

Stat

TD m^o9

2/2

Statistique TD m^o9

Exemple : un forestier s'intéresse aux hauteurs moyennes de trois forêts.

Forêt 1	Forêt 2	Forêt 3
23,4	22,5	18,9
24,4	22,9	21,1
⋮	⋮	⋮

$$m_1 = 6$$
$$\bar{x}_1$$

$$m_2 = 5$$
$$\bar{x}_2$$

$$m_3 = 7$$
$$\bar{x}_3$$

Présentation des données

1) On dispose de trois échantillons

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$

2) On considère un seul échantillon de taille $n = m_1 + m_2 + m_3 = 18$

On définit une variable qualitative, ou facteur : le numéro de la forêt.

i \ j	1	2	3
1	x_{11}		
2	x_{12}		
3	x_{13}		
4			
5		x_{25}	
6			
7			x_{37}
	\bar{x}_1	\bar{x}_2	\bar{x}_3

x_{ij} : la hauteur du j^{ème} arbre de la forêt numéro i.

μ_i : la moyenne de la forêt i.

Modèle : $x_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}(n)$

Question: les forêts sont-elles équivalentes?

$$\Leftrightarrow \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 : H_0$$

Sous H_0 :

$$(1) \Leftrightarrow X_{ij} : \mu + \varepsilon_{ij} (2)$$

• Dans le grand modèle (1):

On estime la hauteur de la forêt par

$$\hat{\mu}_i = \bar{x}_i = \frac{1}{m_i} \sum_{j=1}^{m_i} x_{ij}$$

- la valeur prédite: $\hat{x}_{ij} = \hat{\mu}_i = \bar{x}_i$
- les résidus $\hat{\varepsilon}_{ij} = x_{ij} - \bar{x}_i$
- la somme des carrés résiduels

$$S_{CR_2} = \sum_{ij} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2$$

• Dans le modèle (2)

On estime la moyenne μ par:

$$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{m_T} \sum_{ij} x_{ij}$$

$$\text{avec } m_T = \sum m_i$$

• la somme des carrés totale:

$$S_{CR_0} = \sum_{ij} (x_{ij} - \bar{x})^2$$

On montre que

$$S_{CR_0} = \sum_{ij} (x_{ij} - \bar{x})^2 = \sum_{ij} \underset{\text{intra}}{(x_{ij} - \bar{x}_i)^2} + \sum_i \underset{\text{inter}}{(\bar{x}_i - \bar{x})^2}$$

$$S_T^2 = S_R^2 + S_A^2$$

Exercice 1

$$p = 4$$

$$m_i = 4$$

Hypothèse H_0 : on veut tester: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$

3) Tableau d'Anova

Variance	Somme des carrés	ddl
Facteur	$SS_A = 30,687 \approx 31$	$\nu_A = p - 1 = 3$
Résiduelle	$SS_R \approx 50$	$\nu_R = m_T - p = 12$
Total	$SS_T \approx 81$	$\nu_T = m_T - 1 = 15$

$$SS_A = \sum_{i=1}^p m_i (\bar{x}_i - \bar{x}_T)^2 = 4 \sum_{i=1}^4 (\bar{x}_i - \bar{x}_T)^2$$

moyenne
de tout le
tableau

$$\bar{x}_T = 12,065$$

$$\bar{x}_i = \frac{1}{m_i} \sum_{j=1}^{m_i} x_{ij}$$

$$\bar{x}_1 =$$

$$\bar{x}_2 = 12,25$$

$$\bar{x}_3 = 11$$

$$\bar{x}_4 = 10,75$$

$$SS_A = 4 \times [(\bar{x}_2 - 12,065)^2 + \dots +] = 30,687$$

$$SS_R = SS_T - SS_A$$

4) Le rapport

$$F_A = \frac{SS_A / \nu_A}{SS_R / \nu_R} = 9,48$$

à comparer à la valeur F_{α, ν_A, ν_R}
(où $\alpha = 10\%$) lue dans la table de F. On trouve :

$$F_{0,1, 3, 12} = 9,61$$

Décision : on a $F_A < F_{\alpha, \nu_A, \nu_R} \Rightarrow$ on accepte H_0
avec une erreur de 10%. On considère qu'il n'y a
pas de différence significative entre les bougies.

Exercice 3

Tableau d'Anova:	ddl
$SS_A = 1570,92$	$\nu_A = 5$
$SS_R = 268$	$\nu_R = 8$
$SS_T = 1838,92$	$\nu_T = 11$

$$F_A = 15,63 \text{ et } F_{\alpha, \nu_A, \nu_R} = 7,89 \quad (\alpha = 1\%)$$

(4) décision: on rejette H_0 .

Exo 4

Facteur A:
—— B:

1) Tableau d'Anova à 2 facteurs

$$p = 3$$

$$q = 2$$

$$m = 2$$

$$n_T = 12$$

$$2) SS_A = q \times m \sum_{i=1}^p (\bar{x}_{i.} - \bar{x}_T)^2$$

$$\text{on trouve } \bar{x}_T = \frac{1}{12} (1378) = 114,83$$

où $\bar{x}_{i.}$ = moyenne de la i -ème colonne.

$$\bar{x}_{1.} = 120$$

$$\bar{x}_{2.} = 114$$

$$\bar{x}_{3.} = 110,5$$

$$SS_A = 184,6632$$

$$3) F_{AB} = \frac{SS_{AB} / \nu_{AB}}{SS_R / \nu_R} = \frac{9}{16,7} = 0,56$$

à comparer à la valeur $F_{\alpha, \nu_{AB}, \nu_R}$
 $\alpha = 0,02$, on trouve:

Stat
TDm°9
2/2

$$F_{\alpha, \nu_{AB}, \nu_R} = 13,3.$$

4) Décision:

$$\text{On a } F_{AB} < F_{\alpha, \nu_{AB}, \nu_R}$$

on décide que l'expérience ne fait pas apparaître d'interaction

3)b) Influence du facteur A

$$\text{on calcul } F_A = \frac{SS_A / \nu_A}{SS_R / \nu_R} = 5,71$$

$$\text{à comparer à } F_{\alpha, \nu_A, \nu_R} = 5,14$$

$$F_A > F_{\alpha, \nu_A, \nu_R}$$

On refuse car le facteur A influence le résultat.

$$3)c) F_B = \frac{SS_B / \nu_B}{SS_R / \nu_R} = 2,97$$

$$F_{\alpha, \nu_B, \nu_R} = 5,99$$

$$F_B < F_{\alpha, \nu_B, \nu_R}$$