Statistique
TD n°7

1/2

Tests sur la variance
Détermination de la taille minimale de l'échantillon.

- On donne α, β, et n.

La région critique $W = \{(x_1, \dots, x_n) \mid S_{\bar{x}}^2 \underset{\geq}{\leq} c\}$

$$S_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{n=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

- Déterminer la taille minimale n^* e c.

. $H_0 : \sigma = \sigma_0$

. $H_1 : \sigma = \sigma_1$ avec $\sigma_1 > \sigma_2$

La région critique $W = \{S^2 \geq c\}$

$\alpha = P(\text{refuser } H_0 / H_0 \text{ vraie})$

$= P_{H_0}(W) = P(S^2 > c) = P_H\left(\frac{S^2}{\sigma_0^2} > \frac{c}{\sigma_0^2}\right) = P(\chi_{(n-1)} \geq C_\alpha = \frac{c}{\sigma_0^2})$

$$C_\alpha = \frac{c}{\sigma_0^2} \quad (1)$$

De même

$\beta = P(\text{accepter à tort } H_0)$

$= P_{H_1}(\bar{W}) = P_{H_1}(S^2 < c)$

$= P_{H_1}\left(\frac{S^2}{\sigma_1^2} < \frac{c}{\sigma_1^2} = C_\beta\right)$

$1 - \beta = P_{H_1}(\chi^2_{(n-1)} \geq C_{1-\beta})$

$$C_{1-\beta} = \frac{c}{\sigma_1^2} \quad (2)$$

$(1) \Leftrightarrow c = C_\alpha \sigma_0^2$

$(2) \Leftrightarrow c = C_{1-\beta} \sigma_1^2$

$C_\alpha \sigma_0^2 = C_{1-\beta} \sigma_1^2$

$$\frac{C_\alpha}{C_{1-\beta}} = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} \Longleftrightarrow \frac{C_{1-\beta}}{C_\alpha} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}$$

Cette formule dépend de n implicitement.
La détermination de la taille minimale se fait pas à pas, en cherchant la valeur entière n^* tel que le rapport $\frac{C_\alpha}{C_{1-\beta}}$ soit le plus proche possible de $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2}$ (qui est connu).

Exemple

$n = 21$, $H_0 : \sigma_0 = 2$

$H,$ $H_1 : \sigma_1 = 4$ $\sigma_0 < \sigma_1$

$\alpha = \beta = 0,05$

C_α est telle que :

$0,05 = \alpha = P(\chi^2_{(20)} \geq C_\alpha)$

La table donne $C_\alpha = 31,40$

$1 - \beta = 0,95 = P(\chi^2_{(20)} > C_{0,95})$

La table de $\chi^2_{(20)}$ donne :

$C_{0,95} = 10,851$

Ici la rapport $\rho^2 = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2} = \frac{1}{4} = 0,25$

et : $\frac{C_{1-\beta}}{C_\alpha} = \frac{10,851}{31,40} = 0,345$ (à $n = 21$).

n	11	15	12	21
$\frac{C_{1-\beta}}{C_\alpha}$	0,232	0,291	0,249	0,345

est le plus proche de $\rho^2 = 0,25$

Donc la taille minimale $n^* = 12$

Exercice 1

Page 54 : $\theta = \sigma^2$ et $\theta_0 = \sigma_0^2$

1) $H_0 : \theta = \theta_0$

$H_1 : \theta > \theta_0$

$H_D : \theta = \theta_1$ ($\theta_1 = \sigma_1^2$ avec $\sigma_1^2 \neq \sigma_0^2$)

2) on fixe α et β

2) la région critique $W = \{(X_1, \dots, X_n) \mid S^2 \geq c\}$

La statistique utilisée est $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$

On sait que $\frac{(n-1)S^2}{\theta_0} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ suit une loi du $\chi^2_{(n-1)}$.

$\alpha = P_{H_0}(W) = P_{H_0}\left(\chi^2_{(n-1)} \geq \frac{c(n-1)}{\sigma_0^2} = x^2_{\alpha,\nu}\right)$

$\beta = P_{H_1}(W) = P_{H_1}\left(\chi^2_{(n-1)} < \frac{c(n-1)}{\sigma_1^2} = x^2_{\beta,\nu}\right)$

$1-\beta = P\left(\chi^2_{(n-1)} \geq \frac{c(n-1)}{\sigma_1^2} = x^2_{1-\beta,\nu}\right.$

3°) Déterminer la taille minimale de l'échantillon

$\rho^2 = \frac{\theta_1}{\theta_0} = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2}$ et comparer avec $\frac{x^2_{\alpha,\nu}}{x^2_{1-\beta,\nu}}$

4°) Calcul de la valeur critique.

$c = \frac{\theta_0}{n-1} \chi^2_{\alpha,\nu}$

Retour à l'exo 1.

(1) $H_0 : \sigma_0^2 = 0{,}01225$

$H_1 : \sigma > \sigma_0$

$H_0 : \sigma = \sigma_1 = 0{,}0245$

(2) $\alpha = 0{,}01 = \beta \quad n = 25$

(3) Taille minimale

$\nu = n - 1 = 24$

$W = \{ (X_1, \ldots, X_n) \quad S^2 \geq c \}$

$0{,}01 = \alpha = P_{H_0} \left(\chi^2_{(24)} \geq x_{\alpha,\nu} = \frac{(n-1)c}{\sigma_0^2} \right)$

La table de $x^2_{(\nu)}$ donne $x_{\alpha,\nu} = 42{,}980$

avec $\nu = 24$

et $\alpha = 0{,}01$

et $\underset{0{,}99 =}{1-\beta} = P \left(\chi^2_{(24)} \geq x^2_{1-\beta,\nu} = \frac{c(n-1)}{\sigma_1^2} \right)$

$\rightarrow x^2_{1-\beta,\nu} = 10{,}856$

4) Le rapport $S^2 = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} = \frac{0{,}02245^2}{0{,}01225^2} = 4$

et $\frac{x^2_{\alpha,\nu}}{x^2_{1-\beta,\nu}} = \frac{42{,}980}{10{,}856} = 4$

$n^* = 25 = n$

5) La valeur critique c.

$c = \frac{\sigma_0}{n-1} x^2_{\nu,\alpha} = \frac{0{,}01225^2}{24} \times 42{,}980 = 0{,}00026$

Décision $s^2 = 0{,}000384 > c$

On rejette donc l'hypothèse nulle avec une proba $\alpha = 1\%$.

Stat

TD n°7

2/2

Exercice 2

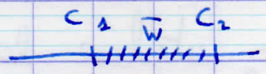
§ 8.3 p55

1) $H_0 : \theta = \theta_0$

$H_1 : \theta \neq \theta_0 \Longleftrightarrow \theta > \theta_0$ ou $\theta < \theta_0$

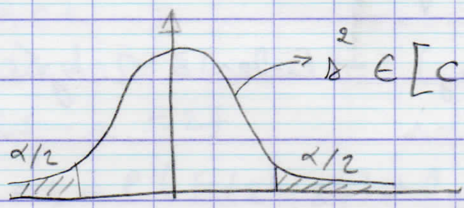
$H_0 : \theta = \theta_1$ ou $\theta = \theta_2$.

2) La région d'acceptation



On accepte H_0 si $s^2 \in [c_1, c_2]$

3)



3) $\frac{\alpha}{2} = P\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > x^2_{1,\nu}\right) = P\left(X^2_{(n-1)} > x^2_{\alpha/2,\nu}\right)$

$1-\beta = P_{H_1}\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_1^2} = X^2_{(n-1)} > x^2_{1-\beta,\nu}\right)$

$\delta_1^2 = \frac{\theta_1}{\theta_0}$; $\delta_2^2 = \frac{\theta_2}{\theta_0}$

4) Taille minimale n^* telle que

$\frac{x^2_{\frac{\alpha}{2},\nu}}{x^2_{1-\beta,\nu}} \simeq \delta_1^2$

5) Région d'acceptation de H_0.

$\overline{W} = [c_1, c_2]$

avec $c_1 = \frac{\theta_0}{n-1} x^2_{\frac{\alpha}{2},\nu}$

$c_2 = 2\theta_0 - c_1$

6) Décision : si $s^2 \in \overline{W}$

on accepte H_0

Ex 3

$H_0 : \theta_x = \theta_y$

$H_1 : \theta_x > \theta_y$

$H_0 : \dfrac{\theta_x}{\theta_y} = \rho^2$

On utilise la statistique

$\dfrac{S_x^2}{S_y^2}$ on montre que $\dfrac{n}{\sigma_x^2} S_x^2 \sim \chi^2_{(n-1)}$

$\dfrac{m}{\sigma_y^2} S_y^2 \sim \chi^2(m-1)$

Sous H_0 $(\sigma_x^2 = \sigma_y^2)$:

$\dfrac{S_x^2}{S_y^2} \sim F(\nu_x, \nu_y)$ → Fisher à 2 degrés de liberté

$\nu_x = n-1$

$\nu_y = m-1$

La région $W = \{(x_1, \dots, x_n, \sigma_1, \sigma_m) \mid \dfrac{S_x^2}{S_y^2} > c\}$

$\alpha = P(W) = P_{H_0}(F_\alpha(\nu_x, \nu_y) > f_{\alpha, \nu_x, \nu_y})$

$\beta = P_{H_1}(\bar{W}) = P(F_\beta(\nu_x, \nu_y) \leq f_{\beta, \nu_x, \nu_y})$

$1-\beta = P(F_{1-\beta}(\nu_x, \nu_y) > f_{1-\beta, \nu_x, \nu_y})$

5) la taille maximale n_x^*, n_y^* est telle que

$\rho^2 = \dfrac{\theta_x}{\theta_y} = f_{\alpha, \nu_x, \nu_y} \times f_{1-\beta, \nu_x, \nu_y}$

6) Décision :

Si $\dfrac{S_x^2}{S_y^2} \leq f_{\alpha, \nu_x, \nu_y} = c$

on accepte H_0

$m_x = 25$
$s_x^2 = 5,2$
$m_y = 25$
$s_y^2 = 3,8$

(1) $H_0 : \sigma_x = \sigma_y$
$H_1 : \sigma_x > \sigma_y$
$H_1 : \sigma_x^2 = 8\,\sigma_y^2$
$\iff \left(\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\right)^2 = \rho_1^2 = 8$

$\alpha = \beta = 0,01$
$\nu_x = 25 - 1 = 24$
$\nu_y = 25 - 1 = 24$
$\alpha = 0,01 = P(F(24,24) > f_{\alpha,24,24})$
$\rightarrow f_{\alpha,24,24} \simeq 2,82$

$1-\beta = 0,99 = P(F(24,24) > f_{1-\beta,24,24})$
$\rightarrow f_{1-\beta,24,24} \simeq 2,82$

On remarque que $f_{\alpha,24,24} \times f_{1-\beta,24,24} = (2,82)^2$

et $\rho^2 = \frac{s_x}{s_y} = 8$

On trouve $n_x = n_y = 23$