thermomètre sophistiqué mais présentant une incertitude de mesure. Afin d'estimer cette incertitude, il effectue une série de mesures sur de l'eau en ébullition. Soit T la température mesurée.

1) Quelle loi suit T ?
2) Comment déterminer le paramètre de cette loi à partir des mesures ?

Exercice 4 (carte de contrôle)

On a construit une machine produisant des engrenages d'un diamètre de 60 mm avec un écart-type de 1.5 mm. Pour déterminer si la machine est en bon état de marche, on décide de prélever un échantillon de 9 engrenages toutes les 2 heures et, à partir de cet échantillon, de calculer la moyenne des diamètres.

1) Quel type de problème doit-on résoudre ?
2) Déterminer la loi de la variable aléatoire utilisée.
3) Etablir une règle de décision pour laquelle on puisse être certain avec un niveau de confiance de 95% que la qualité de la production est conforme à la normale.

INTERVALLE DE CONFIANCE

Exercice 5

On mesure la force de compression d'un ciment en moulant de petits cylindres et en mesurant la pression X (exprimée en kg/cm²) à partir de laquelle ils se cassent. On suppose que X suit une loi $N(\mu,\sigma^2)$.

1) Calculer un I.D.C symétrique avec un risque de 10% pour les paramètres inconnus pour un échantillon de taille n=9 où $\overline{x}=19.72\,\text{kg/cm}^2$ et $s^{*2}=0.69$.
2) Expliquer la différence entre le problème ci-dessus et l'exercice sur les cartes de contrôle.
3) Calculer un I.D.C dissymétrique pour μ avec un risque de 2.5% à gauche et 7.5% à droite pour un échantillon de taille n=9 où $\overline{x}=19.72\,\text{kg/cm}^2$ et $s^{*2}=0.69$. Comparer avec le résultat de la question 1.
4) On suppose maintenant que σ^2=0.69. Calculer un I.D.C symétrique pour μ avec un risque de 10% pour un échantillon de taille n=9 où $\overline{x}=19.72\,\text{kg/cm}^{2.}$ Comparer avec le résultat de la question 1.

Exercice 6

Le New York Times du 18 août 1985 publiait les résultats d'un sondage sur la punition corporelle des enfants. Sur les 604 parents interrogés, 63% étaient favorables aux punitions corporelles dans les écoles. Donner un intervalle de confiance de niveau 5% de la proportion de la population parentale favorable à ce genre de traitement?

Exercice 7

La Monnaie de Paris dispose à Pessac en Gironde d'un établissement monétaire, qui produit en grande série des pièces de monnaie courante pour la France et de nombreux pays. Le poids d'une pièce de 2€ est une variable aléatoire d'espérance μ et d'écart-type de 10^{-1} grammes. On prélève pour un échantillon de 100 pièces et on trouve un poids moyen de 8.55 grammes.

1) Déterminer un intervalle dans lequel le poids d'une pièce de 2€ à 99% de chance de se trouver.
2) Combien faudrait-il prélever de pièces pour avoir une précision inférieure à 10^{-2} grammes ?

Exercice 8

Un échantillon de 50 abonnés au journal Le Monde a révélé qu'un abonné passait en moyenne $\overline{x}$=6.7 heures par semaine à consulter internet. L'écart type de cet échantillon vaut $s^*=5.8$ heures. Donner un intervalle de confiance de niveau 95% pour le temps moyen passé à consulter Internet dans la population des abonnés.

QUALITES D'UN ESTIMATEUR

Exercice 9

Soit X une variable aléatoire de densité

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{2}{\theta}(1-\frac{x}{\theta}) & \text{si } 0\leq x\leq\theta\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

1) Calculer E(X) et V(X).
2) On cherche à estimer θ à partir d'un échantillon $X_1,\ldots,X_n$ de même loi que X. On utilise l'estimateur

$$T_n=\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\ .$$

   (a) Calculer le biais de cet estimateur. Pouvez-vous lui éliminer son biais ?
   (b) Etablir la convergence en probabilité de T_n (modifié).
   (c) Déterminer le risque quadratique puis la convergence en moyenne quadratique.
   (d) Déterminer la loi asymptotique de T_n.

Exercice 10

Soit $X_1,\ldots,X_n$ un échantillon de loi normale d'espérance θ et de variance $\theta(1-\theta)$ où $\theta\in\,]0,1[$ est un paramètre inconnu. On considère les estimateurs

$$T_1=\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \quad \text{et} \quad T_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\ .$$

1) Montrer que les estimateurs T_1 et T_2 sont sans biais et convergents.
2) Quel estimateur a-t-on intérêt à choisir ?
3) Soit maintenant l'estimateur

$$T_3=\alpha T_1+(1-\alpha)T_2$$

   où $\alpha\in\,]0,1[$.
   (a) Déterminer le biais de cet estimateur
   (b) Déterminer α pour que T_3 soit de variance minimale.
   (c) Lequel des trois estimateurs est le meilleur ?

N.B. On note $V(X_i^2)=2\theta^2(1-\theta^2)$