Statistique
TD n° 3

Exercice 3.1

$X \backslash Y$	1	3	5	6	Loi de X p_X
2	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{5}{20}$	0	$\frac{9}{20}$
3	$\frac{2}{20}$	0	$\frac{1}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{7}{20}$
7	0	$\frac{1}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{4}{20}$
Loi de Y p_Y	$\frac{3}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{8}{20}$	$\frac{5}{20}$	1

Exercice 3.2

X v.a ayant pour densité

$f(x) = 11(1-x)^{10}$ pour $0 \le x \le 1$

On cherche t_0 tq :

$P(X \geq t_0) = 10^{-22}$ or

$$P(X \geq t_0) = \int_{t_0}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{t_0}^{1} f(x)\,dx = \int_{t_0}^{1} 11(1-x)^{10}\,dx$$

$$= 11 \int_{t_0}^{1} (1-x)^{10}\,dx = 11\left[\frac{-(1-x)^{11}}{11}\right]_{t_0}^{1} = (1-t_0)^{11}$$

$$P(X \geq t_0) = 10^{-22} \Leftrightarrow (1-t_0)^{11} = 10^{-22}$$

$$11 \ln(1-t_0) = -22\ln(10)$$

$$\ln(1-t_0) = -\frac{22}{11}\ln(10) \Leftrightarrow \ln(1-t_0) = \ln(10^{-2})$$

$$\Leftrightarrow 1-t_0 = 10^{-2} \Leftrightarrow t_0 = 1-10^{-2} = 0{,}99$$

Exercice 3

(1) Soit M la v.a "la machine tombe en panne".

On veut calculer $P(M > S) = 1 - P(M \le S)$

$F(x) = P(X \le x)$ a) $P(M \le S) = P(\text{chaque } X_i \le S) = P(\cap \{X_i \le S\})$

$$= \prod_{i=1}^{7} P(X_i \le S) = (F(S))^7$$

$$P(M > S) = 1 - (F(S))^7$$

(b) $P(M) \le S) = P($ au moins des $X_i \le S)$

$= 1 - P(\text{tous les } X_i > S)$

$= 1 - [1 - F(S)]^7$

$P(\Pi > S) = [1 - F(S)]^7$

c) $P(\Pi \leq S) = P(\text{un seul des } X_i \leq S) = C_7^1 F(S) = 7F(S)$

$P(\Pi > S) = 1 - 7F(S)$

d) $P(\Pi \leq S) = C_7^6 F(S) = 7F(S)$

(2) Chaque $X_i \sim$ Bernoulli

$S_7 = \sum_{i=1}^{7} X_i \sim \mathcal{B}(7, p)$

$P = P(X_i \geqslant S) = \int_S^{+\infty} f(x)\,dx$

$1 - F(S) = \int_S^{+\infty} f(x)\,dx$

$E(S_7) = 7P = 7\int_S^{+\infty} f(x)\,dx$

$= 7(1 - F(S))$

Exercice 4.1

$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$

$S_1^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{(X_k - \overline{X})^2}{n}$

$S^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{(X_k - \overline{X})^2}{n-1}$

$S^2 = \frac{n}{n-1} \times \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$

$S^2 = \frac{n}{n-1} S_1^2$

1) $\overline{x} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{4} x_i = 2,5$

$s_1^2 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{4} (x_i - 2,5)^2 = 0,75$

$s^2 = \frac{4}{3} \times 0,75 = 1$

(2) $\overline{X}$ est une v.a. (estimateur de la moyenne théorique)

· Si n est grand ($n \gg 30$) $\overset{TCL}{\Longrightarrow}$ $\overline{X}$ suit (approximativement) une loi normale

· Si n est petit ($n \ll 30$) mais les X_i suivent une loi normale alors $\overline{X}$ suit aussi une loi normale.

· Si n est petit et les X_i ne suivent pas une loi normale. On ne peut sur la loi normale.

3) $E(\overline{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X)$

$$= \frac{n\,E(X)}{n} = E(X)$$

$E(\overline{X}) = E(\overline{X})$

$\overline{X}$ est un estimateur sans biais de $\mu = E(X)$

$V(\overline{X}) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \frac{n\,V(X)}{n^2} = \frac{V(X)}{n}$

$V(\overline{X}) = \frac{V(X)}{n}$

4) Mq $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim \mathcal{N}(0,1)$ $\qquad \mu = \mu_X = E(X)$

Application du TCL

$\frac{S_n - E(S_n)}{\sigma_{S_n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$

Ici $S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}$

Donc : $\frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\frac{V(X)}{n}}} = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma_X}\sqrt{n} \sim \mathcal{N}(0,1)$

5) $S_1^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (X_i^2 - 2X_i\overline{X} + \overline{X}^2)$

$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} E(\overline{X})^2 = E(\overline{X}^2)$ $\cdot\, E(S_1^2) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} E(X_i^2) - 2 \cdot \frac{1}{m} E(X_i\overline{X}) + E(\overline{X}^2)$

$= E(X^2) - 2E\left[\overline{X} \cdot \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} X_i\right] + E(\overline{X}^2)$

$= E(X^2) - E(\overline{X}^2)$

$\cdot\, V(X) = E(X^2) - E(\overline{X}^2) = V(X) + (E(X))^2 - [V(\overline{X}) + (E(\overline{X}))^2]$

$= \sigma_x^2 + \mu_x^2 - \left(\frac{\sigma_x^2}{m} + \mu_x^2\right)$

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$E(X^2) = V(X) + (E(X))^2$

D'où : $E(S_1^2) = \sigma_x^2 - \frac{\sigma_x^2}{m} = \left(1 - \frac{1}{m}\right)\sigma_x^2$

$E(S_1^2) = \frac{m-1}{m}\sigma_x^2$

$S^2 = \frac{m}{m-1} S_1^2$

Mais $E(S^2) = E\left(\frac{m}{m+1} S_1^2\right) = \frac{m}{m-1} E(S_1^2)$

$= \frac{m}{m-1} \cdot \frac{m-1}{m} \sigma_x^2$

$E(S^2) = \sigma_x^2$

Exercice 4.2

Loi des grands nombres $\quad E(X) = \frac{1}{2}$

$\overline{X} = Y_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} X_i$

$\overline{X} \longrightarrow E(X)$

$\overline{X} \longrightarrow 1/2$

erreur $= |\overline{X} - \frac{1}{2}|$ proche de 0

On trace

$(1, Y_1)$

$(2, Y_2)$

$\vdots$

(k, Y_k)

Exercice 4.3

1) $S_p = \sqrt{12p}\left(\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} U_k - \frac{1}{2}\right)$

On tire un échantillon de taille 12 : $U_i \sim [0,1]$

2) $S_{12} = \sum_{i=1}^{12} U_i - 6 \sim \mathcal{N}(0,1)$