Intervalle de Confiance
Cours 5 statistique

$[a, b] \subset \mathbb{R}$

$P(\mu \in [a, b]) = 1 - \alpha$

α risque (seuil) de l'estimation

$\alpha = 5\%$

va $X_1 \ldots X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

→ intervalle pour la moyenne

→ intervalle pour la variance

va $X_1 \ldots X_n \sim \mathcal{B}(1, p)$

→ intervalle pour la moyenne

Données $X_1, \ldots, X_n$ va iid $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j$, $S^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (X_j - \overline{X})^2$

$S_1^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} (X_j - \overline{X})$

Tirage $x_1, \ldots, x_n$, $\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j$

$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (x_j - \overline{x})^2$, $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} (x_j - \overline{x})^2$

$\overline{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

Intervalle de confiance pour la moyenne :

Pb 1 : Trouver $a < b$, tq la moyenne est dans $[a, b]$ avec un risque $\alpha \in [0; 1]$.

Pb 2 : On a fixé la marge d'erreur R_0 et le risque α et on cherche la taille n de l'échantillon.

Variance est connue ($\Rightarrow \sigma^2$) ou
Variance inconnue ($\Rightarrow S^2$) et $n \geq 30$.

Estimateur : $U(X_1, \dots, X_n) = \sqrt{n}\,\dfrac{\overline{X} - \theta}{\Sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$

avec $\Sigma = \begin{cases} \sigma & \text{si variance connue} \\ S & \text{sinon} \end{cases}$

Solution du problème 1

$$P_\mu\left[a \leq \sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - \mu}{\Sigma} \leq b \right] = 1 - \alpha$$

$$P_\mu(A \leq \mu \leq B) = 1 - \alpha$$

$$P_\mu\left[\overline{X} - b\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \mu \leq \overline{X} + a\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 1 - \alpha$$

$$P_\mu\left\{ \mu_\circ \left[\overline{X} - b\frac{\Sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + a\frac{\Sigma}{\sqrt{n}}\right]\right\} = 1 - \alpha$$

1° A cause de la symétrie de la loi normale on peut exiger que $a = -b$.
2° La longueur de l'intervalle doit être minimale $\Rightarrow a = z_{\alpha/2} \sim \mathcal{N}(0,1)$

Variance inconnue et $n < 30$
Estimateur

$$U(X_1 \dots X_n ; \theta) = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - \theta}{\Sigma} \sim t_{n-1}$$

t_{n-1} loi de Student avec $n-1$ ddl.

$-a = b = t_{n-1, \alpha/2}$

$$P_\mu \left\{ \mu \in \left[\bar{x} - t_{n-1,\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{n+1,\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \right] \right\} = 1-\alpha$$

Sol pb 2

$$n = \left[\frac{z_{\alpha/2} \Sigma}{R_0} \right]^2$$

<u>Intervalle de confiance par la variance</u>
- moyenne μ de la population connue :

Estimateur $U(X_1, \dots, X_n ; \theta) = \frac{1}{\theta} \sum_{j=1}^{n} (X_j - \mu)^2$

$$= \frac{n S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_n$$

<u>Intervalle de confiance par la variance $\theta = \sigma^2$</u> - moyenne μ de la population connue.

Estimateur $U(X_1 \dots X_n ; \theta) = \frac{1}{\theta} \sum_{j=1}^{n} (X_j - \underset{\bar{x}}{\mu})^2 = \frac{n S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$

loi du khi 2 avec n reel

Sol pb 1 : $a = \chi^2_{n, 1-\alpha/2}$, $b^2 = \chi^2_{n-1,\alpha/2}$

$$P_{\sigma^2} \left\{ \sigma^2 \in \left[\frac{n S^2}{b}, \frac{n S^2}{a} \right] \right\} = 1-\alpha$$

Sol pb 2

$$n = \frac{R_0}{S^2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}$$

Estimation de la proposition
(Contrôle qualité)

$P_q (q \in [a, b]) = 1-\alpha$

$X_1, \dots, X_n$

$$X_i = \begin{cases} 0 \text{ si ok} \\ 1 \text{ si HS} \end{cases}$$

q $\quad q = \bar{x}$

$$\hat{q} = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum X_i$$ fréquence d'article HS

$X_i \sim B(1, \hat{q})$

Si $n\hat{q} \geq 5$ et $n(1-\hat{q}) \geq 5$ alors

$$\hat{q} = \bar{X} \sim \mathcal{N}\left(q, \frac{q(1-q)}{n}\right)$$

$$Z_\alpha = \frac{\hat{a} - q}{\sqrt{\frac{q(1-q)}{n}}}$$

1° Estimateur de q : $\hat{p} = \Sigma$

$$P_Q\left\{ q \in \left[\bar{x} - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\Sigma(1-\bar{x})}{n}}, \bar{x} + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\Sigma(1-\bar{x})}{n}} \right.\right.$$

Q $\quad \hat{Q}$ estimateur v.a

q $\quad \hat{q}$ ——— cte

2° max de l'intervalle de confiance $\Rightarrow$ max de la variance

$$\frac{\partial(q(1-q))}{\partial q} = \quad q = \frac{1}{\Sigma}$$

$$P_Q\left\{ q \in \left[\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{0,5}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{0,5}{\sqrt{n}} \right] \right\} = 1 - \alpha$$