Statistique
Cours 6.

Tests d'hypothèses sur la moyenne

Test simple (unilatéral) de la moyenne

Modélisation d'un test d'une hypothèse

$H_0 : \theta = \theta_0$ | θ estimation qu'on cherche (eg. moyenne μ)

Hypothèse nulle

Hyp nulle : la plus pénalisante.

$H_1 : \theta \neq \theta_0$ $\begin{pmatrix} \theta > \theta_0 \\ \theta < \theta_0 \end{pmatrix}$

Hypothèse alternative

[Parfois on utilise l'hypothèse de détection
$H_0 : \theta = \theta_1$ $[\theta_1 \neq \theta_0]$

	H_0 vraie	H_1 vraie
Accepter H_0	$1-\alpha$ Accepter H_0 à raison	β Accepter H_0 à tort
Refuser H_0 (Accepter H_1)	α Refuser H_0 à tort	$1-\beta$ Refuser H_0 à raison

α risque de 1e espèce
β ——— 2e ———

Si le test conclut qu'il faut accepter H_0 $\Rightarrow$ il y a suffisament de raisons pour que H_0 soit vérifiées.
Si le test conclut qu'il faut rejeter H_0 $\Rightarrow$ il y a suffisament de raisons pour que H_1 soit vraie.

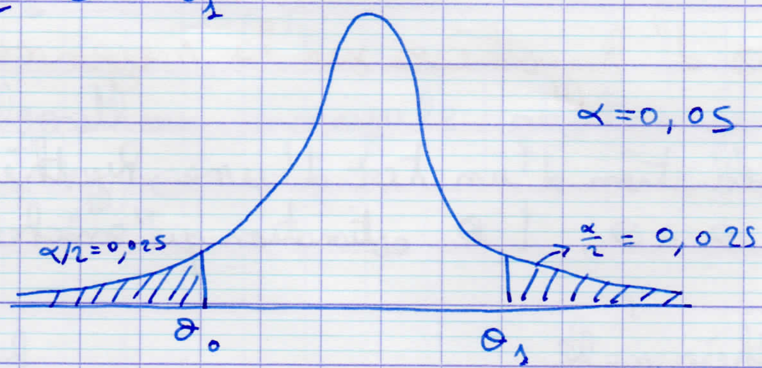
On rejette H_0 avec seuil α
——— H_1 ——— β

$\alpha \geqslant \beta$
Le test le plus puissant pour le m̂ α est celui qui a un β minimal.

Test double (bilatéral)

$H_0 : \theta = \theta_0$ $\qquad \theta_0 < \theta_1$

$H_1 \quad \theta = \theta_1$



Démarche pour effectuer un test.

0° modéliser le pb

1° Définir les hypothèses H_0, H_1 (H_D)

2° Déterminer α et β

3° Définir la v.a. qui est utilisée pour le test.

4° Dessiner les courbes correspondant à α et β

Test simple de moyenne avec une valeur de référence.

- les variances des populations sont :
  - connues
  - inconnues

1° $H_0 : \theta = \theta_0$ (θ_0 valeur de référence)

$H_1 : \theta < \theta_0$ (ou $\theta > \theta_0$)

$H_D : \theta = \theta_1$

2° Déterminer α et β

3° Calcul de la taille minimale de l'échantillon

3.1. Calcul de la valeur de U_α

On sait

$$P\left(\frac{\theta_0 - \overline{X}}{\sigma/\sqrt{n}} > U_\alpha\right) = \alpha$$

avec :

$$U_\alpha = \begin{cases} Z_\alpha \sim \mathcal{N}(0,1) & \text{si la variance est connue} \\ T_{n-1,\alpha} \sim t_{n-1,\alpha} & \text{si ——— inconnue} \end{cases}$$

$\downarrow$ Student avec $n-1$ ddl.

3.2 Calcul de la valeur de U_β

On sait $P\left(\frac{\overline{X} - \theta_0}{\sigma/\sqrt{n}} > U_\beta\right) = \beta$

avec

$$\begin{cases} Z_\beta \sim \mathcal{N}(0,1) & \text{si variance connue} \\ T_{n-1} \sim t_{n-1,\beta} & \text{——— inconnue} \end{cases}$$

3.3. Calcul de la taille minimale de l'échantillon

$$n_c = \frac{(U_\alpha + U_\beta)^2 \Sigma^2}{(\theta_0 - \theta_1)_0^2}$$

avec

$$\Sigma^2 = \begin{cases} \sigma^2 & \text{si variance connue} \\ S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 \end{cases}$$

3.4. Si $n_c > n$ (n taille de l'échantillon
il faut recommencer avec un échantillon de taille $n' \geq n_0$.

Si $n_c \leq n$ alors on peut continuer

3.5 Calcul de la valeur du critère C.

$$C = \pm \frac{1}{2} (U_\beta - U_\alpha) \sqrt{\frac{\Sigma^2}{n}} + \frac{(\theta_0 + \theta_1)_0}{2}$$

On prend "+" si $H_1 : \theta < \theta_0$

"−" — $H_1 : \theta > \theta_0$

3.5 Décision

Si $H_1 : \theta > \theta_0$, alors l'hypothèse H_0 si $\bar{X} \leq C$

Si $H_2 : \theta < \theta_0$, ______________________ $\bar{X} \geq C$

L'algorithme manipule quatre paramètres.

$$\begin{array}{cccc} \alpha, & \beta, & n_C, & C \\ \downarrow & \uparrow & \downarrow & \uparrow \end{array}$$