Statistique
Analyse de la variance

A un facteur contrôlé
Facteur A a comme valeurs $a_1, a_2 \dots a_p$

mesures

$$
\begin{array}{cccc|c}
x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{p1} & x_{.1} \\
x_{12} & x_{22} & & x_{p2} & x_{.2} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
x_{1m_1} & x_{2m_2} & & x_{pm_p} & \\
\hline
x_{1.} & x_{2.} & & x_{p.} & x_p
\end{array}
$$

H_0: Le facteur A n'a pas d'influences sur les mesures.

Tableau de l'analyse de la variance

Sources de variation	Somme des carrés	Ddl
du au Facteur A	$SS_A = \sum_{i=1}^{p} \frac{\left(\sum_{k=1}^{m_i} x_{ik}\right)^2}{m_i} - \frac{1}{m_T}\left(\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{m_i} x_{ik}\right)^2$ $m_T = \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{m_i} x_{ik}$	$\nu_A = p-1$
du au Facteur résiduel R	$SS_R = SS_T - SS_A$	$\nu_R = m_T - p$
Totale	$SS_T = \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{m_i} x_{ik}^2 - \frac{1}{m_T}\left(\sum_{i=2}^{p}\sum^{m_i} x_{ik}\right)^2$	$\nu_T = m_T - 1$

Décision :

$$F_C = \frac{SS_A / \nu_A}{SS_R / \nu_R}$$

Si $F_C \leq F_{\alpha, \nu_A, \nu_R}$ alors H_0 acceptée

Si $F_C > F_{\alpha, \nu_A, \nu_R}$ — H_0 rejetée $\Rightarrow a_i$ et a_j

Analyse des contraintes

$$S_R = \sqrt{\frac{m_T \, SS_R}{m_{i} \times p}}$$

On compare a_i et a_j

H_0 : les moyennes de a_i et a_j sont identiques.

Si $|\overline{x_{i.}} - \overline{x_{j.}}| > \sqrt{(p-1)F_{\alpha, p-1, m_T - p}} - S_R \sqrt{\frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j}}$

alors H_0 rejetée

Ex :

$H_0 : \overline{x_{1.}} - \overline{x_{2.}}$

$H_0 : \overline{x_{2.}} - \overline{x_{3.}}$ $\Rightarrow$ H_0 rejetée $\overline{x_{1.}} \neq \overline{x_{3.}}$

car il y a une erreur $\Rightarrow$ pas de transivité de α %

Deux facteurs contrôlés

B \ A	a_1	a_2	...	a_i ... a_p
b_1 ⋮	x_{111} x_{112} ⋮ x_{11m}			x_{i11} x_{i12} ⋮ x_{i1m}
b_j ⋮	x_{1j1} x_{1j2} ⋮ x_{12m}	x_{2j1} x_{2j2} ⋮ x_{2jm}		x_{ij1} x_{ij2} ⋮ x_{ijm}
b_q				

$x_{1.}$

$$x_T = \sum_i \sum_j \sum_k x_{ijk}$$

$$x_{i.} = \sum_{j=1}^{q} \sum_{k=1}^{m} x_{ijk}$$

$$\overline{x_{i.}} = \frac{1}{q \cdot m} \overline{x_i}$$

m observations par modalité de A et modalité de B

Source de variation		
Facteur A	$SS_A = \sum_{i=1}^{p} \frac{\left(\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{m} x_{ijk}\right)^2}{mq} - W$	$\nu_A = p-1$
Facteur B	$SS_B = \sum_{j=1}^{q} \frac{\left(\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{m} x_{ijk}\right)^2}{mp}$	$\nu_B = q-1$
Facteur AB	$SS_{AB} = SS_T - SS_A - SS_B - SS_R$	$\nu_{AB} = (p-1)(q-1)$
Facteur résiduel	$\sum_{i=1}^{p}\sum\sum x_{ijk}^2 - \frac{1}{k}\sum^{p}\sum^{q}\left(\sum^{m} x_{ijk}\right)^2$	$\nu_R = pq(n-1)$
Totale	$SS_T = \sum^{p}\sum^{q}\sum^{m} x_{ijk}^2 - W$	$\nu_T = mpq-1$

$$W = \frac{1}{mpq}\left(\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{m} x_{ijk}\right)^2$$

$$F_{AB} = \frac{SS_{AB}/\nu_{AB}}{SS_R/\nu_R}$$

Fisher : $F_{\alpha,\nu_{AB},\nu_R}$

Si $F_{AB} < F_{\alpha,\nu_{AB},\nu_R} \Rightarrow H_0$ acceptée

$\Rightarrow$ l'interaction A et B n'influence pas les mesures.

- Pour le facteur A.

Si $\frac{SS_A/\nu_A}{SS_R/\nu_R} \leq F_{\alpha,\nu_A,\nu_R} \Rightarrow$ le facteur A n'influence pas les mesures.

- Pour le facteur B

Si $\frac{SS_B/\nu_B}{SS_R/\nu_R} \leq F_{\alpha,\nu_B,\nu_R} \Rightarrow$ le facteur B n'influence pas les mesures

Si $F_{AB} > F_{\alpha, \nu_{AB}, \nu_R} \longrightarrow H_0$ rejetée

L'interaction de A et B a une influence sur les mesures.

Si $\frac{SS_A / \nu_A}{SS_{AB} / \nu_{AB}} \leq F_{\alpha, \nu_A, \nu_{AB}} \Rightarrow$ le facteur A n'influence pas.

Si $\frac{SS_B / \nu_B}{SS_{AB} / \nu_{AB}} \leq F_{\alpha, \nu_B, \nu_{AB}} =$ ———