Statistique
TD n°8.

1/2

Test sur les moyennes

$X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$\sigma^2 \to$ connue

$\searrow$ inconnue

en. de 1^{re} esp

$H_0 : \mu = \mu_0$ — $\alpha \to H_0$

$H_1 : \mu \neq \mu_0$ $(\mu < \mu_0$ ou $\mu > \mu_0)$ — $\beta \to H_1$

$H_D : \mu = \mu_1$

en de 2^{nde} esp.

Construction d'un test :

on se base sur un estimateur ponctuel de μ.

$\to \overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$

Si $H_0 : \mu = \mu_0$

$H_1 : \mu \leq \mu_0$ on définit la région critique

$R_c = \{\overline{X} \leq c\}$

$\alpha = P(R_c) = P(\overline{X} \leq c)$ $\qquad \beta = P(\overline{X} \geq c)$

$\overline{X} \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

$\frac{X - \mu}{\sigma} \sqrt{n} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$

Exercice 1

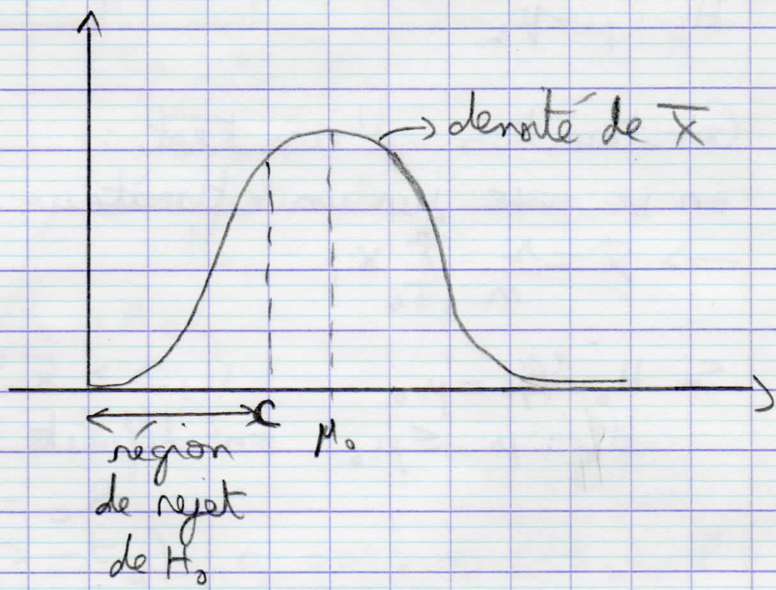
$H_0 : \mu = \mu_0 = 80$

$H_1 : \mu < \mu_0$: test unilatéral sur la moyenne d'une

$H_D : \mu = \mu_1 = 75$ loi normale avec variance connue

$\alpha = 0{,}025$
$\beta = 0{,}05$
$\sigma = 6{,}44$

La région critique est de la forme
$R_c = \{\overline{X} \leq c\}$
Avec $\alpha = P(\overline{X} \leq c)$
$\beta = P(\overline{X} > c)$
Comme $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
$\Rightarrow \overline{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$



$$0{,}0025 = \alpha = P_{H_0}(\overline{X} \leq c) = P_{H_0}\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \leq \frac{c - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right)$$

$$= P_{H_0}(Z_1 \leq t_\alpha) = 0{,}0025$$
où $t_\alpha = \frac{c - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$

$Z_1 \sim \mathcal{N}(0, 1)$

donc comme $0{,}0025 < \frac{1}{2} \Rightarrow t_\alpha < 0 \Rightarrow -t_\alpha > 0$
donc $P_{H_0}(-Z_1 > -t_\alpha) = 0{,}0025$ or $\mathcal{L}(Z_1) = \mathcal{L}(-Z_1)$
$P_{H_0}(Z_1 > -t_\alpha) = 0{,}0025$

$$\Rightarrow P_{H_0}(Z_1 < -t_\alpha) = 0,975$$

La table de $\mathcal{N}(0,1)$ donne

$$-t_\alpha = 1,96$$

$$-t_\alpha = \frac{c-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n} = 1,96.$$

de même

$$\beta = 0,05 = P\left(\frac{\bar{X}-\mu_1}{\sigma}\sqrt{n} > \frac{c-\mu_1}{\sigma}\sqrt{n}\right)$$

$$0,05 = P\left(Z_2 > t_\beta\right) \quad \text{où } t_\beta = \frac{c-\mu_1}{\sigma}\sqrt{n}$$

$$Z_2 \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$t_\beta = 1,645$$

Taille minimale de l'échantillon

$$n_c = \frac{(U_\alpha + U_\beta)^2\,\Sigma^2}{(\theta_0-\theta_1)^2}$$

$$= \frac{(t_\alpha - t_\beta)^2\sigma^2}{(80-75)^2} = \frac{(1,96+1,645)^2}{5^2} \times (6,44)^2 \simeq 21$$

On prend $n_c = 22$

$$c = \pm\frac{1}{2}(U_\beta - U_\alpha)\sqrt{\frac{\Sigma^2}{n}} + \frac{(\theta_0+\theta_1)\beta}{2}$$

comme $\mu < \mu_0$ on choisit le signe "+"

$$\Rightarrow c = \frac{1}{2}(1,645 - 1,96)\times\frac{6,44}{\sqrt{22}} + \frac{75+80}{2}$$

$$= 77,283$$

Règle de décision

si $\bar{x} \leq 77,283 \longrightarrow$ on rejette H_0 avec une erreur de $\alpha\%$

si $\bar{x} > 77,283 \longrightarrow$ on accepte H_0.

Application : $\bar{x} = 78$: on accepte H_0.

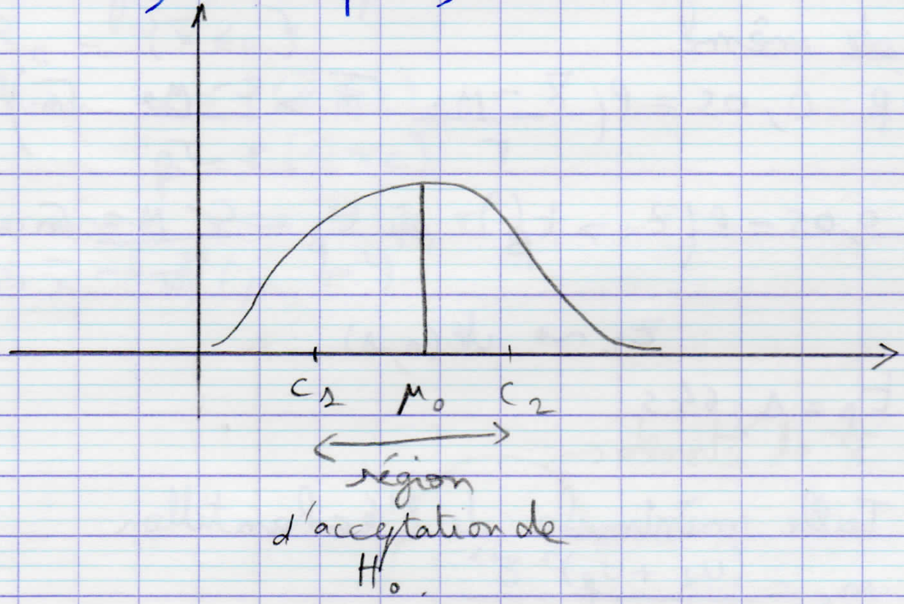
Exercice 2 :

(1) $H_0 : \mu = \mu_0 = 80$

$H_1 : \mu \neq \mu_0$ ($\mu < \mu_0$ ou $\mu > \mu_0$)

$H_D : |\mu - \mu_0| = d = 5$

(2) $\alpha = 0,05$ et $\beta = 0,05$



$R_c = Rc_1 \cup Rc_2$

$Rc_1 = \{ \overline{X} \leq c_1 \}$

$Rc_2 = \{ \overline{X} \geq c_2 \}$

$P_{H_0}(-Z_1 > -t_\alpha) = 0,0025$ or $\mathcal{L}(Z_1) = \mathcal{L}(-Z_1)$

$P_{H_0}(Z_1 > -t_\alpha) = 0,0025$

La région Rc_1

$0,0025 = \alpha = P_{H_0}(\overline{X} \leq c_1) = P(Z_1 \leq \frac{c_1 - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n})$

$-t_\alpha = 1,96$

$\beta = P_{H_D}(\overline{X} \geq c_1) = P_{H_D}\left(\frac{\overline{X} - \mu_1}{\sigma} \sqrt{n} > \underbrace{\frac{c_1 - \mu_1}{\sigma} \sqrt{n}}_{t_\beta} \right)$

$\mu < \mu_0 \Rightarrow |\mu - \mu_0| = -\mu + \mu_0 = 5$

$\mu_1 = \mu = \mu_0 - 5 = 75$

Stat
TD n°6
2/2

On trouve $t_\beta = 1,644$

4) La taille de l'échantillon minimale $n_c \simeq 22$

5) Région d'acceptation.

$[C_1, C_2]$ où $C_2 = 2\theta_0 - C_1$
$= 2\mu_0 - C_1$
$= 2\times 80 - 77,283 = 82,716.$

Donc si $\bar{x} \in [C_1, C_2] \rightarrow$ on accepte H_0.

Ici $\bar{x} = 83 \notin [C_1, C_2]$

$\Rightarrow C = \frac{1}{2}(1,645 - 1,96) \times \frac{6,44}{\sqrt{22}} + \frac{75+80}{2}$

$= 77,283$

(5) Règle de décision.

Si $\bar{x} \leq 77,283 \rightarrow$ on rejette H_0 avec une erreur de α%

Si $\bar{x} > 77,283 \rightarrow$ on accepte H_0.

Application : $\bar{x} = 78 \rightarrow$ on accepte H_0.

Exercice 3.

1) $H_0 : \mu = \mu_0 = 60$
$H_1 : \mu > \mu_0$
$H_p : \mu = \mu_1 = 70.$

2) $\alpha = 0,05$
$\beta = 0,05$

σ^2 inconnue $\rightarrow s^2$

a) échantillon $n = 11$, $s = 10$ et $\bar{x} = 65$

b) " $n = 21$, $s = 11$ et $\bar{x} = 64$

3) Région du rejet de H_0.

$R_c = \{\bar{X} \geq c\}$

H_0 :

$$\frac{\overline{X}-\mu_0}{S}\sqrt{n} \leadsto T(n-1)$$

dégré de liberté $D = n-1$

Pour $n = 11$ on trouve avec $\mu = 10$

$$\frac{c-\mu_0}{S}\sqrt{n} = t_\alpha = 1,812$$

$$\frac{c-\mu_1}{S}\sqrt{n} = t_\beta = 1,812.$$

$$0,05 = \alpha = P_{H_0}(\overline{X} \geq c) = P_{H_0}\left(\frac{\overline{X}-\mu_0}{S}\sqrt{n} \geq \underbrace{\frac{c-\mu_0}{S}\sqrt{n}}_{t_\alpha}\right)$$

$n_c = 13,1 \simeq 14.$

Avec $n = 21$

$n_c \simeq 14,4 \simeq 15.$

signe = "–"

On accepte l'hypothèse.

Ici on choisit l'échantillon 2 car il est mieux. C'est avec lui que les calculs sont faits.

Exercice 4.

$H_0 : \mu = \mu_0 = 100$

$H_1 : \mu \neq \mu_0$

$H_D : d = 10.$

→ on utilise la loi de Student.

on calcule des $t_{\frac{\alpha}{2}}$.

Réponses : $t_{\frac{\alpha}{2}} = t_\beta = 2,228$

$m_c = 5$

$[95;105] = [c_1; c_2]$.

On refuse 94 avec un risque de 0,025.