Statistique
Cours 2

$\Omega = \{w_1, \dots, w_n\}$

événements élémentaires

1° $X : E \in P(\Omega) \longrightarrow G \subset \mathbb{R}$

Variable aléatoire résultat de la réalisation

$X = x_i$

Soit $x \in G : X^{-1}(x) \in \Omega$

2°. $X^{-1}(x) \in E \subseteq P(\Omega)$

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $X = \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \forall w_i : X = w$

$P(\Omega) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \dots, \{1, 2\}, \dots \{1, 2, \dots, 6\}\}$

$a = \{\emptyset, \{1, 3, 5\}, \{2, 4\}, \{6\}\}$

$\quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4$

$G = \{0, 9, 6, 6\}$

$P(X = 6) = 1/2$

$(X_1, X_2, \dots) = (X_i)_{i=1,\dots}$

loi de probabilité

$(X_n)_{n \in \{1, 2, \dots\}}$

$\lim_{n \to \infty} X_n = X$

Convergences de lois continues

1° Convergence presque sûre

$P[w / \lim_{n \to \infty} X_n(w) = X(w)] = 1$ $\forall w \in \Omega - \Omega_0$ où

Ω_0 ensemble nul $[P(w_0) = 0]$ $\Omega_0 \neq \emptyset$

Ω_0 discret

$p(w) = 0$ $\qquad \lim_{n \to \infty} X_n(w) \underset{ps}{=} X(w)$

2° Convergence en probalités

$$P\left[\left|\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) - X(\omega)\right| < \varepsilon\right] = 1 \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \underset{P}{=} X(\omega)$$

3° Convergence en loi

si $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F(x)$ où F_{X_n}, F fct continues

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) \underset{l}{=} F(x)$$

4° Convergence quadratique

$\lim_{n\to\infty} X_n \underset{q}{=} X$ si

$$\lim_{n\to\infty} E\left[|X_n - X|^2\right] = 0$$

$$\begin{tikzcd}
ps \arrow[dr] & & \\
& p \arrow[r] & l \\
q \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Lois de grands nombres

$X_1, X_2, \dots, X_n \Rightarrow \overline{X} = E(X_1 \dots X_n)$

La suite de v.a. $(X_n)_{n=1,2,\dots}$ suit la loi des grands nombres

si $\lim_{n\to\infty} \overline{X}_n \underset{P}{=} \mu$ loi forte

$\underset{ps}{=}$ loi faible

$(X_i)_{i=1,2,\dots,n}$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$S_n \to$ v.a

X_i va iid
variables indépendantes identiquement distribuées

Théorème Central Limite (TCL)

$$Z = \frac{S_n - n\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$$