**U.S.T.O M.B / Faculté des Sciences / Dépt. Informatique** **1eAnnée MASTER M1**

Durée: 1h30’ **E X A M E N** Mars 2011

**RECHERCHE OPERATIONNELLE**

**Exercice n°1 : (3 Pts)**

Après résolution de la relaxation continue d’un PLNE, on obtient le tableau optimal suivant :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| MAX | | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | Sol.  base |
| CB | XB | x1 | x2 | x3 | t1 | t2 | t3 |
| 1 | x3 | 0 | 0 | 1 | -2 | 4 | -1/13 | 1 |
| 1 | x2 | 0 | 1 | 0 | -1/13 | 2 | 1/26 | 55/13 |
| 2 | x1 | 1 | 0 | 0 | 0 | -1 | -1/13 | 2 |
| cj - zj | | 0 | 0 | 0 | -3/13 | -5 | -1/13 | -120/13 |

Quelles sont les contraintes à ajouter pour continuer la résolution du PLNE dans le cas de l’utilisation de : 1. La méthode Branch and Bound

2. La méthode de Gomory

Si on continue la résolution avec l’une de ces deux méthodes, la valeur de la fonction économique   
va-t-elle diminuer ou augmenter ? Justifier.

**Exercice n°2 : (5 Pts)**

On considère un jeu sous la forme stratégique :

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | J2 |  |
|  |  | **R1** | **R2** | **R3** |
|  | **L1** | (0,0) | (1,2) | (2,1) |
| J1 | **L2** | (1,3) | (4,5) | (3,1) |
|  | **L3** | (1,1) | (2,3) | (1,2) |

1. Existe-il un équilibre en stratégie dominante ?
2. Si les utilités associées à l’issue (L3, R3) deviennent (7,2) et ceux associées à (L3, R1) sont (1, 4),   
   y a-t-il un équilibre en stratégie dominante ? Le jeu est-il solvable par dominance successive ? Dans ce cas quel est l’équilibre ?
3. Trouver le(s) équilibre(s) de Nash en prenant en compte les modifications de la question 2.

Pour chacune des questions, vous expliquerez brièvement votre raisonnement.

**Exercice n°3 : (7 Pts)**

Etant donné un graphe orienté représenté par la matrice d’incidence suivante :

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | - | 5 | 12 | 3 |
| 2 | 6 | - | 8 | 17 |
| 3 | 18 | 6 | - | 11 |
| 4 | 5 | 10 | 11 | - |

Soit à résoudre le problème TSP asymétrique correspondant à ce graphe (Sommet de départ 1) :

1. Donner le nombre maximal de solutions.
2. Trouver la solution obtenue par un algorithme glouton.
3. Déterminer la solution optimale en utilisant la programmation dynamique.

**Exercice n°4 : (5 Pts)**

Soit le programme mathématique suivant :

1- Ecrire ce programme sous la forme matricielle.

2- Utiliser la relaxation semi-définie pour résoudre ce programme.

3- Quelle est la valeur de la solution optimale ?

**Bon courage**

**BAREME EXAMEN**

**Exercice n°1 : (3 Pts)**

1. Branch an Bound : on crée deux problèmes P1, P2 :
   1. P1 avec ajout de la contrainte x2≤ 4 0.5pt
   2. P2 avec ajout de la contrainte x2≥ 5 0.5pt
2. Coupes de Gomory : On ajoute la contrainte (coupe) suivante : 1pt

La valeur de la solution optimale va **diminuer** car en cas de max, la valeur de la solution optimale de la relaxation continue du PLNE (Z\*) représente un majorant. 1pt

**Exercice n°2 : (5 Pts)**

1. **Existe-il un équilibre en stratégie dominante (ESD) ? (1.5pts)**

Joueur Stratégie Utilités

J1  L1 0,1,2

J1 L2 1,4,3 🡺 **L2** stratégie dominante car u(**L2**)≥u(L1) et u(**L2**)≥u(L3) 0.5pt

J1 L3 1,2,1

J2  R1 0,3,1

J2 R2 2,5,3 🡺 **R2** stratégie dominante car u(**R2**)≥u(R1) et u(**R2**)≥u(R3) 0.5pt

J2 R3 1,1,2

Donc, oui il existe un E.S.D. s\*=(L2,R2) avec u(s\*) = (4,5) 0.5pt

1. **Si les utilités associées à l’issue (L3, R3) deviennent (7,2) et ceux associées à (L3, R1) sont   
   (1, 4), y a-t-il un équilibre en stratégie dominante ? Le jeu est-il solvable par dominance successive. Dans ce cas quel est l’équilibre ? (2pts)**

Le jeu devient dans ce cas :

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | J2 |  |
|  |  | **R1** | **R2** | **R3** |
|  | **L1** | (0,0) | (1,2) | (2,1) |
| J1 | **L2** | (1,3) | (4,5) | (3,1) |
|  | **L3** | *(1,4)* | (2,3) | *(7,2)* |

1. Recherche d’un ESD

Joueur Stratégie Utilités

J1  L1 0,1,2

J1 L2 1,4,3

J1 L3 1,2,7

Aucune stratégie dominante pour J1, donc pas d’E.S.D 0.25pt

1. Résolution du jeu par le processus de dominance successive (PDS)

J1 : L1 dominée par L2 (ou L3 ou les deux) 🡺 Eliminer L1 0.25pt

J2 : R3 dominée par R2 (ou R1 ou les deux) 🡺 Eliminer R3 0.25pt

J1 : L3 dominée par L2 🡺 Eliminer L3 0.25pt

J2 : R1 dominée par R2 🡺 Eliminer R1 0.25pt

Rq : L’étudiant peut commencer par le joueur J2 et éliminer R3 au début.

Obtention d’une issue unique qui est la solution optimale du jeu s\*=(L2,R2) avec u(s\*)=(4,5) 0.25pt

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | J2 |  |
|  |  | **~~R1~~** | **R2** | **~~R3~~** |
|  | **~~L1~~** | ~~(0,0)~~ | ~~(1,2)~~ | ~~(2,1)~~ |
| J1 | **L2** | ~~(1,3)~~ | **(4,5)** | ~~(3,1)~~ |
|  | **~~L3~~** | *~~(1,4)~~* | ~~(2,3)~~ | *~~(7,2)~~* |

Le tableau sur 0.5pt

1. **Trouver le(s) équilibre(s) de Nash en prenant en compte les modifications de la question 2. (1.5pts)**

Joueur Stratégie Marquage des stratégies des autres joueurs

J1 L1 J2 : Marquer R2 (max=2)

J1 L2 J2 : Marquer R2 (max=5) 0.25pt

J1 L3 J2 : Marquer R1 (max=4)

J2 R1 J1 : Marquer L2 et L3 (max=1)

J2 R2 J1 : Marquer L2 (max=4) 0.25pt

J2 R3 J1 : Marquer L3 (max=7)

2 issues sont doublement marquées (L3,R1) et (L2,R2) mais seulement l’issue (L2,R2) représente un équilibre de Nash car u(L2,R2) ≥ u(L3,R1) 0.5pt

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | J2 |  |
|  |  | **R1** | **R2** | **R3** |
|  | **L1** | (0,0) | (1,2)x | (2,1) |
| J1 | **L2** | (1,3)o | (4,5)xo | (3,1) |
|  | **L3** | (1,4)xo | (2,3) | (7,2)o |

Le tableau sur 0.5pt

**Exercice n°3 : (7 Pts)**

1. TSP asymétrique à N villes 🡺 Nombre max de solutions (N-1)!

N=4 villes 🡺 3 ! = 6 solutions 0.5pt

1. Algorithme glouton

* ZGlouton = 39 1pt

1. **Programmation dynamique**

Formule de récurrence :

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | - | 5 | 12 | 3 |
| 2 | 6 | - | 8 | 17 |
| 3 | 18 | 6 | - | 11 |
| 4 | 5 | 10 | 11 | - |

**|S|=0 (S={})**

D[2, ∅] =c21 = 6, 0.25pt

D[3, ∅] =c31 = 18, 0.25pt

D[4, ∅] =c41 = 5 0.25pt

**|S|=1 (S à 1 seul élément)**

D[2,{3}] = c23 + D[3, ∅] = 8+18 = 26, 0.25pt D[2,{4}] = c24+ D[4, ∅] = 17+5 = 22 0.25pt

D[3,{2}] = c32 + D[2, ∅] = 6+6 = 12, 0.25pt D[3,{4}] = c34+ D[4, ∅] = 11+5 = 16 0.25pt

D[4,{2}] = c42 + D[2, ∅] = 10+6 = 16, 0.25pt D[4,{3}] = c43+ D[3, ∅] = 11+18 = 29 0.25pt

**|S|=2 (S à 2 éléments)**

D[2,{3,4}]=min{c23 + D[3,{4}] , c24+ D[4,{3}]} = min{8+16 , 17+29} = 24 0.5pt

D[3,{2,4}]=min{c32 + D[2,{4}] , c34+ D[4,{2}]} = min{6+22 , 11+16} = 27 0.5pt

D[4,{2,3}]=min{c42 + D[2,{3}] , c43+ D[3,{2}]} = min{10+26 , 11+12} = 23 0.5pt

Et Enfin :

0.5pt

La table obtenue : 0.75pt

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | {} | {2} | {3} | {4} | {2,3} | {2,4} | {3,4} |
| 2 | 6 | - | 26 | 22 | - | - | 24 |
| 3 | 18 | 12 | - | 16 | - | 27 | - |
| 4 | 5 | 16 | 29 | - | 23 | - | - |

Le détail du cycle hamiltonien optimal peut être retrouvé en retenant l’indice j minimisant l’équation de récurrence détaillé précédemment. Ainsi on obtient la solution optimale suivante : 0.5pt

Zopt = 26

**Exercice n°4 : (5 Pts)**

Soit le programme mathématique suivant :

1. **Notation Matricielle**  **(1.75pts)**

Max Z = CX + XT H X 0.25pt

Avec AX = b

*C* = [-8 , 0] 0.25pt

0.5pt

0.25pt

0.25pt

1. **Résolution**  **(2,75pts)**

Max Z =

*L* = + 0.5pt

* x1 = 2 0.25pt
* x2 = 2 0.25pt
* 0.25pt

1. Valeur de la solution optimale **(0.5pt)**

Z = 4 (2 – 4 – 4 ) = -24 0.5pt