Statistique

Exercice 6.1

$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Y mesure le diamètre des cylindres } suit une loi

Z ______________ des anneaux } normale

Les paramètres inconnus

Pour X : μ et σ^2

Pour Y et Z : Covariance $(Y,Z) = \text{Cov}(Y,Z)$

coefficient de corrélation $\rho(Y,Z)$

(1) Estimation ponctuelle de ces paramètres :

Pour X :

$$\mu \longrightarrow \hat{\mu} = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\sigma_x^2 \rightarrow S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \quad \text{estimateur biaisé de } \sigma_x^2$$

$$S_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \quad \text{(sans biais)}$$

Application : $n = 10$

$$x = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i = \frac{1}{10}(19,6 + \cdots + 19,4) = 19,72$$

$$s^2 = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(x_i - 19,72)^2 = 0,61$$

$$s_1^2 = \frac{1}{9} * \sum_{i=1}^{10}(x_i - 19,72)^2 = 0,671$$

Pour Y et Z $(n = 8)$

$$\text{cov}(Y,Z) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - E(Y)(z_i - E(Z))$$

$$\hat{\text{cov}}(Y,Z) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (y_i - \bar{y})(z_i - \bar{z})$$

$\bar{y} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^{8} y_i = 5,0125$

$\bar{z} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^{8} z_i = 4,975$

$$\rho(Y,Z) = \frac{\overbrace{\text{cov}(Y,Z)}^{=0,029}}{\sigma_Y \cdot \sigma_Z} \longrightarrow \hat{\rho}(Y,Z) = \frac{\hat{\text{cov}}(Y,Z)}{S_Y S_Z}$$

où :

$$S_Y = \sqrt{\frac{1}{8} \sum_{i=1}^{8} (y_i - \bar{y})^2} = 0,202$$

$$S_Z = \sqrt{\frac{1}{8} \sum_{i=1}^{8} (z_i - \bar{z})^2} = 0,178$$

$\hat{\rho}(Y,Z) = 0,803$: forte covariance

(2) Intervalle de confiance pour μ et σ_X^2

a) Intervalle de confiance pour μ avec σ_X^2 inconnue.

On cherche un intervalle $[a ; b]$ tq $P(\mu \in [a,b]) = 1-\alpha$.

Intervalle symétrique $P(\mu \in [-a,a]) = 1-\alpha$.

On choisit la statistique

$$U(X_1, \ldots, X_m, \theta) = \sqrt{m}\,\frac{\bar{X} - \theta}{S} \qquad (\theta = \mu)$$

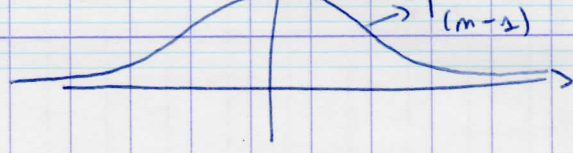
Loi de U :

Ici $m = 10 < 30$ et σ_Y^2 inconnue, donc :

U suit une loi de student à $m-1$ degrés de liberté

$$\text{Inter de Conf}(\mu) = \left[\bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{m}} ; \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2}} ; \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{m}}\right]$$

où $t_{\frac{\alpha}{2}}$ est à chercher dans la table de la loi de student à $m-1$ ddl.



$$P\left(T_{(n-1)} > \frac{T\alpha}{2}\right) = \frac{\alpha}{2}$$

Ici $n = 10$, $D = 9$

$\alpha = 0,1$ $\quad \frac{\alpha}{2} = 0,05$

$$P\left(T_{(9)} > t_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0,05 \Rightarrow t_{\frac{\alpha}{2}} = 1,833$$

Intervalle de Confiance (μ)

$$= \left[19,72 - 1,833 \times \frac{0,823}{\sqrt{10}} ; 19,72 + 1,833 \times \frac{0,825}{\sqrt{10}}\right]$$

$\frac{\sqrt{61}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{61}}{10} \simeq \frac{\sqrt{64}}{10} = 0,8$

$$= [19,22 ; 20,23]$$ sûr à 10%

Intervalle de confiance pour σ_x^2 avec μ inconnue.

On choisit la statistique

$$U(X_1, \ldots, X_n, \theta) = \frac{1}{\theta}(n-1)S^2$$

$P(\sigma_x^2 \in [a, b]) = 1 - \alpha$

$(\theta = \sigma_x^2)$

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$$

Si on connaît la moy : n degrés de liberté.

loi du χ^2

t pas symétrique

Suit une loi du χ^2 à $n-1$ ddl.

Intervalle de confiance

$$Idc = \left[\frac{nS^2}{b} ; \frac{nS^2}{a}\right]$$

$$\begin{cases} P(\chi^2_{(n-1)} < a) = \frac{\alpha}{2} \\ P(\chi^2_{(n-1)} > b) = \frac{\alpha}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} P(\chi^2_{(n-1)} > a) = 1 - \frac{\alpha}{2} \\ P(\chi^2_{(n-1)} > b) = \frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

$\delta = 10 - 1 = 9$

$P(\chi^2_9 > a) = 0,95 \Rightarrow a = 3,325$

$P(\chi^2_9 > b) = 0,05 \qquad b = 16,919$

$$P\left(\mathcal{N}(0,1) > t_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{\alpha}{2}$$

D'où $IDC(\sigma_x^2) = \left[\frac{10 \times 0,61}{16,92} ; \frac{10 \times 0,61}{3,32}\right] = [0,361 ; 1,84]$

95% des cas.

(3) $\sigma_x^2 = 0,69$

$\rightarrow$ loi normale avec $s^2 = 0,69$

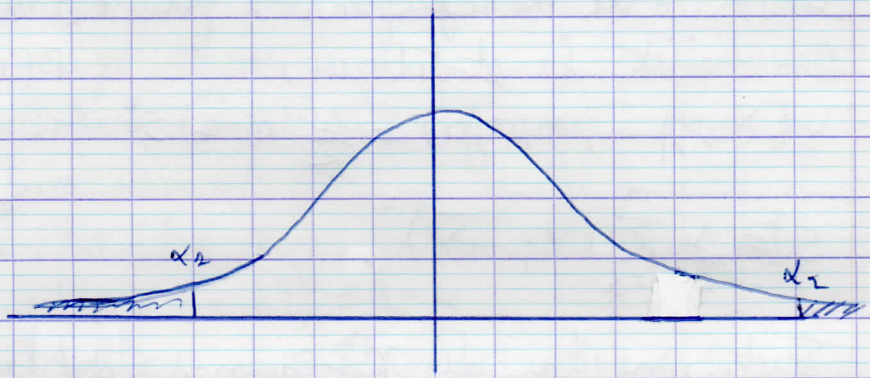
Int de Confiance $\rightarrow t_{\frac{\alpha}{2}} = 1,645$

loi normale

$[19,29 ; 20,15]$

$\Rightarrow$ on réduit l'intervalle de confiance.

(2)(b) Pour moyenne σ inconnue



$$Idc(\mu) = \left[\bar{x} - t_{\alpha_1} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + t_{\alpha_2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

$P(T_{(n-1)} > t_{\alpha_1}) = \alpha_1 = 0,02$ et

$P(T_{(n-1)} > t_{\alpha_2}) = \alpha_2 = 0,03$

(4) $Y \rightarrow \mathcal{N}(\mu_1, \sigma^2)$

$Z \rightarrow \mathcal{N}(\mu_2, \sigma^2)$

$W = Z - Y \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu_2 - \mu_1, \sigma^2 + \sigma^2)$

$W \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu_W, \sigma_W^2)$

$U(W_1, \ldots, W_n, \theta) = \sqrt{n} \cdot \frac{\overline{W} - \theta}{S}$ $\rightsquigarrow$ Suit une loi de student à $n = n_1 + n_2$ ddl.

2/2

$IdC(\mu_w) = [\overline{W} - t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} ; \overline{W} + t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}]$

$P(T_{(n_1+n_2-2)} > t_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{\alpha}{2}$ $(\alpha = 0{,}05)$

$\overline{W} = \overline{Z} - \overline{Y}$ S^2 est un estimateur de $\sigma_w^2 = 2\sigma^2 \longrightarrow S^2 = 2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2$

$S^2 = 0{,}015$

$n_1 + n_2 - 2 = 14$
Loi de Student à 14 ddl et $t_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{0{,}5}{2} = 0{,}025$

$[-0{,}13, 0{,}55]$

Exercice 3
(2) → p 35 poly. (fin, milieu)
(1) IdC : $[1{,}205 ; 1{,}225]$
(2) $n = \left(\frac{z_{\alpha/2} \times \sigma}{R_0}\right)^2$

$n = \frac{1{,}96 \cdot 0{,}01}{0{,}015}$