| | | |
|---|---|---|
| EISTI Ecole Internationale des Sciences du Traitement de l'Information | **COURS DE SIMULATION** | |
| Rédigé par : Hervé de Milleville | | Ref : COU-*PRO-DYN* |
| Revu par : Jean-Paul Forest et Yannick Le Nir | | Approuvé par : |

# 1 Présentation

De nombreux systèmes d'entreprise comportent des composantes stochastiques. Etudier dans la réalité ces phénomènes peut s'avérer très couteux voire dangereux. L'objet de ce cours est de montrer comment on peut simuler ces systèmes pour en étudier leurs propriétés. Cette étude est d'autant plus utile que le système est complexe

# 2 Le générateur de nombre au hasard

Tous les ordinateurs offrent la possibilité de générer à la demande des nombres au hasard. Il faut faire attention à cette phrase car l'expression "générer des nombres au hasard" ne veut pas dire grand-chose quand on ne précise pas la loi de l'aléa. En fait, les simulateurs proposés permettent de faire des réalisations d'une suite $(X_n)_{n\in N}$ de VA identiquement distribuées et indépendantes de loi uniforme sur [0,1]. Chaque langage de programmation utilise cette possibilité de l'ordinateur à travers des fonctions. Il faut alors se référer à la documentation du langage pour avoir la syntaxe exacte.
Exemple :

- En java : Math.random()
- En scilab : rand('uniform')
- En C : (double)rand()/(double)RAND_MAX

# 3 Simuler une variable discrète

On considère une VA X discrète numérique pouvant prendre n valeurs $x_1$, ..., $x_n$.

| $x_1$ | ... | $x_i$ | ... | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $p_1 = P(X = x_1)$ | ... | $p_i = P(X = x_i)$ | ... | $p_n = P(X = x_n)$ |
| $q_1 = P(X \leq x_1)$ | | $q_i = P(X \leq x_i)$ | | $q_n = P(X \leq x_n)$ |

Remarque : p1 = $q_1$ et $q_n = 1$.

## 3.1 Théorème

### *3.1.1 Enoncé*

Pour la suite, on pose $q_0 = 0$ et $x_0 = -\infty$. On note U une variable uniforme sur [0,1] et on définit une variable Y de la façon suivante

$$Y(\omega) = x_i \Leftrightarrow U(\omega) \in ]\, q_{i-1}, q_i]$$

alors la variable Y a la même loi que X.

### *3.1.2 Preuve*

Rappel : Si U est une variable uniforme alors $0 \leq a \leq b \leq 1 \Rightarrow P(a \leq U \leq b) = b - a$.

X et Y prennent les mêmes valeurs par définition de Y. D'autre part $P(Y(\omega) = x_i) = P(U(\omega) \in ]\, q_{i-1}, q_i]) = q_i - q_{i-1} = p_i$. CQFD.

## 3.2 Algorithme de simulation d'une VA discrète

Le théorème précédent nous permet de trouver facilement un algorithme de simulation d'une variable discrète. On nomme "random" la fonction simulant une variable uniforme sur [0,1].

```
fonction simulerDiscX(E X tableau(N) : Reel, E P tableau(N) : Reel, n : Entier) :
Reel
```

```
        u ← random()
        i  ← 1
        q ← P(1)
        Tantque u > q Faire
                i ← i +1
                q ← q + P(i)
        Fin Tantque
        retourner X(i)
Fin fonction
```

Il est facile de généraliser cet algorithme à une variable discrète mais sur un ensemble de valeurs dénombrable.

# 4 Simulation d'une variable continue

Nous allons établir un résultat équivalent à celui démontré dans le paragraphe précédent.

## 4.1 Théorème

### 4.1.1 Enoncé

Soit X une variable continue et $F_X$ sa fonction de répartition définie, continue et inversible alors la VA U = $F_X$ o X suit une loi uniforme sur [0,1]. En d'autre terme si U est une variable uniforme sur [0,1] alors $F_X^{-1}$o U a la même loi que X.

### 4.1.2 Preuve

Par définition, la variable U est à valeurs dans [0,1] car $F_X$ prend ses valeurs dans [0,1].
Pour $u \in [0,1]$, $P(U < u) = P(F_X \text{ o } X < u) = P(F_X^{-1} \text{ o } F_X \text{ o } X < F_X^{-1}(u)) = P(X < F_X^{-1}(u)) = F_X(F_X^{-1}(u)) = u$. CQFD

## 4.2 Algorithme de simulation d'une VA continue

Pour simuler une variable X, il suffira donc d'écrire le code de l'inverse de la fonction de répartition. On note FXInverse cette fonction.

```
        fonction simulerContX()
                Retourner FXInverse(random())
        Fin fonction
```

## 4.3 La méthode de Box-Müller

Soient $U_1$ et $U_2$ deux variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées dans ]0,1].

Soient :

$$Z_0 = R\cos(\Theta) = \sqrt{-2\ln U_1}\cos(2\pi U_2)$$

et

$$Z_1 = R\sin(\Theta) = \sqrt{-2\ln U_1}\sin(2\pi U_2).$$

Alors $Z_0$ et $Z_1$ sont indépendantes et suivent chacune une loi normale centrée réduite.