

# Statistique

## Cours 2

$$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_m\}$$

événements élémentaires

$$1^\circ X : E \in \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow G \subset \mathbb{R}$$

Variable aléatoire résultat de la réalisation

$$X = x;$$

$$\text{Soit } x \in G : X^{-1}(x) \in \Omega$$

$$2^\circ X^{-1}(x) \in E \in \mathcal{P}(\Omega)$$

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad X = \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \forall \omega_i : X = \omega_i$$

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \dots, \{1, 2\}, \dots, \{1, 2, \dots, 6\}\}$$

$$a = \{\emptyset, \{1, 3, 5\}, \{2, 4\}, \{6\}\}$$

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4$

$$G = \{0, 3, 6, 6\}$$

$$P(X=6) = 1/2$$

$$(X_1, X_2, \dots) = (X_i)_{i=1, \dots}$$

loi de probabilité

$$(X_m)_{m \in \{1, 2, \dots, 3\}}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} X_m = X$$

Convergences de lois continues

1° Convergence presque sûre

$$P[\omega / \lim_{m \rightarrow \infty} X_m(\omega) = X(\omega)] = 1 \quad \forall \omega \in \Omega - \Omega_0 \text{ où}$$

$$\Omega_0 \text{ ensemble nul } [P(\omega_0) = 0] \quad \Omega_0 \neq \emptyset$$

$\Omega_0$  discret

$$P(\omega) = 0$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} X_m(\omega) = X(\omega)$$

$P_\Omega$

2° Convergence en probabilités  
 $P \left[ \lim_{m \rightarrow \infty} |X_m(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon \right] = 1 \quad \forall \varepsilon > 0$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} X_m(\omega) \stackrel{P}{=} X(\omega)$$

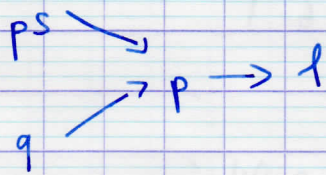
3° Convergence en loi  
 si  $\lim_{m \rightarrow \infty} F_{X_m}(x) = F(x)$  où  $F_{X_m}, F$  fct continues

$$\lim_{m \rightarrow \infty} F_{X_m}(x) \stackrel{P}{=} F(x)$$

4° Convergence quadratique

$$\lim_{m \rightarrow \infty} X_m \stackrel{q}{=} X \text{ si}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} E[|X_m - X|^2] = 0$$



Lois de grands nombres

$$X_1, X_2, \dots, X_m \Rightarrow \bar{X} = E(X_1 \dots X_m)$$

La suite de v.a.  $(X_m)_{m=1,2,\dots}$  suit la loi des grands nombres

si  $\lim_{m \rightarrow \infty} \bar{X}_m \stackrel{P}{=} \mu$  loi forte  
 $\stackrel{P.D.}{=} \mu$  loi faible

$$(X_i)_{i=1,2,\dots,m}$$

$$S_m = \sum_{i=1}^m X_i$$

↓  
v.a.

$X_i$  va iid  
variables indépendantes identiquement distribuées

Théorème Central Limite (TCL)

$$Z = \frac{S_n - n\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$