Optimisation sans contraintes

Méthodes du Gradient

Dans ce travail pratique, on vous demande de programmer sous Scilab les méthodes du Gradient :

1. à pas fixe
2. à pas optimal

Ces deux méthodes sont expliquées dans la présentation attachée à cette activité.

I Méthode du gradient à pas fixe

On testera le programme avec les fonctions suivantes :

1. $J(x_1,x_2)=4(x_1^2+x_2^2)-2x_1x_2-6(x_1+x_2)$;
   Domaine de recherche : $-2 < x_j < 2$, $j=\{1, 2\}$;
   1 seul minimum : $(x_1, x_2)^* = (1, 1)$; $J((x_1, x_2)^*) = -6$.
2. $J(x_1, x_2) = [1 + (x_1 + x_2 + 1)^2 . (19 - 14x_1 + 3x_1^2 - 14x_2 + 6x_1x_2 + 3x_2^2)] .[30 + (2x_1 - 3x_2)^2 . (18 - 32x_1 + 12x_1^2 + 48x_2 - 36x_1x_2 + 27x_2^2)]$;
   Domaine de recherche : $-2 < x_j < 2$, $j=\{1, 2\}$;
   4 minima locaux ;
   1 minimum global : $(x_1, x_2)^* = (0, -1)$; $J((x_1, x_2)^*) = 3$.
3. $J(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2$.
   domaine de recherche : $-5 < x_j < 5$ pour $j = \{1,2,3\}$
   1 seul minimum : $(x_1, x_2, x_3)^* = (0,0,0)$; $J((x_1, x_2, x_3)^*) = 0$.

II Méthode du gradient à pas optimal

On testera le programme avec la fonction quadratique :

$$J(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2 .$$

Domaine de recherche : $-5 < x_j < 5$ pour $j = \{1,2,3\}$

III Méthode du gradient à pas fixe pour les fonctions quadratiques

$$J(x)=\langle Ax,x\rangle + \langle b,x\rangle$$

Les hypothèses de forte convexité et gradient lipschitzien sont vérifiées pour les fonctionnelles quadratiques. Lorsque A une matrice symétrique définie positive, la constante de forte convexité est la plus petite valeur propre de A et la constante du gradient lipschitzien est la plus grande.

1. Ecrire un programme sous Scilab pour évaluer la borne maximale du pas de gradient.
2. Tester le programme du gradient à pas fixe pour les cas suivants :

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

b. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 8 \\ & 8 & 4 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

IV Méthode du gradient à pas optimal pour les fonctions quadratiques

Pour les fonctions quadratiques, programmer la méthode du gradient à pas optimal puis la tester pour les deux exemples précedents.