Exercice 11: Productivité marginales et TMST

Pour chacune des fonctions de production suivantes :

$$Q_1 = AL^{\alpha}K^{\beta} \quad ; \quad \alpha, \beta > 0$$

$$Q_2 = a.L\,bK$$

$$Q_3 = L^{1/4}K^{3/4}$$

$$Q_4 = -9[L^2 - K^2] + 80\,LK$$

1. Calculer les productivités marginales. Commenter ?
2. En déduire la valeur du taux marginal de substitution technique entre le travail et le capital.
3. Estimer les élasticités de substitution.

Solution :

1. Les productivités marginales des facteurs s'établissent comme suit :

- $\frac{dQ_1}{dL} = A\alpha L^{\alpha-1}K^{\beta} = \alpha\frac{Q_1}{L}$ $\qquad$ $\frac{dQ_1}{dK} = A\beta L^{\alpha}K^{\beta-1} = \beta\frac{Q_1}{K}$
- $\frac{dQ_2}{dL} = a$ $\qquad$ $\frac{dQ_2}{dK} = b$
- $\frac{dQ_3}{dL} = \frac{1}{4}.\frac{Q_3}{L}$ $\qquad$ $\frac{dQ_3}{dK} = \frac{3}{4}.\frac{Q_3}{K}$
- $\frac{dQ_4}{dL} = -18L + 80K$ $\qquad$ $\frac{dQ_4}{dK} = 18K + 80L$

Commentaire (cf.cours)

2. Le TMST est le rapport des productivités marginales. Il découle des écritures précédentes :

- $TMST_{LK_1} = \frac{\alpha K}{\beta L}$
- $TMST_{LK_2} = \frac{a}{b}$
- $TMST_{LK_1} = \frac{K}{3L}$
- $TMST_{LK_1} = \frac{-18L+80K}{18K+80L} = \frac{-9L+40K}{9K+40L}$

Exercice 12 : Courbe d'échelle, sentier d'expansion ou eutope.

Soit une firme dont la fonction de production pour le bien x est :

$$Q_x = 10L^{\alpha}K^{\beta}$$

On sait que l'élasticité de la production par rapport au travail est de 0.25, et que l'output est multiplié par 8, quand les outputs sont multipliés par 16.

1. Calculez l'équation du sentier d'expansion de la firme lorsque le prix des inputs K et L sont respectivement 20 et 10.
2. Quel est le montant du profit pour un budget de production de 300.000€ si les facteurs sont rémunérés à leurs productivités marginales.
3. Quel est le prix du produit x.

Solution :

1. L'équation du sentier d'expansion :

$$Q_x = 10L^{\alpha}K^{\beta} \; ; \;\; \alpha, \beta > 0$$

Il faut calculer les valeurs de α et β :

$$\alpha = 0.25$$

D'après l'énoncé, on peut écrire par ailleurs :

$$8 \times Q_x = 10 \times (16L)^{\alpha}(16K)^{\beta}$$

$$8Q = 16^{\frac{1}{4}+\beta}Q$$

$$8 = 16^{\frac{1}{4}+\beta}$$

$$\beta = \frac{1}{2}$$

La situation d'optimisation est caractérisée par l'égalité :

$$\frac{Pm_L}{Pm_K} = \frac{P_L}{P_K}$$

$$\text{L'équation du sentier d'expansion } \; K = L$$

2. Le montant du profit :

$$\text{L'identité d'Euler : } \frac{3}{4}Q = KPm_K + LPm_L$$

En multipliant chaque membre par P_x :

$$\frac{3}{4}QP_x = KPm_KP_x + LPm_LP_x$$

$$\frac{3}{4}RT = KP_K + LP_L$$

$$\frac{3}{4}RT = 300.000$$

$$RT = 400.000$$

$$\textit{profit est donc de } 100.000$$

3. Le prix du bien x

$$P_x = \frac{RT}{Q} = 40$$

Exercice 13 : Coût(s) de production de courte/longue période

Une entreprise produit un bien Q en utilisant un équipement K.
Le coût total de production s'écrit : .

$$CT_K = 0{,}35Q^3 - 59.6Q^2 + 3420Q + 4000$$

La courbe de coût de longue période est donnée par l'expression :

$$CT = 0{,}25Q^3 - 40Q^2 + 2500Q\,.$$

1. Déterminer la valeur de Q pour laquelle le coût total de courte période est égal au coût total de longue période.
2. Donner la représentation graphique des courbes obtenues.
3. Quelle devra être la politique d'investissement de l'entreprise pour obtenir l'égalité entre les coûts moyens et les coûts marginaux de courte et de longue période ?

Solution :

1. La valeur de Q est celle pour laquelle la courbe CT_K est en contact avec la courbe CT.
On sait que la courbe du coût total de longue période ($CTLP$) est la courbe enveloppe des courbes de coût de courte période.
L'égalité entre les coûts totaux implique celle des coûts marginaux et des coûts moyens.
La valeur de Q qui assure $CT_K = CT$ est celle pour laquelle :
$$\frac{dCT_K}{dQ} = \frac{dCT}{dQ} \quad \leftrightarrow \quad C_{mK} = C_m$$
Et
$$\frac{CT_K}{Q} = \frac{CT}{Q} \quad \leftrightarrow \quad C_{MK} = C_M$$

$$Cm_K = 1.05Q^2 - 119.2Q + 3420$$
$$Cm = 0{,}75Q^2 - 80Q + 2500$$
Ce qui donne : $0.30Q^2 - 39.2Q + 920 = 0$
Les racines de cette équation sont : $Q = 100$ $\qquad Q = 30.67$
La valeur de Q qui permet d'avoir $CT_K = CT$ est celle qui vérifie $C_{MK} = C_M$ soit. $Q = 100$
Pour $Q = 100$
$$C_M = C_{MK} = 1000$$
$$CT_K = CT = 100.000$$
$$C_{mK} = C_m = 2000$$
2. Représentation graphique des courbes $CT_K, CT, C_M, C_{MK}, C_{mK}$ et C_m $\quad (cf.cours)$
3. A partir du graphique, $C_M = C_{MK} = C_{mK} = C_m$ pour $Q = 80$
A ce point : $C_{mK} = C_m = 900$
Et $CT_K = CT = 72.000$
Pour atteindre ce point, il faut que le producteur réduise son équipement de manière à ce que la courbe de coût moyen de courte période ait sont minimum au même point que la courbe de coût moyen de longue période (cf. cours)

Exercice 14 : TMST et rendements d'échelle

1. Définissez le taux marginal de substitution du facteur travail : $TMS_{L/K}$
2. Calculez le TMS correspondant au niveau $L = 4$ de la fonction $Q = k^2 L$ pour $Q = 16$, en mettant en évidence deux procédés de calcul.
3. Cette fonction exprime-t-elle des rendements d'échelle ?

Solution :

1. $TMS_{L/K}$ mesure l'aptitude d'un facteur (ici travail) à remplacer l'autre (capital) pour réaliser un niveau donné de production.
2. $TMS_{L/K}$ pour $L = 4$ avec $Q = k^2 L = 16 \rightarrow K = 2$
   - $TMS_{L/K} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial L}}{\frac{\partial Q}{\partial K}} = \frac{K^2}{2KL} = 0.25$
   - *généralisation*: $Q = L^\alpha K^\beta$

$$TMS_{L/K} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial L}}{\frac{\partial Q}{\partial K}} = \frac{\alpha\left(\frac{Q}{L}\right)}{\beta\left(\frac{Q}{K}\right)}\frac{K}{2L} = 0.25$$

3. $\alpha + \beta = 3 > 1 \rightarrow$ cette fonction exprime des rendements d'échelle (croissants) puisqu'elle est homogène de degré 3.

Exercice15 : Fonction de production, productivité des facteurs et profit

Soit une entreprise produisant un produit x. Sa fonction de production est de la forme :

$$X = -2a^2 - b^2 + 4ab + 2\,;$$

X représente la quantité du bien x. a et b représentent les quantité respectives des deux facteurs de production utilisés : A et B.

Le prix de x : $P_x = 10$. Le prix de A : $P_A = 2$ Le prix de B : $P_B = 4$

Quelle quantité du bien x l'entreprise doit-elle produire pour que son profit soit maximum ?

Solution :

$$\pi = RT - CT$$
$$RT = X.P_x = 10.(-2a^2 - b^2 + 4ab + 2)$$
$$CT = aP_A + bP_B = 2a + 4b$$
$$\pi = -20a^2 - 10b^2 - 40ab + 20 - 2a - 4b$$

Le π est maximum si et seulement si $\frac{\partial \pi}{\partial a} = 0$ et $\frac{\partial \pi}{\partial b} = 0$

Ce qui donne le résultat suivant :

$$(a^*; b^*) = \left(\frac{1}{4}; \frac{3}{10}\right) \quad et \quad X^* = 2.085$$

Notons que la condition de maximisation de profit se traduit par l'égalisation de la productivité marginale en valeur de chaque facteur avec son prix.