Micro-Économie

Par Nesim FINTZ

Année 2007/2008

Version L^AT_EX :
CAFFIN Perrine

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Il n'est pas aisé de manipuler certains outils mathématiques qui nous seront nécessaires pour la compréhension de la micro-économie. Ils ne vont pas de soi et nous conduisent quelques fois à de fausse conclusions !

1.1 La probabilitée, pas si simple que ça !

Exemple :

On considère un ensemble de personnes, et on fait passer un test à chacune d'entre elles pour déterminer qui est malade et qui ne l'est pas.
La probabilité pour que le test soit positif alors que l'on n'est pas malade est de 1%.
La probabilité pour que le test soit négatif alors que l'on est malade est de 1%.
Soit $p = \frac{1}{1000}$ la probabilité qu'une personne prudente tombe malade.
Quelle est le probabilité pour que l'on soit malade si le test est positif ?

Notations :
- Les test negatifs $\equiv Test\ominus$
- Les test positifs $\equiv Test\oplus$

$$P[Malade|Test\ominus] = \frac{P[Test \ominus |Malade] \times P[Malade]}{P[Test\oplus]}$$
$$= \frac{0.99 \times 0.001}{P[Test\ominus]} = \frac{9.9 \cdot 10^{-4} \approx 10^{-3}}{P[Test\ominus]}$$

$$P[Test\ominus] = P[Test\ominus|Malade]\times P[Malade]+P[Test\ominus|Sain]\times P[Sain]$$
$$= 0.99 \times 0.001 + 0.01 \times 0.99 \approx 10^{-2}$$

$$P[Malade|Test\ominus] \approx \frac{10^{-3}}{10^{-2}} = 10^{-1}$$

1.2 Le choix du pannier

La micro-économie est la mise en évidence des interactions entre des agents (producteur et consommateur). On étudie les réactions des consommateurs vis-à-vis d'un "panier garnis ", sachant que chaque consommateur a le choix entre plusieurs paniers.

Un panier est un vecteur x de $\mathbb{R}_+^k$. La relation d'ordre dans $\mathbb{R}_+^k$ n'est pas totale.

Définition : Relation de préférence

Soit x,y de $\mathbb{R}_+^k$, alors :
- *$x \succ y$ signifie que x est préférable à y ;*
- *$y \succ x$ signifie que y est préférable à x ;*
- *$x \sim y$ signifie que x est équivalent à y ;*

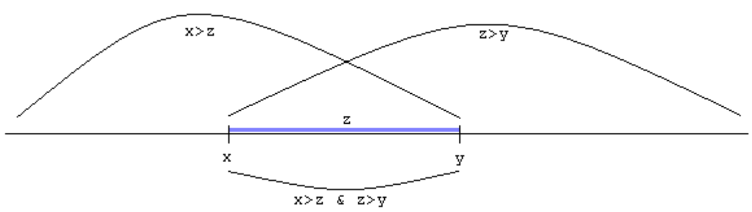
Chapitre 2

Fonction d'utilité

2.1 Fonction d'utilité ordinale

On fait deux hypothèses :

- H_1 **:** Les préférences sont asymétriques. On ne peut donc pas avoir x et y tel que $y \succ x$ et $x \succ y$.
- H_2 **:** Les préférences sont négativement transitives.
  - soit $x \succ z$;
  - soit $z \succ y$;
  - soit $x \succ z$ et $z \succ y$.



Théorème :

Si H_0 et H_1 sont vraies alors :

- *la préférence ϕ est antiréflexive : il n'existe pas de x tel que $x \succ x$;*
- *ϕ est transitive : $x \succ y$ et $y \succ z \Rightarrow x \succ z$;*
- *il y a acyclicité : si $x_1 \succ x_2 \succ ... \succ x_{n-1} \succ x_n \succ x_n$ alors $x_1 \neq x_n$.*

Définition :

- *x est faiblement préféré à y ($x \succeq y$)si et seulement si $y \succ x$ est faux ;*
- *x est faiblement préféré à y si et seulement si x est au moins aussi bon que y ;*
- *$x \sim y$ si et seulement si $y \succ x$ et $x \succ y$ sont faux.*

Propriété :

Si la préférence stricte a les deux propriétés citées alors la préférence faible est complète : $\forall x, y$ soit $y \succeq x$, soit $x \succeq y$
- *la préférence faible est transitive ;*
- *la relation d'indifférence ($\sim$) est transitive, symétrique et réflexive (si $x \succeq y$ et $y \succeq z$, alors $x \succeq z$) ;*

Soit $x, y, w, t \in \mathbb{R}^k$, si $w \sim x$, $y \sim t$, et si $x \succ y$ alors $w \succ y$ et $x \succ t$.

Définition : Fonction d'tilité

Une fonction d'utilité décrivant un pré-ordre de préférence est une fonction $U : \mathbb{R}^k_+ \mapsto \mathbb{R}$ tel que :
- *$x \succ y$ ssi $U(x) > U(y)$;*
- *$x \sim y$ ssi $U(x) = U(y)$;*

Hypothèse : de continuité

Soit Y est le sous-ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^k_+$ qui sont strictement préférés à x.

$$\forall x \in \mathbb{R}^k_+ \; Y = \{y \in \mathbb{R}^k_+ | y \succ x\}$$

Soit Z est le sous-ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^k_+$ tel que x leur soit strictement préféré.

$$\forall x \in \mathbb{R}^k_+ \; Z = \{z \in \mathbb{R}^k_+ | x \succ z\}$$

Y et Z sont deux sous-ensembles ouverts.

Théorème :

Soit une relation de préférence définie sur $\mathbb{R}_+^k$ et respectant les trois propriétés suivantes. Alors elle peut être représentée par une fonction d'utilité continue.

$$U : \mathbb{R}_+^k \to \mathbb{R} \text{ tel que } \left\{ \begin{array}{l} x \succ y ssi U(x) > U(y) \\ x \sim y ssi U(x) = U(y) \end{array} \right\}$$

Propriété :

1) Monotonie :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^k)^2, \text{ si } x \geq y, \text{ alors } x \succ y \Leftrightarrow U(x) > U(y)$$

2) Stricte convexité :

$$\forall \gamma \in [0,1], \forall (x, y, z) \in (\mathbb{R}_+^k)^3, \ y \neq z \ {}^{y \succ x}_{z \succ y}\} \Rightarrow \gamma \cdot y + (1 - \gamma) \cdot z \succ x$$

3) Stricte quasi-concavitée :

$$\forall \gamma \in [0,1], \forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^k)^2, \ y \neq x \ y \succ x \Rightarrow \{ {}^{U(y) > U(x)}_{U(\gamma \cdot y + (1-\gamma) \cdot z) > U(x)}$$

Définition :

Une relation $\succ$ est dite non localement saturée si $\forall x \in \mathbb{R}_+^k, \forall \epsilon > 0, \exists$ un panier $y = (y_1, ..., y_n)$ vérifiant :
- $|x_j - y_j| > \varepsilon \qquad \forall j \in 1...k$
- $y \succ x$

Exemple :

Dans $\mathbb{R}_+^3$, on a :

	Y	X	Z
Vin	10	8	9
Bière	5	6	8
Scotch	3	2	1

On a donc : $Y \succ X$ et $Z \succ X$ avec $\gamma = \frac{1}{2}$ Si $W = \gamma \cdot Y + (1 - \gamma) \cdot Z$, alors $W \begin{pmatrix} 9.5 \\ 6.5 \\ 2.0 \end{pmatrix}$, donc $W \succ X$.

2.2 Fonction d'utilité cardinale

Soit X une variable aléatoire discrète telle que :

$$X \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$\forall i \in [1, n]$, x_i est un palier avec une probabilité p_i, alors :

$$U(\tilde{\mathrm{X}}) = \sum_{i=1}^{n} p_i U(x_i) \Longleftrightarrow U(\tilde{\mathrm{X}}) = E[U(\tilde{\mathrm{X}})]$$

Définition :

*On appelle loterie $\mathcal{L}$ la donnée de p, x, y d'un ensemble. On note $\mathcal{L}(p, x, y)$ avec : **p** probabilité p_x d'avoir le panier x et **1-p** probabilité p_y d'avoir le panier y.*

Remarque :

z est l'équivalent certain de la loterie $\mathcal{L}(p, x, y)$ si et seulement si :

$$z \sim \mathcal{L}(p, x, y) \Leftrightarrow U(Z) = p_x \cdot U(x) + p_y \cdot U(y)$$

Propriété : Indépendance forte

$(x, y, z) \in (\mathbb{R}_+^n)^3 \ x \sim y \Rightarrow \forall p \in \mathbb{R},\ \mathcal{L}(p, x, z) \sim \mathcal{L}(p, y, z)$

Propriété : Continuité

$(x, y, z) \in (\mathbb{R}_+^n)^3 \ x \succ y \succ z \Rightarrow \nexists! p, y \succ \mathcal{L}(p, x, z))$

Propriété : Monotinicité

$$(x, y, z, t) \in (\mathbb{R}_+^n)^4 \quad \left. \begin{array}{c} x \succ y \succ t \\ x \succ z \succ t \\ y \sim \mathcal{L}(p_1, x, t) \\ z \sim \mathcal{L}(p_2, x, t) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y \succ z \Leftrightarrow p_1 > p_2 \\ y \sim z \Leftrightarrow p_1 = p_2 \end{array} \right.$$

Propriété : Valeurs intermédiaires

$$(x,y,z) \in (\mathbb{R}_+^n)^3 \quad \left.\begin{array}{c} x \succeq y \succeq z \\ y \nsim z \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \alpha \in [0,1], y \sim \alpha \cdot x + (1-\alpha) \cdot z$$

Théorème :

Pour toute relation de préférence qui est définie sur $\mathbb{R}_+^n$ et qui satisfait les propriétés précédentes, il existe une fonction d'utilitée $U : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$ telle que :

$$x \succ y \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} U(x) > U(y) \\ U(E(x)) > E(U(x)) \end{array}\right.$$

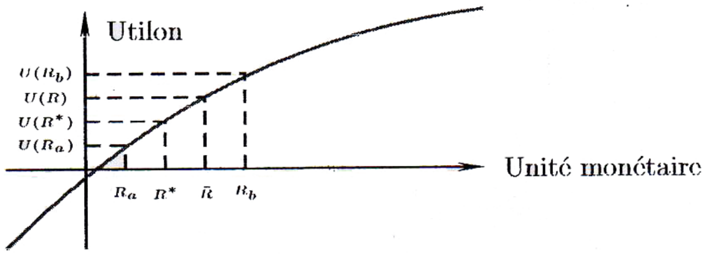
Remarque :

- U est C^∞ ;
- U est croissante, $U' > 0$;
- U est localement non saturée (c'est-à-dire qu'on préfère toujours en savoir plus)

Exemple :

Il y a 3 types d'individus :

1. **Ceux qui aime le risque :**
   Leur fonction d'utilitée est convexe. Ils sont près à acheter un billet à 10€ pour la loterie :
   $$+1000, p = \tfrac{1}{2}\, ; -1000, p = \tfrac{1}{2}$$
2. **Ceux qui sont indiférent au risque :**
   Leur fonction d'utilité est une droite. Ils ne jouent pas à la loterie précédente même si le billet était à 1€.
3. **Ceux qui ont une aversion pour le risque :**
   Leur fonction d'utilité est concave.
   On a
   $$\left\{ \begin{array}{c} U(R^*) = \frac{U(R_a)+U(R_b)}{2} \\ \overline{R} = \frac{R_a+R_b}{2} \end{array} \right\}$$
   On en déduit donc :
   $$E[U(\overline{X})] < U[E(\overline{X})]$$



<u>Démonstration :</u> Mesure de l'aversion du risque

Soit :

$$\widetilde{X}\left(\frac{R_a}{2};\frac{R_b}{2}\right)$$

On a :

$$\left\{\begin{array}{c} U(\widetilde{X}) = \frac{U(R_a)}{2} + \frac{U(R_b)}{2} \\ E(\widetilde{X}) = \frac{R_a}{2} + \frac{R_b}{2} \end{array}\right\}$$

donc,

$$U(E(\widetilde{X})) = U(\overline{R})$$

On en déduit :

$$\left\{\begin{array}{c} U(R^*) < U(\overline{R}) \\ E[U(\widetilde{X})] < U[E(\widetilde{X})] \end{array}\right\}$$

On dit que :

$$R^* \sim \mathcal{L}(\tfrac{1}{2}; R_a; R_b)$$

$\overline{R} - R^* = \pi$ où π est la prime de risque.

Remarque :

Calcul de π la prime de risque

Soit W la richesse initiale d'un individu et la loterie π :

$$\pi(W,t) \text{ avec } \left\{ \begin{array}{c} E(\widetilde{t}) = 0 \\ Var(\widetilde{t}) = \sigma^2_{\widetilde{t}} > 0 \end{array} \right\}$$

on a les possibilités

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Gagner } t, p_+ = \frac{1}{2} \\ \text{Perdre } t, p_- = \frac{1}{2} \\ w^* = w - \pi \end{array} \right\}$$

On a

$$\begin{array}{rcc} U(W^*) & = & U(W \cdot \pi) \\ & = & U(W) - \pi \cdot U'(W) + \varepsilon(\pi) \\ & = & U(W + \widetilde{t}) \\ & = & U(W) + \widetilde{t} \cdot U'(W) + \frac{\widetilde{t}^2}{2} \cdot U''(W) + \varepsilon(\widetilde{t}^2) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcc} E(U(W + \widetilde{t})) & = & U(W) + 0 + \frac{U''(W)}{2} \cdot E^2(\widetilde{t}^2) \\ & = & U(W) + \frac{U''(W) \cdot \sigma^2_{\widetilde{t}}}{2} \end{array}$$

Or $U(W^*) = E[U(W + \widetilde{t})]$

donc $U(W) - \pi \cdot U'(W) = U(W) + \frac{U''(W) \cdot \sigma^2_{\widetilde{t}}}{2}$

Et enfin $\pi = \frac{\sigma^2_{\widetilde{t}}}{2} \cdot (-\frac{U''(W)}{U'(W)})$

2.3 Aversion absolue pour le risque (AAR ou ARA)

$$AAR = -\frac{U''(W)}{U'(W)}$$

Remarque :

U est une bonne fonction d'utilité si AAR diminue quand W augmente, donc $\frac{\lceil AAR}{\lceil W} > 0$.

Propriété :

- *l'AAR d'une personne qui a de l'aversion pour le risque est positive ;*
- *l'ARA d'une personne qui a une forte aversion pour le risque est plus grande que l'ARA d'une personne qui a une faible aversion pour le risque ;*
- *l'ARA est insensible à toute transformation affine de la fonction d'utilité.*

2.4 Aversion relative pour le risque (RRA)

$$RRA = -W\frac{U''(W)}{U'(W)}$$

Remarque :

U est une bonne fonction d'utilité si RRA est constante par rapport à W

Exemple :

$$\left\{\begin{array}{c} U(W) = -a \cdot W^2 + bW \\ U'(W) = -2aW + b \\ > 0 \end{array}\right\} \text{donc } W < \frac{b}{2a}$$

Il suffit de trouvé a petit pour trouver u seuil à la richesse sachant que a et b sont positifs.

$$\begin{array}{rcccc} U''(W) & = & -2 \cdot a & < & 0 \\ ARA & = & -\frac{U''(W)}{U'(W)} & = & \frac{2 \cdot a}{-2 \cdot a \cdot W + b} \\ \frac{dARA}{dW} & = & \frac{4 \cdot a^2}{(b-2 \cdot a \cdot W)^2} & > & 0 \\ RRA & = & -W \cdot \frac{U''(W)}{U'(W)} & = & \frac{2 \cdot a \cdot W}{b-2 \cdot a \cdot W} \\ \frac{dRRA}{dW} & = & \frac{2 \cdot a \cdot b}{(b-2 \cdot W)^2} & > & 0 \end{array}$$

L'ARA augmente quand W augmente donc U n'est pas une bonne fonction d'utilité.

Exemple :

Soit $a > 0$

$$\begin{array}{rcc} U(W) & = & -e^{-a \cdot W} \\ U'(W) & = & a - e^{-a \cdot W} \\ U''(W) & = & -a^2 - e^{-a \cdot W} < 0 \\ ARA & = & -\frac{U'(W)}{U''(W)} = \frac{a^2 - e^{-a \cdot W}}{a \cdot e^{-a \cdot W}} = a \\ RRA & = & a \cdot W \end{array}$$

ARA est une constante et RRA augmente quand W augmente donc U n'est pas une bonne fonction d'utilité.

Exemple :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} U(W) & = & lnW \\ U'(W) & = & \frac{1}{W} \\ U''(W) & = & -\frac{1}{W^2} \\ ARA & = & \frac{1}{W} \\ RRA & = & 1 \end{array}}$$

ARA est décroissante et RRA est constant donc U est une bonne fonction d'utilité.

Exemple :

$$\begin{array}{rcl} u(W) & = & -\frac{1}{W} \\ U'(W) & = & \frac{1}{W^2}; U'(W) > 0 \\ U''(W) & = & -\frac{2}{W^3}; U''(W) < 0 \\ ARA & = & -\frac{U''(W)}{U'(W)} = \frac{2}{W} \\ \frac{d}{dW}(ARA) & = & -\frac{2}{W^2} < 0 \end{array}$$

Quand W augmente, ARA diminue. $RRA = 2 = cte$ donc U est une bonne fonction d'utilité.

Définition : Conditions d'INADA

Une bonne fonction d'utilité respecte les conditions d'INADA :

$$i) hspace0.5cm \lim_{W \to 0} U'(W) \to \infty$$

$$ii) hspace0.5cm \underset{W \to \infty}{U'(W)} \to 0$$

Remarque :

On constate pour toutes les fonction d'utilité décrite précédement vérifient les conditions d'Inada

2.5 Difficulté de construction d'une fonction d'utilité

Le paradoxe de Allais :

Étape 1

On a le choix entre deux loteries :

$$\begin{array}{llll} (1) & 450000\$ & p = 0.8| & (2) \quad 300000\$ \quad p = 1 \\ & 0\$ & p = 0.2| & \end{array}$$

Dans une classe de 80 élèves-ingénieurs, 67 préfèrent (2) à (1). On préfère la loterie (2), *i.e.* $(2) \succ (1)$.

Étape 2

On a le choix entre deux loteries :

$$\begin{array}{lllllll} (A) & 300000\$ & p = 0.25 & | & (B) & 450000\$ & p = 0.2 \\ & 0\$ & p = 0.75 & | & & 0\$ & p = 0.8 \end{array}$$

Dans la même classe de 80 élèves-ingénieurs, 62 préfèrent (B) à (A). *i.e.* $(B) \succ (A)$.

En fait

$$(A) = \mathcal{L}(\frac{1}{4}; (2); 0)$$

$$(B) = \mathcal{L}(\frac{1}{4}; (1); 0)$$

Donc d'après les propriétée des lotterie : $A \succ B$

Paradoxe :

$(2) \succ (1)$, or $\frac{1}{4}(2) \prec \frac{1}{4}(1)$.

Exercice :

(Our thanks to David Pyle, University of California, Berkley, for providing this problem.)

Mr. Casadesus's current wealth consists of this home, which is worth $\$50,000$, and $\$20,000$ in savings, which are earning 7$ in a saving and loan account. His (one-year) homeowner's insurance is up for renewal, and he has the following estimates of the potential losses on his house owing to fire, storm, etc., during the period covered by the renewal :

Value of loss,$	Probability, %
0	0.98
$5,000$	0.01
$10,000$	0.005
$50,000$	0.005

His insurance agent has quoted the following premiums :

Amount of insurance, $	Premium, $
$30,000$[1]	$30 + AVL_1^2$
$40,000$	$27 + AVL_2$
$50,000$	$24 + AVL_3$

Mr. Casadesus expects neither to save nor to dissave during the coming year, and he does not expect his home to change appreciably in value over this period. His utility for wealth at the end of the period covered by the renewal is logarithmic, i.e., $U(W) = ln(W)$.

1. Given that the insurance company agrees with Mr. Casadesus's estimate of his losses, should he renew his policy
   - (1) for the full value of his house,
   - (2) for $\$40,000$, or
   - (3) for $\$30,000$, or
   - (4) should he canceled it ?

2. Suppose that Mr. Casadesus had $\$320,000$ in a saving account. Would this change his insurance decision ?

3. If Mr. Casadesus has $\$20,000$ in saving, and if his utility function is $U(W) = -200,000W^{-1}$, should he renew his home insurance ? And if so, for what amount of coverage ?

∗ *Precision :*

– *Insurance covers the first x dollars of loss. For simply, assume that all losses occur at the end of the year and that the premium is paid at the beginning of the year.*

– *Actuarial value of loss = expected value of the insurer's loss.*

AVL1

$E(p) = 0,98\times0+0.001\times5000+0.005\times10000+0.005\times30000 = 50+50+150 = 250$ S'il s'assure pour \$30, 000, il va payer $30+250 = 280$\$. L'assureur n'a pas peur du risque car il y a mutualisation du risque (penser au théorème central limite). 280\$ est la prime de risque.

AVL2

Pour \$40, 000, $E(p) = 300$, la prime de risque vaut $300 + 27 = 327$\$. S'il s'assure pour \$40, 000, il va payer 327\$.

AVL3

Pour \$50, 000, $E(p) = 350$, la prime de risque vaut $350 + 24 = 374$\$. S'il s'assure pour \$50, 000, il va payer 374\$.

1. On ne s'assure pas. W_i richesse.

p_i	w_i	w_i	lnw_i
0.98	500000+20000(1.07)	71400	11,176
0.01	45000+20000(1.07)	66400	11,103
0.005	40000+20000(1.07)	61400	11,025
0.005	0+20000(1.07)	21400	9,971

$$U(\overline{A}) = U(1) = \sum_{i=1}^{4} p_i U(w_i) = \sum_{i=1}^{4} p_i ln w_i = 11.1685$$

2. On s'assure pour $\$30,000$

p_i	w_i	w_i	lnw_i
0.98	$500000 + (20000 - 280) \times 1.07$	71100.4	$11,172$
0.01	$50000 + (20000 - 280) \times 1.07$	71100.4	$11,172$
0.005	$50000 + (20000 - 280) \times 1.07$	71100.4	$11,172$
0.005	$30000 + (20000 - 280) \times 1.07$	51100.4	$10,841$

La perte se monte à $\$50,000$. On débourse $\$20,000$ et il reste $\$30,000$.

$$U(A_{30}) = U(2) = \sum_{i=1}^{4} p_i U(w_i) = 11,1702$$

3. On s'assure pour $\$40,000$.

p_i	w_i	w_i	$\ln w_i$
0.98	$500000 + (20000 - 327) \times 1.07$	71050.11	11.171
0.01	$50000 + (20000 - 327) \times 1.07$	71050.11	11.171
0.005	$50000 + (20000 - 327) \times 1.07$	71050.11	11.171
0.005	$30000 + (20000 - 327) \times 1.07$	31050.11	10.343

$$U(A_{40}) = U(3) = \sum_{i=1}^{4} p_i U(w_i) = 11,17038$$

4. On s'assure pour $\$50,000$.

p_i	w_i	w_i	$\ln w_i$
0.98	$500000 + (20000 - 374) \times 1.07$	70999.82	11.170433
0.01	$50000 + (20000 - 374) \times 1.07$	70999.82	11.170433
0.005	$50000 + (20000 - 374) \times 1.07$	70999.82	11.170433
0.005	$30000 + (20000 - 374) \times 1.07$	70999.82	11.170433

$$U(A_{50}) = U(3) = \sum_{i=1}^{4} p_i U(w_i) = 11,17043$$

$$U(4) > U(i) \ \forall i \in 1,2,3$$

donc on doit s'assurer à 100%

5. $320,000 dans un compte d'épargne au lieu de $20,000.

$$\begin{aligned} U(\overline{A}) &= 12.87909818 \\ U(A_{30}) &= 12.87901144 \\ U(A_{40}) &= 12.87860686 \\ U(A_{50}) &= 12.87901666 \end{aligned}$$

Dans ce cas, il vaut mieux qu'il n'assure rien.

6.

$$\begin{aligned} U(w) &= -200000w^{-1} \\ U(\overline{A}) &= -2.838234138 \\ U(A_{30}) &= -2.818428397 \\ U(A_{40}) &= -2.833046145 \\ U(A_{50}) &= -2.81690855 \end{aligned}$$

dans ce cas, il vaut mieu tout assurer.

Exercice :

A small businesswoman faces a 10% chance of having a fire that will reduce her net morth to $1.00, a 10% chance that fire will reduce it to $50,000, and an 80% chance that nothing detrimental will happen, so that her buisiness will retain its worth of $100,000. What is the maximum amount she will pay for the insurance if she has a logarithmic utility function ? In other words, if $U(W) = lnW$, compute the cost of the gamble*.

∗ *Precision : The insurance pays* $99,999 *in the first case ;* $50,000 *in the seconde case ; and nothing in the third.*

$$\begin{array}{llcl} 10\% & \text{de chance} & \rightarrow & \$1 \\ 10\% & \text{de chance} & \rightarrow & \$50,000 \quad U(W_i) = lnW_i \\ 80\% & \text{de chance} & \rightarrow & \$100,000 \end{array}$$

Si la personne n'a pas peur du risque, elle serait prête à avoir en fin d'année :

$1 \times 0.1 + 500000 \times 0.1 + 1000000 \times 0.8 = 85000$ (Si pas d'assurance).

On va utiliser Π, prime de risque que l'on est prêt à payer pour ne pas jouer à ce jeu :

$$\Pi = \overline{R} - R^*$$

$$\overline{R} = U(G) = 85000 \text{ (Gain)}$$

$$\begin{aligned} ln(R^*) &= E(U) \text{ espérence de l'utilité} \\ &= 0.1ln1 + 0.1ln(50000) + 0.8ln(100000) \\ &= 10.292 \end{aligned}$$

Or

$$ln(R^*) = ln(W^*) = 10.292.$$

$$\begin{array}{cc} R^* = W^* = 29505.094 & 100000 - 29505.094 = 70494,906 \\ \Pi = \overline{R} - R^* = 100000 - 85000 = 15000\$ & 70494,906 - 15000 = 55494,906 \end{array}$$

Donc la jeune femme est prête à payer $55494,906\$ + 15000\$$ pour ne pas risquer de tout perdre. Malheureusement il n'y a pas de monopole... Donc la jeune femme payera au minimum 15000\$ puisque les assurances ne peuvent pas faire payer en dessous (prête à perdre 85000\$ sans assurance pas plus ou moins donc $100000 - 85000 = 15000\$$ doivent êtres garantis).

Exercice :

If tou are exposed to a 50/50 chance of gaining or losing \$1000 and insrance that removes the risk cost \$500, at what level of wealth will you be indifferent relative to taking the gamble or paying insurance ? That is, what is your certainty equivalent wealth ? Assume your utility function is $U(W) = -W^{-1}$.

- Une chance sur deux de perdre \$1000, on aurait $X - 1000$;
- Une chance sur deux de gagner \$1000, on aurait $X + 1000$;
- L'assurance couterait \$500.

$$0.5(X - 1000) \times 0.5(X + 1000) = X$$

$$\overline{R} = X$$

$$\begin{aligned} E(U) &= -0.5\tfrac{1}{X-1000} - 0.5\tfrac{1}{X+1000} \\ &= -0.5\tfrac{2X}{(X-1000)(X+1000)} \\ &= \tfrac{-X}{(X-1000)(X+1000)} \\ &= \tfrac{-X}{(X^2-1000^2)} \end{aligned}$$

$$R^* = -\frac{1}{E(U)} = \frac{X^2 - 1000^2}{X} = X - \frac{1000^2}{X}$$

$$\begin{aligned} \Pi &= X - X + \tfrac{1000^2}{X} \\ &= \tfrac{1000^2}{X} \\ &= 500 \\ &\Rightarrow X = \tfrac{1000^2}{500} = 2000 \end{aligned}$$

Prime qu'on est prêt à payer pour être assuré : \$500.
- Si on a plus de \$2000, on joue sans assurance.
- Si on a moins de \$2000, on paie l'assurance pour ne pas risquer de perdre \$1000.

Exercice :

Autre cas : $w - \$20000$, même loterie. Quelle est la prime de risque qu'on est prêt à payer ?

$$E(\widetilde{w}) = 0.5w - 200 + 0.5w + 200 = w = 20000$$
$$U(\widetilde{w}) = \frac{1}{2}U(21000) + \frac{1}{2}(19000) = -5.012510$$
$$\widetilde{w} = 19950.12$$
$$\text{Prise de risque} = \$50$$

Exercice :

Le paradoxe de Saint pétersbourg

Consider a lottery that pays \$2 if n consecutives heads turn up in $n+1$ tosses of a fair coin (i.e. the sequence of coin flips ends with the first tail). If you have a logarithmic utility function, $U(W) = lnW$, what is the utility of the expected payoff ? What is the expected utility of th payoff ?

Explication :

On a une pièce, on lance. Si Face, on gagne, si Pile on pert et on remise 2^n.

	nbr de Pile successif	p_i	X_i payement	$E(\widetilde{X})$ gain	$U(X)$	$E(U(\widetilde{X}))$
Lancé 1	0	0.5	$2^0 = 1$	0.5	$ln1 = 0$	0
Lancé 2	1	0.25	$2^1 = 2$	0.5	$ln2$	$\frac{1}{4} \cdot ln2$
Lancé 3	2	0.125	$2^2 = 4$	0.5	$ln4$	$\frac{1}{8} \cdot 2 \cdot ln2$
...	...	...	...		0.5	...
	n	$\frac{1}{2^{n+1}}$	2^n	0.5	$n \cdot ln2 = ln2^n$	$\frac{1}{2^{n+1}} \cdot n \cdot ln2$

$$\begin{aligned} F(U(X)) &= \sum_{i=0}^{n} \tfrac{i \cdot ln2}{2^{i+1}} = \tfrac{ln2}{2} \cdot \sum_{i=0}^{n} i \cdot (\tfrac{1}{2})^i \\ &= \tfrac{ln2}{2} \cdot \sum_{i=0}^{n} (\tfrac{i-1}{2^i} + \tfrac{1}{2^i}) \end{aligned}$$

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... = + \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} \tfrac{i-1}{2^i} &= -1 + 0 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{2}{8} + \tfrac{3}{16} + \tfrac{4}{32} + ... \\ &= -1 + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + ...}_{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{2}{16} + \tfrac{3}{32} + ... \\ &= -1 + \tfrac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + ...}_{\frac{1}{4}} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{2}{32} + ... \\ &= -1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \underbrace{\frac{1}{16} + \frac{1}{32} + ...}_{\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+...} = 0 \end{aligned}$$

conclusion :

$$E(U(\widetilde{X})) = U(X^*) = \sum_{i=0}^{n} \tfrac{1}{2^{i+1}} \cdot ln2^i = ln2$$
$$\Rightarrow \mathcal{R}^* = 2$$

$$[V] \quad var(\widetilde{X}) = +\infty \quad E(\widetilde{X}) = +\infty$$

Les gens ne payerais que \$2 pour jouer à ce jeu alors qu'il y a une espérance de gain ∞.

$var(\widetilde{X}) = np(1-p)$ est infinie aussi ! !

Chapitre 3

Choix social et efficacité

On suppose que l'on est dans un marché ou il y a I individus qui vont essayer de maximiser leurs fonctions d'utilitées respectives. Comme les biens ne sont pas infinis, il va y avoir des conflits. Comment partager les ressources de manières équitables ?

3.1 Modèle général

Soient I individus : $1, 2, ..., i, ..., I$.
Soit V_i la fonction d'utilité de l'individus i. V_i est localement non-saturée.
Soit $x = (x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_I)$ l'ensemble des paniers choisis par ces individus.

On a $\forall i, x_i = \begin{pmatrix} x_{1,i} \\ ... \\ x_{k,i} \\ ... \\ x_{K,i} \end{pmatrix}$ avec $x_{k,i}$, la dotation de l'agent i en bien k.

La matrice suivante donne l'***issue*** : $\begin{pmatrix} x_{1,1} & ... & x_{1,i} & ... & x_{1,I} \\ ... & & ... & & ... \\ x_{k,1} & ... & x_{k,i} & ... & x_(k,I) \\ ... & & ... & & ... \\ x_{K,1} & ... & x_{K,i} & ... & x_{K,I} \end{pmatrix}$

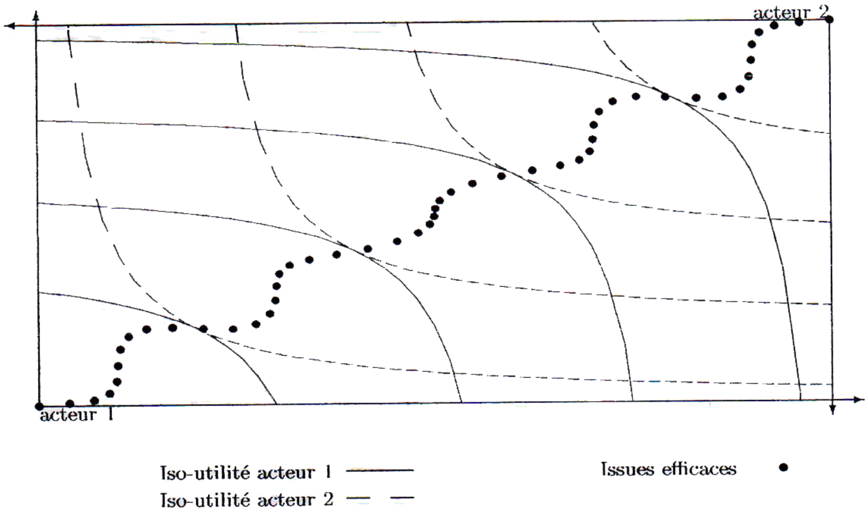
Soit X l'ensemble des issues réalisables et X' l'ensemble des issues efficaces.

Hypothèse : Forte

On suppose que V_i ne dépend que de $x_i \Rightarrow V_i(x_i)$, c'est à dire que la fonction d'utilité ne dépend que de ce qu'on consomme. Autrement dit, il n'y a pas d'externalitée.

Remarque :

Dans la réalitée, les externalités jouent un rôles important. Par exemple, si j'achète un pavillon à 1 000 000 €, l'évolution de la valeur de mon pavillon dépendra non seulement des aménagements (ou dégradations) que j'y réaliserais mais aussi des changements du voisinage.



Si mon voisin grincheux remplace ses vieilles haies de tuhias par de magnifique et odoriférants rosier, ma satisfaction - et donc ma fonction d'utilité - augmentera sans augmenter mon pannier, c'est à dire le volume de mes biens. Inversement, si la maison de mon voisin est démolie pour laissée place à un pilône de transport électrique haute tension, la valeur de mon bien diminuera. Dans l'hypothèse de non-externalitée, aucun évennement hors de mon contrôle (de mon panier) ne peut affecter ma satisfaction (ma fonction d'utilité).

Soit e la dotation initiale, ou ce que la collectivitée possède au départ :

$$e = \begin{pmatrix} e_1 \\ ... \\ e_k \\ ... \\ e_K \end{pmatrix}$$

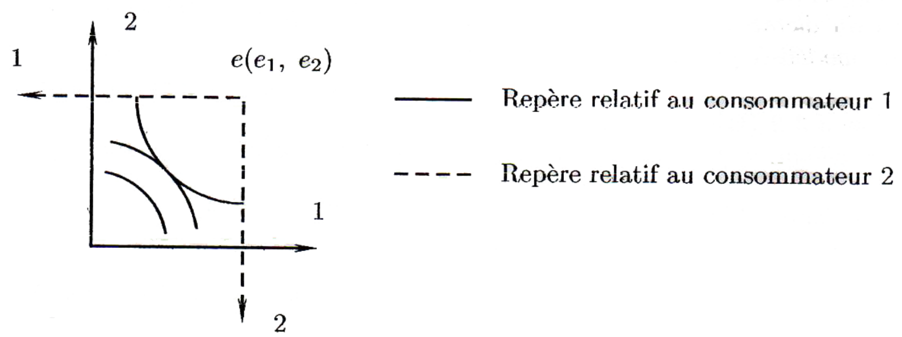
On a : $\sum_{i=1}^{I} x_{k,i} \leq e_k$.

Remarque :

S'il n'y a pas de gaspillage, on a l'égalité : $\sum_{i=1}^{I} x_{k,i} = e_k$.

3.2 Modèles particuliers

On a deux biens et deux individus. Il s'agit de partager les biens entre des individus qui ont des intérêts différents.
La dotation initiale est $e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$.



L'ensemble des issues réalisable est formé des points inclus dans la boîte de Edgeworth (Voir schéma corespondant). Il s'agit de toutes les répartitions possibles de la dotation initiale.

L'ensemble des issues efficace est l'ensemble des points de tangeance entre les deux courbes. C'est à dire toute répartition qui, pour un V_1 donné, maximisent V_2, et inversement.

Définition :

L'issue x domine au sens de Pareto l'issue x' si et seulement si :

$$\forall i \ \ U_i(x) \geq U_i(x')$$

Remarque :

- La dominance est stricte si et seulement si $\forall i \ \ U_i(x) > U_i(x')$.
- La dominance au sens de Pareto défini un ordre partiel.

Définition : Pareto efficacité

Étant donné un ensemble X' d'issue réalisable, une issue $x \in X'$ est efficace au sens de Pareto s'il n'existe aucune issue $x' \in X'$ qui domine x au sens de Pareto.

Définition : Enveloppe de Pareto

L'enveloppe de Pareto est l'ensemble des issues efficaces.

3.3 Le dictateur social bienveillant

Si l'on est pas capable de se mettre d'accord, on peut faire intervenir le dictateur social bienveillant. Le dictateur social bienveillant est un acteur extérieur au jeu qui a un rôle d'arbitre. Il est rationnel, et a donc des préférences qui vont donner une fonction d'utilité U^* tout à fait convenable, croissante et concave. L'ordre choisit par cet individus est total car c'est un dictateur. Cet acteur résoud le problème du choix : entre deux issues x et x' ; il imposera un choix.

Hypothèse :

Les choix du dictateur peuvent êtres normalisés au moyen d'une relation de préférence modélisée par la fonction d'utilité : $U^* : X \to \mathbb{R}$.

Hypothèse : Bienveillance du dictateur

Étant bienveillant, la dictateur ne va pas à l'encontre de l'intéret de ces sujets.

$$x \text{ domine l'issue } x' \text{ au sens de Pareto} \Rightarrow U^*(x) > U^*(x')$$

Hypothèse :

$$\forall i \ \ U_i(x) = U_i(x') \Rightarrow U^*(x) = U^*(x')$$

Propriété :

Soit (U_i) la famille des fonctions d'utilité des I consomateurs. La préférence du dictateur social bienveillant satisfait aux hypothèses précédentes si et seulement si :

$$U^* : \begin{array}{ccc} X & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & U^*(x) \end{array} = (W(U(x))) \quad \textit{avec} \begin{cases} U(x) = (U_1, ..., U_i, ..., U_I) \\ W : \mathbb{R}^I \rightarrow \mathbb{R} \\ W \textit{ strictement croissante} \end{cases}$$

W est appelée la fonction de bien social, est une fonction strictement croissante de chacune des coordonnées du vecteur $U(x)$, dit imputation d'utilité.

Exemple :

Fonction de bien être social :

1. Fonction de bien être social utilitariste :

$$W(U_1, ..., U_i, ..., U_I) = \sum_{i=1}^{n} U_i$$

2. Fonction de bien être social Bergsonienne :

$$W(U_1, ..., U_i, ..., U_I) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot U_i \text{ avec } \forall i \ \ \alpha_i > 0$$

Propriété :

Supposons que l'issue collective dans l'ensemble X' d'issues réalisable résulte d'un maximums de la fonction W strictement croissante, alors l'état social ainsi obtenu sera toujours efficace au sens de Pareto

Propriété :

Soient $x^* \in X'$ une issue pareto-efficace et $U(x^*)$ l'imputation d'utilité associée à x^* dans l'enveloppe convexe de $U(X')$.

$$\exists(\alpha_i),\ \forall i\ \ \alpha_i > 0 \text{ tel que } U^*(x^*) = \max_{x\in X'} \sum_{i=1}^{I} \alpha_i \cdot U_i(x)$$

3.4 Choix social sans dictateur

Théorème : de Houtchakker

Soit trois individus et trois issues.

$$\begin{cases} x \succ x' \succ x'' & \textit{Pour les deux premiers} \\ x' \succ x'' \succ x & \textit{Pour le troisième} \end{cases}$$

On ne choisira pas x'', ce n'est pas un optimum de Pareto.
x' domine x'' au sens de Pareto.

Règle de Pareto

Notons $\underset{i}{\succ}$ la préférence de l'individus i.

$$x \underset{*}{\succ} x' \Leftrightarrow \forall i\ \ x \underset{i}{\succ} x'$$

Cette règle ne définit par un ordre complet. Elle ne permet donc pas toujours de choisit entre deux issues.

Règle de majorité

Soit $P(x, x')$ le nombre d'individus qui préfèrent x à x'.

$$x \underset{*}{\succ} x' \Leftrightarrow P(x, x') > \tfrac{I}{2}$$

. Cette règle n'est pas transitive.

$$\left.\begin{matrix} x \underset{1}{\succ} y \underset{1}{\succ} z \\ y \underset{2}{\succ} z \underset{2}{\succ} x \\ z \underset{3}{\succ} x \underset{3}{\succ} y \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} P(x,y) = 2 \Rightarrow x \underset{*}{\succ} y \\ P(y,z) = 2 \Rightarrow y \underset{*}{\succ} z \\ P(x,z) = 1 \Rightarrow z \underset{*}{\succ} x \end{cases}$$

Dans cette situation, la règle de la majorité ne permet de choisir entre les 3 issues.

Règle de pluralité

$$x \underset{*}{\succ} x' \Leftrightarrow P(x,x') > P(x',x)$$

Cette règle présente les mêmes défauts que la règle de la majorité.

Règle de l'alpha-majorité

$$x \underset{*}{\succ} x' \Leftrightarrow P(x,x') > \alpha \cdot I \text{ avec } \alpha > \tfrac{1}{2}$$

Règle de Borda

On a I joueurs et N issues. Le joueur i va classer ses préférences parmis les N issues.
Si x_n est classé en premier alors $U_i(x_n) = N$;
Si x_n est classé dernier alors $U_i(x_n) = 1$;
Si x_n et x_m sont indifférentes, on leur attribue l'utilité moyenne des deux positions du classement qu'elles occupent.
On a donc :

$$U^*(x) = \sum_{i=1}^{I} U_i(x)$$
$$x \underset{*}{\succ} x' \Longleftrightarrow U^*(x) > U^*(x')$$

Cette règle ne définit pas un ordre total.

$$\left.\begin{array}{l} x \underset{1}{\succ} y \underset{1}{\succ} z \\ y \underset{2}{\succ} z \underset{2}{\succ} x \\ z \underset{3}{\succ} x \underset{3}{\succ} y \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} U_1(x) = 3, U_1(y) = 2, U_1(z) = 1 \\ U_2(x) = 1, U_2(y) = 1, U_2(z) = 3 \\ U_3(x) = 1, U_3(y) = 2, U_3(z) = 3 \end{array}\right.$$
$$\Longrightarrow \quad U^*(x) = U^*(y) = U^*(z) = 6$$

Propriété :

Une règle de choix social doit définir une relation d'ordre antisymétrique et négativement transitive sur les issues collectives de X

Propriété : Pareto-efficacité

$$\forall i \;\; x \underset{i}{\succ} x' \Rightarrow x \underset{*}{\succ} x'$$

Propriété : Indépendance des alternatives non pertinentes

Soient x et x' deux issues de X. Le classement collectif de ces deux issues ne se modifie pas lorsque nous modifions le classement des consommateurs relatifs à d'autres issues.

Propriété : Abscence de dictateur

Aucun des consommateurs i ne se pose en tant que dictateur dans le sens ou il ne peut pas imposer se préférence à la collectivité.

$$\{i | x \underset{i}{\succ} x' \Leftrightarrow U^*(x) > U^*(x')\} = \emptyset$$

Propriété : Impossibilité de Arrow

Dès qu'il y a trois individus et trois issues sociales différentes, il est impossible de trouver une règle sociale satisfaisante simultanément aux quatres propriétés précédentes.

Chapitre 4

Consommateur

Mécanisme des prix Équilibre général

4.1 Position du problème

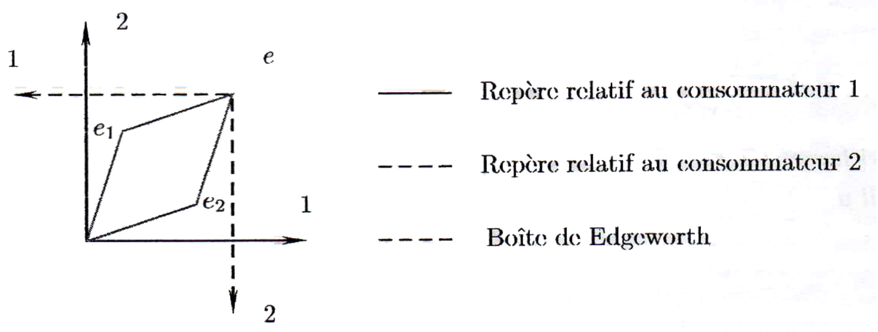
- Soit I consommateurs notés : $1, 2, ..., n, ..., N$.
  Soit K biens de consommations notés : $1, 2, ..., k, ..., K$.
  Chaque joueurs i a une fonction d'utilité $U_i : \mathbb{R}_+^k \to \mathbb{R}$
  Soit $x_n = (x_n^1, ..., x_n^k, ..., x_n^K) \in \mathbb{R}_+^k$ le pannier du joueur n.
- Les dotation initiales (quantités disponibles totales) sont : $(e_1, ..., e_k, ..., e_K)$.
- Les échanges sont purs, il n'y a pas de transformation de produit.
  La dotation initiales est répartie entre les paniers initiaux (e_k^n) des joueurs.
  On a donc $e_k = \sum_{n=1}^{N} e_k^n$.
- On note $(p_1, ..., p_k, ..., p_K)$ les prix de chaque produit.

On a :$e_1 = \begin{pmatrix} e_1^1 \\ e_2^1 \end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix} e_1 - e_1^1 \\ e_2 - e_2^1 \end{pmatrix}$

<u>Définition :</u> Économie concurrentielle

C'est la donnée de :

- *la liste des utilisateurs*
  leur fonctions d'utilité
  la liste des biens
- *leurs dotations initiales*



Quel est le prix d'équilibre ?

Soit p le vecteur d'équilibre des K biens. On a :$p(p_1, ..., p_k)$. Soit Y_i la richesse initiale de l'individus i.

$$Y_{=}\langle p|e_i\rangle = \sum_{k=1}^{K} p_k e_k^i$$

L'individu i va chercher à maximiser sa fonction d'utilité U_i tout en sachant qu'il ne peut pas dépenser plus que ce qu'il a. Il a donc une contrainte. On se retrouve avec le problème d'optimisation suivant :

$$max_{x \in X} U_i(x) \text{ avec } \langle p|x_i\rangle \leq \langle p|e_i\rangle$$

<u>Remarque :</u>

Tout ceci n'est valable que pour un prix p donné.

Définition :

On appelle équilibre général ou walrasssien d'une économie d'échange pur donnée, un vecteur de prix p et un ensemble de paniers x, vérifiant :

– *x_i est solution du problème pour p donnée :*

$$max_{x \in X} U_i(x) \text{ avec } \langle p|x \rangle \leq \langle p|e_i \rangle$$

– *les marchés s'équilibrent :* $\sum x_i \leq \sum e_i$

En fait, nous prendrons l'égalité en faisant l'hypothèse de non gaspillage.

L'ensemble des vecteurs x_i est appelé : allocation finale des consommations d'équilibre.

Propriété : Théorique

Dans la plus part des situations d'échange pur, les consommations finales résultant des échanges reproduisent les allocations finales d'un d'un équilibre walrassien, et les prix correspondent au prix d'équilibre walrassien.

Remarque :

1. Si (p, x_i) est un équilibre walrassien alors $(\lambda p, x_i)$ l'est aussi
2. Si $\forall U_i$ est croissante alors $p \geq 0$
3. La non saturation locale entraîne que les consomateurs épuisent leurs richesse. Dans ce cas, on a : $\langle p|x \rangle = \langle p|e_i \rangle$
4. Il n'est pas possible d'observer un équilibre walrassien avec tous les prix nuls dès qu'il existe un consommateur dont les préférences sont localement non saturées.

Critique du modèle :

– Chaque consommateur connait le prix de l'ensemble des biens et peut obtenir le bien au prix donné. En réalité, les prix varient selon les magazins.
– Les consomateurs doivent pouvoir acheter et vendre des quantités de biens au prix du marché. Ici, les consommateurs sont tous égaux or en réalité ils ne se comportent pas de façon rationnelle.
– Le cas étudié est un cas d'échange pur, il n'y a pas de production.

4.2 Éfficacité de l'équilibre générale

L'allocation des ressources correspondant à un équilibre walrassien est-elle une bonne allocation pour cette économie ?

Théorème :

L'allocation des ressources correspondant à un équilibre walrassien est toujours une allocation Pareto-efficace de la dotationsociale totale.

Théorème :

Soient des préférences convexes, continues croissantes et localement non saturées. Soit x' une allocation Pareto-efficace des ressources initiales, strictement positive, c'est-à-dire $\forall i \forall k \ x_k^i > 0$. Alors l'allocation x^i peut être considérée comme l'allocation de l'équilibre walrassien en procédant au préalable à une redistribution appropriée des dotations initiales entre les consommateurs.

4.3 Exercice : Économie d'échange

On a deux agents $(1, 2)$ et deux biens (t, q). la fonction d'utilité de chaque agent est :

$$U_1(t, q) = 0.4 \ln t + 0.6 \ln q \text{ avec } t_1 = 10 \ q_1 = 10$$
$$U_2(t, q) = 0.5 \ln t + 0.5 \ln q \text{ avec } t_2 = 5 \ q_2 = 10$$

Quel est l'équilibre walrassien de cette économie ?

L'agent 1 veut maximiser son bénéfice avec la contrainte qu'il ne peut pas dépenser plus que sa dotation initiale.

$$\max{}_{t,q}(0.4 \ln t + 0.6 \ln q)$$

On applique le Lagrangien pour l'agent 1.

$$L_1 = 0.4 \ln t + 0.6 \ln q + \lambda[(10 - t)p_t + (10 - q)p_q])$$

$$\begin{array}{r}
\frac{\partial L_1}{\partial t} = \frac{0.4}{t} - \lambda p_t = 0 \\
\frac{\partial L_1}{\partial q} = \frac{0.6}{q} - \lambda p_q = 0 \\
\frac{\partial L_1}{\partial \lambda} = (10 - t)p_t + (10 - q)p_q = 0
\end{array}$$

On pose p_i. On obtient en manipulant les trois équations ci-dessous :

$$\begin{array}{rcl}
\lambda & = & \frac{1}{10(p_t+p_q)} \quad = \frac{1}{10(1+P_q)} \\
t & = & 6(1 + p_q) \\
q & = & \left(1 + \frac{1}{p_q}\right)
\end{array}$$

On applique le Lagrangien pour l'agent 2 *

$$L_2 = 0.5 \ln t' + 0.5 \ln q' + \lambda[(5 - t')p_t + (10 - q')p_q])$$

$$\begin{array}{r}
\frac{\partial L_2}{\partial t'} = \frac{0.5}{t'} - \lambda p_t = 0 \\
\frac{\partial L_2}{\partial q'} = \frac{0.5}{q'} - \lambda p_q = 0 \\
\frac{\partial L_2}{\partial \mu} = (5 - t')p_t + (10 - q')p_q = 0
\end{array}$$

On obtient :

$$\begin{array}{rcl}
\mu & = & \frac{1}{5(p_t+p_q)} \\
t' & = & 2,5 \cdot \left(1 + \frac{2p_q}{p_t}\right) \\
q' & = & 2,5 \cdot \left(2 + \frac{p_t}{p_q}\right)
\end{array}$$

Or

$$\begin{cases} t' = 15 - t \\ q' = 20 - q \end{cases}$$

En remplaçant dans les équations obtennues précédement, on obtient un système de trois équations à résoudre :

$$\begin{cases} q = \frac{3}{2} \cdot A \cdot t \\ q = 10 + 10 \cdot A - A \cdot t \\ q = 20 - 15 \cdot A + A \cdot t \end{cases}$$

Les solutions sont donc :

$$A = \tfrac{18}{17} \; t_1 = \tfrac{70}{9} \; q_1 = \tfrac{210}{17} \; t_2 = \tfrac{65}{9} \; q_2 = \tfrac{130}{17}$$

A l'état initial : $U_1 = 2.30$ et $U_2 = 1.96$
Au temps 1 **:** $U_1 = 2.33$ et $U_2 = 2.01$
Il y a eu des échanges avant d'arriver au point d'équilibre.

Chapitre 5

La firme Néo-classique

Hypothèse :

- Le consommateur maximise son utilité sous la contrainte de son budget.
- La firme maximise son profit sous des contraintes technologiques.
- Nous supposonsque les firmes ont des capacités de production.

Définition : Netputs

Les inputs et les outputs sont généralisés par les netputs. Les inputs on un coefficient négatif et les outputs un coefficient positif.
Notation :
- *Z l'ensemble des vecteurs netputs réalisables.*
- *Z^l : netputs réalisables à long terme.*
- *Z^e : netputs réalisables à court terme.*
- *$Z^e \subset Z^l$: la marge de manoeuvre est plus grande à long terme qu'à court terme.*

Hypothèse : Convexité

L'ensemble des netputs réalisables est un ensemble convexe. Si z et z' sont deux vecteurs réalisables pour la firme alors tout vecteur intermédiaire ζ est réalisable.

$$\forall (z, z') \in \mathbb{Z}^2 \ \forall \alpha \in [0, 1]$$

$$\alpha \cdot z + (1 - \alpha) \cdot z' = \zeta \in \mathbb{Z}$$

Hypothèse : Libre disposition

$$\left.\begin{array}{c} z \in \mathbb{Z} \\ z' \leq z \end{array}\right\} \Rightarrow z' \in \mathbb{Z}$$

Corollaire :

1. Les excédents sont gratuits (ne prend pas en compte les produits poluants).
2. On a la possibilité de stopper la production : $0 \in \mathbb{Z}$. Cela est vrai à long terme mais non à court terme.

Soit $y = (y_1, ..., y_M)$ un vecteur d'outputs donné. Soit $x \in \mathbb{R}^N$ l'ensemble des inputs nécessaires à la production de y.

$$V(y) = \{x \in \mathbb{R}^N \text{ tel que } (-x, y, 0) \in \mathbb{Z}\}$$

Pouvons nous trouver le vecteur de netputs z défini par :

$$z = (-x, y, 0) \in \mathbb{Z}$$

$$(\underbrace{-x_1, ..., -x_N}_{inputs}, \underbrace{y_1, ..., y_M}_{outputs}, \underbrace{0, ..., 0}_{nonputs}) \in \mathbb{Z}$$

Propriété :

- *L'ensemble des $V(y)$ est convexe.*
- *Si $x \in V(y)$ et $x' \geq x$ alors $x' \in V(y)$.*

Cas d'un output unique

cas $M = 1$. Dans ce cas la firme tente, a pratir d'un niveau d'input donné $(x_1, ..., x_N)$, de produire le maximum d'output y possible.

5.1 Fonction de production

Définition :

La fonction de production $f(x)$ associe à un niveau d'input donné la quantité maximale d'output que l'on peut produire :

$$f(x) = \max y : x \in V(y)$$

Propriété :

La fonction de production f est non croissante.

$$x > x' \Rightarrow f(x) > f(x')$$

Cette propriété se déduit de la libre disposition de Z.

Propriété :

Z est convexe donc $f(x)$ est quasi-concave. $V(y)$ est convexe.

5.2 Fonction de profit

L'entreprise maximise ses profits.

$$\prod : \begin{array}{ccc} Z & \rightarrow & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & \prod(z) \end{array} = \sum_{k=1}^{K} p_k \cdot z_k = \langle p \cdot z \rangle$$

Bien évidemment les inputs sont négatifs et les p_k sont positifs. Nous faisons ici une hypothèse : la firme est price-taker. Si la firme résout le problème $\max\langle p(z) \cdot yz \rangle$ sous la contrainte $z \in Z$.

1.

Si la firme est dans un environnement concurrentiel alors le problème devient simple :

$$\max_{z \in Z} \langle p \cdot z \rangle \text{ pour } p \text{ fixé.}$$

Les courbes d'iso-profit sont définies par $\langle p \cdot z \rangle =$ constante.

2.

Si la firme peut faire varier les prix alors nous avons des courbes d'iso-profit convexes.

5.2.1 Fonction analytique

Soit une firme monoproduit avec une fonction de production f.

Firme concurentielle

$$\max_{\substack{p \geq 0 \\ x}} \cdot f(x) - \sum_{n=1}^{N} \omega_n \cdot x_n$$

ω_n est le prix des facteurs de production.

$$p \cdot \frac{\partial f}{\partial x_n} \omega_n$$

Le prix du marché de chaque facteur est égal à la valeur du produit marginal de ce facteur.

La firme fixe le prix du produit qu'elle fabrique (Monopole ou Digopole)

$$\max_{\substack{p \geq 0 \\ x}} p(f(x)) \cdot f(x) - \sum_{n=1}^{N} \omega_n \cdot x_n$$

$$[p'(f(x)) \cdot f(x) + p(f(x))] \cdot \frac{\partial f}{\partial x_n} = \omega_n$$

Le prix de chaque facteur doit être égal à la recette marginale de ce facteur.

La firme est capable de faire bouger tous les prix

$$\max_{\substack{p\geq 0\\x}} p(f(x)) \cdot f(x) - \sum_{n=1}^{N} \omega_n(x_n) \cdot x_n$$

$$[p'(f(x)) \cdot f(x) + p(f(x))] \cdot \frac{\partial f}{\partial x_n} = \omega_n'(x_n) \cdot + \omega_n(x_n)$$

Le coût marginal de chaque facteur doit être égal à sa recette marginale.

5.2.2 La fonction de profit d'une firme concurentielle

Possibilité de production Z. Le problème de la firme ($PF(p)$) est de maxiser $\prod(p) = \langle p \cdot z \rangle$ sous la contrainte $z \in Z$. Si le problème admet une solution nous disons que $\prod(p)$ est la fonction de profit de l'entreprise.
$PF(p)$ admet-il une solution $\forall p > 0$? La réponse est *non*. Donc quelles sont les conditions pour que $PF(p)$ admette une solution ?

$$\prod(p) = \sum_{i=1}^{N} p_i z_i \; z \in Z$$

Propriété :

La fonction de profit $\prod$ est :

1. *homogène de degré 1 par rapport au prix p ;*
2. *continue en p ;*
3. *convexe en p.*

Propriété :

1. *Si z^* est une solution de $PF(p)$, alors z^* est une solution de $PF(\lambda \cdot p), \forall \lambda > 0$.*
2. *Si Z est convexe alors l'ensemble des solutions $PF(p)$ est convexe $\forall p$.*

5.2.3 Fonction de coût

- Une firme produit M outputs ave N inputs ;
- x est le vecteur d'inputs ;
- y est le vecteur d'outputs ;
- $V(y)$ l'ensemble des x permettant de produire y ;
- Le marché est concurrentiel ;
- les coût des N inputs sont $(\omega_1, ..., \omega_N) \in \mathbb{R}^N$.

Soit $PMCF$ le problème de minimisation des coûts de la firme :

$$PMCF : \min\langle \omega \cdot x \rangle, \text{ sous la contrainte } x \in V(y)$$

$$\left.\begin{array}{c} V(y) \neq \emptyset \\ V(y) \text{ est fermé} \\ \forall n \;\; \omega_n > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow PMCF \text{ a une solution.}$$

<u>Démonstration :</u>

Si $V(y)$ n'est pas vide, alors $\langle \omega \cdot x \rangle, x \in V(y)$ est calculable et le problème devient :

$$A = \{x' \in V(y) | \langle \omega \cdot x' \rangle \leq \langle \omega \cdot x \rangle ; x' \geq 0\}$$

Si l'ensemble $V(y)$ est fermé, alors A est compact et il existe une solution.

$$CT(y) = \min\{\omega(x) \cdot x | y = f(x)\}$$

La fonction $CT(y)$ nous donne la combinaison la moins coûteuse pour produire y.

$$PMCF : \max_y (p(y)) \cdot y - CT(y)$$

$\boxed{p'(y) \cdot +p(y) = CT'(y) = C_m}$ revenu marginal = coût marginal

Si p est indépendant de y alors :

$$\boxed{p = C_m(y)} \qquad \boxed{C_M = \frac{CT}{y}}$$

5.2.4 Coûts fixes et variables, à court et à long terme

Dans de nombreux modèles nous avons certains inputs qui peuvent être modifiés à court terme et d'autres à long terme.

Exemple :

(Firme monoproduit en marché concurentiel)

$$\underbrace{x_1, ..., x'_N}_{\text{fixé à } CT}, \underbrace{x'_N, ..., x_N}_{\text{variable à } CT}$$

Le coût fixe ne bouge pas à court terme contrairement aux coûts variables.

$$\min_{x_{N'|1 \dots x_N}} \sum_{n=N'+1}^{N}$$

$$CT(y) = CF + CVT(y)$$

Chapitre 6

La concurence parfaite

Ici, aucun des individus n'a plus de poids qu'un autre. Donc tous les individus ont le même poids.

6.1 Hypothèses

- Les consommateurs achètent chez l'un ou l'autre des producteurs. Le produit n'est donc pas différentié. Il n'y a pas de marques. Les consommateurs sont parfaitement informés des prix.
- les vendeurs ne choisissent pas les clients et peuvent à tout moment baisser les prix.
- Il n'y a pas de coût additionnel de vente ou de revente. Quelqu'un de riche ne peut pas avoir le monopole. Le prix unitaire du bien est unique. C'est le prix du marché. On dit que les entreprises sont *price-taker*.

6.2 Définition de l'équilibre

Un équilibre dans un marché concurrentiel consiste en la donnée de :
- Un prix p ;
- La quantité acquise par chaque consommateur ;
- la quantité fournie par chaque entreprise.

Ces données doivent satisfaire aux contraintes suivantes :
- Chaque consommateur achète exactement la quantité qui maximise son utilité ;
- Chaque entreprise maximise ses profits ;

– La somme des marchandises achetées est égale à la somme des marchandises fournies car il y a équilibre. $D(p) = S(p)$.

Il y a J entreprises. Chacune d'elles a une fonction de coût notée : $CT_j(y)$. La fonction coût est convexe.
$Y_j(p)$: quantité offerte par l'entreprise j.
p : C'est le prix du marché, où $C_{mj}(Y_j(p)) = p$ est le coût marginal. C_m est croissante.

La fonction de l'offre est :

$$CT_j = \sum_{i=1}^{N} \omega_i \cdot x_i + K_j$$

On suppose que les entreprises disposent d'une dotation initiale de ces inputs, telle que certains soient ajustables à court terme et d'autre à moyen terme.

Exemple :

Les facteurs ajustables à court terme sont la publicité, les matières premières. Ceux ajustables à moyen terme sont les salariés, l'usine.

Soient les dotations initiales suivantes :

$$\widehat{x}_1^j, ..., \widehat{x}_{N'}^j, \widehat{x}_{N'+1}^j, ..., \widehat{x}_N^j$$

Les facteurs de 1 à N' sont fixés à court terme et variables à long terme ; les facteurs de $N'+1$ à N sont variables à court terme.

6.2.1 Court terme

Coût total variable à court terme de j : $CTVCT_j$

C'est la solution de minimisation :

$$\min_{x^j_{N'|1 \dots x^j_N}} \sum \omega_n \cdot x_n \; y = f_j(\underbrace{\widehat{x}_1^j, ..., \widehat{x}_{N'}^j}_{\text{fixé à } CT}, \underbrace{\widehat{x}_{N'+1}^j, ..., \widehat{x}_N^j}_{\text{variable à } CT})$$

Coût total à court terme : $CTCT$

$$CTCT = \sum_{n=N'+1}^{N} \omega_n \cdot x_N^i + \sum_{n=N'+1}^{N} \omega_n \cdot \widehat{x}_N^i + K_j$$

Propriété :

Si la fonction de production f est strictement concave alors la fonction de coût total est strictement convexe.

6.2.2 Moyen terme

Définition : Coût total à moyen terme :CTMT

c'est une solution de la minimisation : $CTMT = \min\limits_{x_1^j \to x_N^j} \sum\limits_{n=1} \omega_n \cdot x_n^j$

Remarque :

Pour les dotations initiales, on considère que ce sont les facteurs de production à l'état initial.

Remarque :

$$\forall q \;\; CTCT(q) \geq CTMT(q)$$

6.2.3 Long terme

Il y a J entreprises :

- celles qui sont actives, c'est-à-dire déjà dans le marché, et qui produisent ;
- celles qui sont inactives, c'est-a-dire pas encore entrées sur le marché.

Hypothèse : (Règle du marché)

- Une entreprise reste sur le marché quand son profit est positif ;
- Des entreprises entrent sur le marché si et seulement si elles pensent qu'elles resteront sur le marché ;
- Si une entreprise n'est pas sur le marché et que ses profits potentiels sont nuls alors elle n'entre pas sur le marché.

Définition :

Un équilibre à long terme dans un marché parfaitement concurrentiel consiste en la donnée de :

1. *Le prix p d'un bien ;*
2. *Une liste de $j = 1, ..., J^* < J$ des entreprises qui sont sur le marché*
3. *Un plan de production pour chaque entreprise active (dans J^*) telle que :*
   - *(a) Les prix étant donnés, chaque entreprise active maximise ses profits lorsqu'elle exécute le plan de production ;*
   - *(b) Chaque entreprise active réalise des profits positifs ou nuls quand elle exécute ce plan ;*
   - *(c) Chaque entreprise non active (dans $J - J^*$) réaliserait des profits négatifs ou nul si elle réalisait le plan de production ;*
4. *L'offre totale est égale à la demande totale aux prix p.*

Hypothèse :

Pour chaque entreprise active de la branche, on suppose qu'il existe un "grand nombre" d'autres entreprises prêtes à devenir actives au besoin, et qui ont la même fonction de production et les mêmes coûts fixes.

Propriété :

Si l'hypothèse est vraie alors les entreprises actives font des profits nuls à long terme.

Remarque :

En effet, si les profits sont positifs alors son entreprise jumelle qui n'est pas dans le marché pourrait rentre dans le marché. Donc à long terme, à l'équilibre, on a :

$$\text{profit} = (\text{ prix } - CMLT) \cdot \text{ Quantité}$$
$$\text{profit} = 0 \Rightarrow \text{prix} = CMLT \text{ (coût moyen à long terme)}$$

Corollaire :

Si l'hypothèse est vérifiée alors la quantité produite par les entreprises à l'équilibre à long terme est efficace. C'est donc la quantité qui minimise les coûts moyens.

En résumé, pour trouver le prix il faut :

1. Minimiser le coût moyen
2. Considérer l'égalité *coût moyen = prix*

6.3 Exemple

Soit une branche industrielle qui produit un bien nommé "Pillip". Toutes les entreprises de cette branche ont la même fonction de production notée y.

$$y = k^{\frac{1}{6}} v^{\frac{1}{3}}$$

k et v sont deux inputs : Kapitoses et Vegetus. Les Vegetus sont variables à court terme et les Kapitoses sont variables à moyen terme.

– Le coût fixe de production est :

$$K = \$\frac{1}{6}$$

– Le coût des inputs est :

$$W_v = \$1 \quad W_k = \$\frac{1}{2}$$

– Pour le prix p, la fonction de demande est :

$$D(p) = 400 - 100 \cdot p$$

Équilibre à long terme du marché

Les entreprises vont minimiser le coût de production sur v et k.

$$C = \min_{v,k} \left(\frac{k}{2} + v\right)$$

(sous la contrainte $y = k^{\frac{1}{6}} \cdot v^{\frac{1}{3}}$)

On a donc : $k = \frac{y^6}{2v^2} \Rightarrow \min\left(\frac{y^6}{2v^2} + v\right)$

On remplace k dans la formule du coût à minimiser et on dérive par rapport à v le coût.
On obtient :

$$\frac{dc}{dv} = -\frac{y^6}{v^3} + 1 = 0 \Rightarrow v = y^2 \Rightarrow v = k = y^2$$

Le coût total CT est :

$$CT(y) = \frac{y^2}{2} + y^2 + \frac{1}{6} = \frac{3}{2}y^2 + \frac{1}{6}$$

On cherche à calculer le coût moyen CM car à l'équilibre on a

$$CM = p$$

.

L'efficacité de l'équilibre nous donne :

$$CM = \frac{CT}{y} = \frac{3}{2}y + \frac{1}{6y}$$

A l'équilibre, le CM est minimum car on va produire la quantitée y qui minimise CM. On a donc :

$$\frac{dCM}{dy} = \frac{3}{2} - \frac{1}{y^2} \Rightarrow 18 \cdot y^2 = 2 \Rightarrow y = \frac{1}{3}$$

Le minimum et y : $y = \frac{1}{3}$, donc : $k = \frac{1}{9} = v$

Chaque entreprise va produire $y = \frac{1}{3}$. Le prix du marché est le coût moyen donc $p = \$1$. On veut calculer le nombre J^* d'entreprises qui sont présentes sur le marché. Il y a équilibre à long terme si l'offre est égale à la demande. On sait que $D(p) = 400 - 100p$.
On en déduit que $D = 300 = J^* \times \frac{1}{3}$. $J^* = 900$

Calcul des équilibres à court, moyen et long termes après une modification de D

On imagine que la fonction de demande se modifie soudainement et devient :

$$D(p) = 750 - 150 \cdot p$$

Équilibre à court terme :

A court terme k est fixé à $\frac{1}{9}$. On ne peut donc jouer que sur v. On a :

$$y = \left(\frac{1}{9}\right)^{1/6} \cdot v^{1/3} \Rightarrow \frac{1}{9} \cdot v^2 \Rightarrow v^2 = 9y^6$$

$$v = 3y^3$$

Le coût total variable CTV est : $CTV = v \times 1 = 3 \cdot y^3$

D'après le cours sur la firme néo-classique, le coût marginal est $C_m(y) = 9y^2 = p$, on en déduit : $y = \frac{1}{3}\sqrt{p}$. À l'équilibre, l'offre est égale à la demande donc $750 - 150p = 900y = 300p^{\frac{1}{2}}$. On a donc $150p + 300p^{\frac{1}{2}} - 750 = 0$. En posant $p = x^2$, il devient $x = 1.449$, donc $p = 2.1$.

$$p = 2.1, y = 0.483, \text{ et } v = 3 \times (0.483)^3$$

Le résultat à court terme est :

$$R = CA - CT = yp - \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{9} + v + \frac{1}{6}\right)$$

$$CTCT = 0.560 \text{ pour } y = 0.483 \text{ et } CMCT = \frac{0.560}{0483} = 1.16$$

$$R = 0.454$$

Équilibre à moyen terme :

A moyen terme on peut jouer sur k et v. On a :

$$CT = \frac{3}{2}y^2 + \frac{1}{6}$$

$$C_m = 3y = p$$

A l'équilibre, l'offre est égale à la demande, donc :

$$750 - 150 \cdot p = 900 \cdot y = 300 \cdot p$$

$$p = \frac{5}{3} = 1.667 \ y = \frac{5}{9}$$

Donc $CT = 0.629$, $CA = y \cdot p = \frac{25}{27}$ et $CMMT = \frac{C_T}{y} = \frac{34}{54} \times \frac{9}{5} = 1.133$. Le $CMMT$ est plus faible que le $CMCT$. On en déduit le résultat à moyen terme :

$$R = \frac{8}{27}$$

<u>**Remarque :**</u>

Équilibre à long terme :

On a le même résultat qu'avant, c'est à dire :

$$y = \frac{1}{3}\, p = \$1$$

$$D = 750 - 150 \cdot p = 600 = \frac{J^*}{3}$$

Donc :

$$J^* = 1800$$

Il y a donc 900 entreprises sur le marché qui entrent sur le marché car la demende augmente.

Chapitre 7

Le monopole

7.1 Modèle

Il n'y a qu'une entreprise et plusieurs clients. Le prix p de la marchandise est fixé pa l'entreprise donc les clients sont *price takers*. Nous appelons monopole cette entreprise unique.

$D(p)$ est la fonction de demande.
$P(d)$ est la fonction inverse de D telle que : $P[D(p)] = p$.

Remarque :

La pente de la fonction de demande est toujours négative. D est continûment différentiable.

$$\forall p > 0 \ D(p) \geq 0 \text{ et } D'(p) < 0$$

$$\exists p_0 \text{ tel que } D(p_0) = 0 \text{ et } \forall p > p_0 \ D(p) = 0$$

i.e. à partir d'un certain prix, la demande s'annule.

7.2 On joue avec la production

Soit x la quantité produite et $CT(x)$ le coût total de la production. Le monopole va maximiser son bénéfice total (BT) de sorte que le coût marginal C_m soit égal à la recette marginale R_m.

$$\max_x [xP(x) - CT(x)]$$

La recette totale, c'est-à-dire le chiffre d'affaire (CA) est :

$$CA = xP(x)$$

Le bénéfice total est : $BT = xP(x) - CT(x)$
Pour trouver le coût marginal, on dérive et on obtient :

$$C_m(x) = P(x) + xP'(x) = R_m$$

Soit $\varepsilon(x)$, l'élasticité de la demande :

$$\varepsilon(x) = \frac{P(x)}{xP'(x)}$$

- Si $-\varepsilon(x) < 1$ alors la demande est inélastique ; dans ce cas, le monopole gagne plus quand il produit moins ;
- Si $-\varepsilon(x) > 1$ alors la demande est élastique ;
- Si $-\varepsilon(x) = 1$ alors la demande est unitaire.

Remarque :

$$\varepsilon(x) < 0 \text{ car } x > 0,\ P(x) > 0 \text{ et } P'(x) < 0$$

La recette marginale R_m est donc :

$$R_m = P(x)\left[1 + \frac{1}{\varepsilon(x)}\right]$$

7.3 On joue avec les prix

C'est le problème alternatif. Ici, c'est la demande qui va varier en fonction du prix. À l'équilibre, l'offre est égale à la demande donc $x = D(p)$.
Le monopole va maximiser son bénéfice total :

$$\max_p [p \cdot D(p) - CT(D(p))]$$

Remarque :

Quantité efficace
Comme nous l'avons vuent dans les chapitres précédents, la quantité efficace est le niveau de production qui minimise le coût moyen de production. Il n'y a aucune raison pour que le monopole produise une quantité efficace.

7.4 Conserver le monopole

– Le législateur peut imposer le monopole ;
– Si vous avez un brevet, vous êtes monopolistique sur le marché ;
– Si vous n'êtes pas dans les deux cas précédents et vous êtes sur le marché en position dominante, alors vous faites en sorte d'empècher les autres de rentrer sur le marché.

Exemple :

Considérons un marché monopolistique.
Le coût de la production est séparé en coût variable de \$1 par unité et un coût fixe de \$2.25. La demande du marché est de la forme $9-p$. Quel est la production, le prix du marché, et le profit théorique du monopole ?

À l'équilibre on a $D(p) = S(p)$. Donc,

$$9 - p = D(p) = S(p) = x \Rightarrow p = 9 - x$$

Le monopole va maximiser sont profit en jouant sur la production.

$$\begin{aligned}\prod(x) &= p(x) \times x - (C_v \times x + C_f) \\ &= (9 - x) \times x - (1 \times x + 2.25) \\ &= -x^2 + 8 \cdot x - 2.25\end{aligned}$$

$$\frac{d\prod}{dx} = -2 \cdot x' + 3 = 0 \Rightarrow x' = \frac{3}{2}$$

$$\prod{}' = -\frac{9}{4} + \frac{9}{2} - \frac{9}{4} = 0$$

Or, une entreprise dont le profit potentiel est nul n'entre pas sur un marché. En ne maximisant pas sont profit, le monopole empêche les concurrents d'entrer sur le marché. Il préserve ainsi son profit sur le long terme.

Détail de l'exemple vue en cours

Complément de notation en italique.

Rappel : Il y a toujours une fonction de demande :

$$D(p) = S = x \quad \forall p > 0 \quad D(p) \geq 0 \quad D'(p) < 0$$

$$\exists p_0 > 0 \text{ tel que } D(p_0) = 0 \quad \forall p > p_0 \quad D(p_0) = 0$$

Si on pose un prix tel que personne ne puisse se le permettre, la fonction de demande sera nulle.

Quand une entreprise fixe un prix, sa fonction profit est :

$$(1) \qquad \prod = xP(x) - CT(x)$$

Le coût total (CT) = coût marginal + coût fixes.

Une autre écriture de la fonction de profit peut être :

$$(2) \qquad \prod = P \cdot D(p) - CT(D(p))$$

Ou la variable est p.

Le monopole choisit la production qui maximise sont profit.

Enoncé de l'exemple :

Soit un marché oú $D(p) = 9 - p$ *On a ici* $p_0 = 9$

Soit une entreprise qui à :
- un coût variable $CV = 1$€
- un coût fixe $CF = 2.25$€

On déduit de (1) : $\Pi = x(9 - x) - (x \times 1 + 2,25)$

$\dfrac{d\Pi}{dx} = 9 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = 4$ et $p = 5$ valeur de $p$et x optimum.

Profit de cette entreprise :$4 \times 5 - 6,25 = 13,75$€

On déduit de (2) : $\Pi = p(9 - p) - ((9 - p) + 2,25)$

$$\frac{d\Pi}{dx} = 9 - 2p + 1 = 0 \Rightarrow p = 5$$

On constate que : l'entreprise produit 5 unités ($x = 5$) et qu'elle les vend à un prix de 4 ($p = 4$).

Fonction de profit : $\Pi = 20 - 7,25 = 12,75$

Cela est fait pour empècher une nouvelle entreprise d'entrer sur le marché.

Dans le cas de l'arrivée d'une seconde entreprise $\mathbb{E}'$ sur le marché :

$$D(p) = 9 - p = x + x' \qquad x' = 4 - p$$

Fonction de profit de $\mathbb{E}'$: $\Pi = (4 - x')x' - x' - 2.25$

$$\frac{d\Pi}{dx'} = 4 - 2x' - 1 = 0 \Rightarrow x' = \frac{3}{2} \text{ donc } p = \frac{5}{2}$$

Avec x' le produit de l'entreprise $\mathbb{E}'$.

$$\Pi_{\mathbb{E}'} = \frac{5}{2} \times \frac{3}{2} - 2,25 - \frac{3}{2} = 0$$

Ceci nous montre que $\mathbb{E}'$ n'a aucun intéret à entrer sur le marché.

Cas où $\mathbb{E}$ décide de placer son prix à l'optimum.
Si le monopole : $x = 4$ et $p = 5$

$$9 - p = x + x' \Rightarrow x' = 5 - p$$

$$\Pi_{\mathbb{E}'} = x'(5 - x') - x' - 2,25$$
$$\frac{d\Pi_{\mathbb{E}'}}{dx'} = 5 - 2x' - 1 = 0 \Rightarrow x' = 2$$
$$\Pi_{\mathbb{E}'} = 2 \times 2 - 2,25 = 1,75$$

A $1,75$; il y a un intéret à entrer sur le marché.

Si $\mathbb{E}$ met sur le marché ses produits en restant à l'optimum :

$$\Pi_{\mathbb{E}'} = 4 \times 3 - 4 - 2,25 = 5,75$$

La rentabilité finale est moindre d'où l'intérêt du prix pratiqué.

7.5 Tarification non-linéaire

Le monopole est d'autant plus fort que :
- il connaît précisément les fonctions d'utilité de chaque consommateur ;
- il est en mesure de fixer un prix différent pour chaque consommateur ;
- il contrôle totalement la revente de son produit.

C'est-à-dire que :
- il sait exactement le prix maximum que peut payer chaque consommateur ;
- il sait exactement à qui il vend ;

– il s'assure qu'aucun client ne contourne le système en achetant le produit à un autre client.

Soit I le nombre de consommateurs.
La fonction d'utilié du consommateur i est :

$$U_i(x_i, y_i)$$

– x_i est la quantité consommé par i ;
– y_i est la richesse qu'il lui reste pour acheter autre chose.

Au départ, la fonction d'utilité de i est :

$$U_i(0, y_i^0)$$

Le consommateur i va acheter un produit si :

$$U_i(x, y_i^0 - z_i) \geq U_i(0, y_i^0)$$

$z_i = px_i$ C'est la prix que le consommateur i a payé pour acheter le produit.
La monopole cherche à maximiser son bénéfice en s'assurant que ses clients soient contents.

$$\underset{x_i}{max} \left[\sum_{i=1}^{l} px_i - CT\left(\sum_{i=1}^{l} x_i \right) \right] \text{ avec la contrainte } \forall i \; U_i(x_i, y_i^0 - px_i) \geq U_i(0, y_i^0)$$

7.6 Exemple de monopole qui vend à un autre monopole

On suppose qu'il y a I régions. La demande de la région i est :

$$x_i = \frac{A - p_i}{B_i} = D(p_i) \text{ c'est-à-dire } p_i = A - B_i x_i$$

Le coût de production est constant, égal à C et on a : $A > C$. A est le même pour toutes les régions. Le monopole fixe un prix de vente par région noté P_i, mais il est linéaire.
Que va essayer de faire le détaillant de la région i ?
Il va chercher à maximiser son bénéfice.

$$RT(x_i) = Ax_i - B_i x_i^2$$

$$CT(x_i) = P_i x_i$$

On veut $R_m = C_m$, donc :

$$A - 2B_i x_i = P_i$$

$$x_i = \frac{A - P_i}{2B_i}$$

On cherche P_i en fonction de p_i. On a :

$$\frac{A - p_i}{B_i} = \frac{A - P_i}{2B_i}$$

donc

$$p_i = \frac{A + P_i}{2}$$

Soit π_i le profit pour les magasins de la région i :

$$\pi_i = \frac{A + P_i}{2}\left(\frac{A - P_i}{2B_i}\right) - x_i P_i$$

Donc

$$\pi_i = \frac{(A - P_i)^2}{4B_i}$$

Le problème n'est pas résolu tant qu'on a pas exprimé P_i en fonction de A, B_i et C qui sont les constantes du problème. Le monopole va maximiser sont bénéfice, donc :

$$\max_{P_i}\left[P_i\left(\frac{A - P_i}{2B_i}\right) - C\left(\frac{A - P_i}{2B_i}\right)\right]$$

$$\max\left[(AP_i - P_i^3 - CA + CP_i)\frac{1}{2B_i}\right]$$

On dérive et on obtient :

$$(AP_i - 2P_i + C)\frac{1}{2B_i} = 0 \Rightarrow AP_i - 2P_i + C = 0$$

On en déduit :

$$x_i = \frac{A - \frac{A+C}{2}}{2B_i} \Rightarrow x_i = \frac{A - C}{4B_i}$$

et

$$p_i = \frac{A - \frac{A+C}{2}}{2} \Rightarrow p_i = \frac{3A + C}{4}$$

enfin

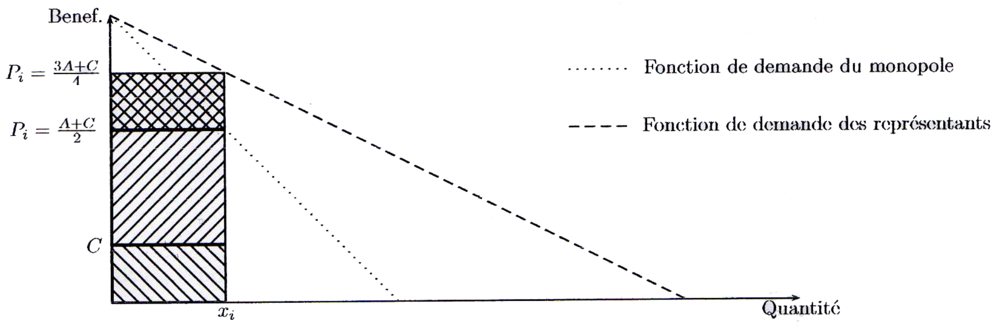
$$\pi_i = \frac{(A-C)^2}{16B_i}$$

Remarque :

Le monopole ne fait pas usage de son pouvoir discriminatoire, c'est-à-dire que quelque soit la région : $P_i = \frac{A+C}{2}$ est constante.

Remarque :

Si le monopole vend directement on a $p_i = P_i$



Chapitre 8

Duopole de Cournot

C'est un marché dans lequel il y a deux producteurs et plusieurs consommateurs. Soit $D = A - P$ la fonction de demande. A l'équilibre, on a l'offre qui est égale à la demande donc $D = X$. Le coût marginal est constant : $C_m = k$ et $A > k$.
Quels sont les différents types d'équilibre suivant les termes ?

8.1 Équilibre à long terme (concurence parfaite)

Le prix à long terme est égal au minimum du coût moyen. Soit P_c la prix de la concurrence pure et parfaite. On a :

$$P_c = k$$

A long terme, le bénéfice est nul. Soit X_c la quantité produite en concurrence parfaite. Cette quantité produite est égale à l'offre, donc on a :

$$X_c = A - k$$

8.2 Équilibre pour le monopole

On cherche à maximiser les bénéfices. Ici, il n'y a pas de coût fixe, on ne s'en préoccupe pas.

$$\text{Bénéfice } = X(A - X) - kX$$

On dérive :

$$A - 2X - k = 0 \text{ avec } R_m = A - 2X \text{ et } C_m = k$$

On en déduit X_m la qualité produite par le monopole :

$$X_m = \frac{A-k}{2}$$

Et P_m le prix du monopole :

$$P_m = \frac{A+k}{2}$$

8.3 Équilibre du duopole de Cournot

Il y a un équilibre concurrentiel.
Le joueur 1 produit x_1 et le joueur 2 produit x_2.
On a :

$$P_d = A - x_1 - X_2$$

On note $BNF_1 = x_1(A - x_1 - x_2) - kx_1$. Le joueur 1 veut maximiser son bénéfice.
On dérive : $A - 2x_1 - x_2 - k = 0$.
On a donc :

$$x_1 = \frac{1}{2}(A - x_2 - k) \; x_1 \text{ dépend de } x_2$$

Dans le duopole de Cournot, on suppose que les joueurs produisent la même chose donc :

$$x_2 = \frac{1}{2}(A - x_1 - k)$$

On résout le système et on obtient :

$$x_1 = \frac{A-k}{3} = x_2$$

Le prix du duopole est donc :

$$P_d = A - \frac{2}{3}(A-k) \quad P_d = \frac{A+2k}{3}$$

8.4 Conclusion

Du point de vue du consommateur, nous avons :

$$P_c < P_d < P_m$$

Du point de vue du producteur, nous avons :

$$\begin{array}{lclcl} BNF_c & = & kX_c - kX_c & = & 0 \\ BNF_m & = & \left(\frac{A+k}{2}\right) \cdot \left(\frac{A-k}{2}\right) - k \cdot \left(\frac{A-k}{2}\right) & = & \frac{(A-k)^2}{4} \\ BNF_d & = & 2\left[\left(\frac{A+2k}{3}\right) \cdot \left(\frac{A-k}{3}\right) - k \cdot \left(\frac{A-k}{3}\right)\right] & = & \frac{2}{9}(A-k)^2 \end{array}$$

$$BNF_c < BNF_d < BNF_m$$

Ces résultats sont conforment à la théorie ! !

Chapitre 9

Duopole de Von Stackelberg

C'est un marché où il y a deux entreprises : un meneur $\mathbb{E}_1$ et un suiveur $\mathbb{E}_2$. $\mathbb{E}_2$ pense que $\mathbb{E}_1$ va faire un duopole de Cournot donc :

$$x_2 = \frac{1}{2}(A - k - x_1)$$

Mais $\mathbb{E}_1$ ne va pas le faire. Elle va regarder comment elle va maximiser son bénéfice sachant ce que $\mathbb{E}_2$ pense.

$$\begin{array}{rcc} BNF_1 & = & x_1 \cdot (A - x_1 - x_2) - k \cdot x_1 \\ & = & x_1(A - x_1 - \frac{1}{2}(A - k - x_1)) - k \cdot x_1 \\ & = & \frac{1}{2}x_1 \cdot (A - k - x_1) \end{array}$$

On dérive :

$$A - 2x_1 - k = 0$$

$$x_1 = \frac{A - k}{2}$$

et

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(A - k - \frac{A - k}{2}\right)$$

$$x_2 = \frac{1}{4}(A - k)$$

On calcule P :

$$P = A - \frac{A - k}{2} - \frac{A - k}{4}$$

$$P = \frac{A + 3k}{4}$$

On en déduit le bénéfice de $\mathbb{E}_1$:

$$BNF_1 = x_1 P - kx_1$$

$$BNF_1 = \frac{(A-k)^2}{8}$$

Remarque :

Avec Cournot, le bénéfice de $\mathbb{E}_1$ était : $BNF_1 = \frac{(A-k)^2}{9}$. On remarque donc qu'avec le duopole de Von Stakelberg, $\mathbb{E}_1$ augmente ses bénéfices.

Chapitre 10

Autres duopoles

10.1 Duopole Von Stackelberg avec deux meneurs

Si les deux firmes conjectuent (pense que) comme le meneur du paragraphe pricédent alors les deux vont produire une quantité de $\frac{A-k}{2}$ et elles se rendront conte qu'elles qu'elles se sont trompés donc il n'y aura pas d'équilibre. Le seul point, pour lequel les conjectures des 2 firmes par rapport à l'autre sont cohérentes est le point où chaque firme produit $\frac{(A-k)}{3}$.

10.2 Duopole de Bertrand

Le duopole de Bertrand est un cas où les deux firmes conjectures que l'autre ne modifiera pas le prix de vente qu'elle à annoncé. C'est un duopole embarassant car si l'une des firmes diminue son prix elle rafle le marché.
En résumé, un équilibre de Bertrand consiste en une paire de prix p_1, p_2 et des quantité vendues x_1 et x_2 telle que :

1. Si $p_1 < p_2$ alors $x_1 = A - p_1$ et $x_2 = 0$
2. Si $p_1 > p_2$ alors $x_2 = A - p_1$ et $x_1 = 0$
3. Si $p_1 = p_2 = p$ alors $x_1 + x_2 = A - p$

Chapitre 11

Exercices

11.1 Minimisation du coût de production

Exercice :

Une enseigne possède deux usines A et B dont les fonctions de coût total de production sont données par :

$$CT_A = \frac{2}{3} \cdot x_A^3 - 5 \cdot x_A^2 + 18 \cdot x_A \; CT_B = 3 \cdot x_B^2 - 4 \cdot X_B + 10$$

Cette entreprise reçoit une commande de 200 produits. Trouvez les quantités à produire par usine (A et B) qui minimisent le coût de production.

Il s'agit de minimiser $CT_A + CT_B$ sous la contrainte $x_A + x_B = 200$

$$\begin{array}{rcc} CT & = & CT_A + CT_B \\ & = & \frac{2}{3} \cdot x_A^3 - 5 \cdot x_A^2 + 18 \cdot X_A + 3 \cdot x_B^2 - 4 \cdot X_B + 10 \\ & = & \frac{2}{3} \cdot x_A^3 - 5 \cdot x_A^2 + 18 \cdot X_A + 3 \cdot (200 - x_A)^2 - 4 \cdot (200 - x_A) + 10 \\ & = & \frac{2}{3} \cdot x_A^3 - 5 \cdot x_A^2 + 18 \cdot X_A + 3 \cdot (x_A^2 - 400 \cdot x_A + ...)^2 - 4 \cdot (200 - x_A) + 10 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \frac{dCT}{dx_A} &= 2 \cdot x_A^2 + 10 \cdot x_A + 18 + \quad 6 \cdot X_A - 1200 + 4 \\ &= 2 \cdot x_A^2 - 4 \cdot x_A - 1178 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dCT}{dx_A} &\iff x_A^2 - 2 \cdot x_A - 589 \quad = 0 \\ &\iff x_a = \pm\sqrt{590} + 1 \end{aligned}$$

La production d'une usine est positive ou nulle, en conséquence : $-\sqrt{590} + 1$ n'est pas une solution acceptable.

$$x_A = \sqrt{590} + 1 \approx 25 \ x_B = 175$$

11.2 Équilibre de marché

Exercice :

Soit un marché dans lequel vous avez 20 petites entreprises et une entreprise dominante.
La fonction du marché est : $D(p) = 700 - 10 \cdot p$
Le coût marginal de l'entreprise dominante est : $C_m(x_D) = \frac{1}{30} \cdot x_D + 10$
Le coût marginal des petites entreprises est : $C_m(x_P) = x_P + 10$

Donnez l'équilibre des valeurs de :
- x_D : Production de l'entreprise dominante ;
- x_P : Production de chacune des petites entreprises ;
- p : Prix du marché ;
- B_D **et** B_P : Bénéfices des entreprises.

À l'équilibre, $D = X$.

$$D = X \Leftrightarrow 700 - 10 \cdot p = x_D + 20 \cdot x_P \Leftrightarrow \boxed{p = 70 - 2 \cdot x_p - \frac{1}{10} \cdot x_D}$$

L'entreprise dominante maximise son bénéfice.

$$\begin{aligned} B_{x_D} &= p \cdot x_D - CT_x \\ &= (70 - 2 \cdot x_P - \frac{1}{10} \cdot x_D) \cdot x_D - CT_{x_D} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial B_{x_D}}{\partial x_D} &= 70 - 2\cdot x_P - \tfrac{1}{5}\cdot x_D - \underbrace{C_m(x_D)}_{\frac{1}{30}\cdot x_D+10}\\ &= 60 - 2\cdot x_P - \tfrac{7}{30}\cdot x_D = 0\end{aligned}$$

Les petites entreprises maximisent leur bénéfice.

$$\begin{aligned}B_{X_P} &= p\cdot x_P - CT_{x_P}\\ &= (70 - 2\cdot x_P - \tfrac{1}{10}\cdot x_D)\cdot x_P - CT_{x_P}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial B_{x_P}}{\partial x_P} &= 70 - 4\cdot x_P - \tfrac{1}{10}\cdot X_D - \underbrace{C_m(x_P)}_{x_P+10}\\ &= 60 - 5\cdot x_P - \tfrac{1}{10}\cdot x_D = 0\end{aligned}$$

Chaque entreprise connaît la stratégie suivie par les autres entreprises. On doit donc calculer l'équilibre du marché en résolvant un système d'équations.
Celle-ci sont obtenues avec les calculs précédents :

$$\begin{array}{rcr} 5\times\left(60 - 2\cdot x_P - \frac{7}{30}\cdot x_D\right) & \Rightarrow & 300 - 10\cdot x_P - \frac{7}{6}\cdot x_D = 0\\ -2\times\left(60 - 5\cdot x_P - \frac{1}{10}\cdot x_D\right) & \Rightarrow & -120 - 10\cdot x_P - \frac{2}{10}\cdot x_D = 0\\ \hline & & 180 - \left(-\frac{70}{60} + \frac{12}{60}\right)\cdot x_D = 0\end{array}$$

On peut maintenant calculer l'équilibre du marché.

$$180 = \tfrac{58}{60}\cdot x_D \qquad x_D = \tfrac{60\times 180}{58} \qquad \boxed{x_D \approx 186,21}$$

$$60 - 5\cdot x_P - 18.62 = 0 \qquad x_P = \tfrac{60-18.62}{5} \qquad \boxed{x_P \approx 8.28}$$

$$\begin{aligned}p &= 70 - 2\cdot x_p - \tfrac{1}{10}\cdot x_D\\ &= 70 - 2\times 8.28 - 18.62\end{aligned} \qquad \boxed{p \approx 34.82}$$

11.3 Fonction d'utilité

Exercice :

Sur un marché, on a 2 produits X et Y tels que :

$$p(X) = 2€ \qquad p(Y) = 1€$$

On a aussi un individu donc la fonction d'utilité est donnée par : $U(x, y) = 2xy$.
Son revenu est de 10€.

1. Maximiser sa fonction d'utilité.
2. Suite à l'inflation $p(X) = 2€$ et $p(y) = 2€$. Pour garder la même fonction d'utilité, quel doit être son revenu minimum ?

1.

$\max(U(x, y)) = \max(2xy)$
Le revenu de l'individu nous donne l'équation :

$$Xp(X) + Yp(Y) = 10$$

$$2X + Y = 10$$

$$Y = 2 - 2X$$

La fonction d'utilité s'écrit alors :

$$U(x, y) = 20X - 4X^2 \qquad \frac{dU}{dX} = 20 - 8X = 0$$

Finalement :

$$X = 2.5 \quad Y = 5 \quad U(2.5; 5) = 25$$

2.

Conserver la même fonction d'utilité revient à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} p(X)X + p(Y)Y = 2X + 2Y = R \\ 2XY = 25 \end{cases}$$

Il devient $X = \frac{25}{2Y}$ et $R = \frac{25}{Y} + 2Y$ (R que l'on souhaite maintenant minimiser). On en déduit :

$$\frac{dR}{dY} = 0 = 2 - \frac{25}{Y^2}$$

$$y = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$X = \tfrac{5}{\sqrt{2}} \qquad \boxed{R = 10\sqrt{2}}$$

<u>Exercice :</u>

On considère 3 produits x, y, l (l étant des heures de loisir). $p(x) = 4$€ et $p(y) = 2$€. Chaque heure de travail rapporte 3€ et $w + l = 24$. Maximiser la fonction d'utilité donnée par $U(x, y, l) = xyl$.

On a :

$$\begin{aligned} 3w &= \text{revenus} \\ 3w &= xp(x) + yp(y) \\ 3w &= 4x + 2y \end{aligned}$$

Cela devient alors :

$$3(24 - l) = 4x + 2y$$

$$4x + 2y + 3l - 72 = 0$$

On cherche à maximiser la fonction d'utilité sous cette dernière contrainte.
On forme :

$$\mathcal{L} = xyl - \lambda(4x + 2y + 3l - 72)$$

Ce qui devient :

$$\begin{cases} \partial\mathcal{L}/\partial x & = & yl - 4\lambda & = & 0 \\ \partial\mathcal{L}/\partial y & = & xl - 2\lambda & = & 0 \\ \partial\mathcal{L}/\partial l & = & xyl - 3\lambda & = & 0 \\ \partial\mathcal{L}/\partial\lambda & = & -4x - 2y - 3l + 72 & = & 0 \end{cases}$$

De ce système, on déduit $y = 2x$ et $l = \frac{2}{3}y$.
D'où l'équation :

$$2y + 2y + 2y - 72 = 0$$

i.e.

$$y = 12 \quad x = 6 \quad l = 8 \quad w = 16$$

11.4 Fonction de coût

<u>Exercice :</u>

La fonction de production d'une entreprise est donnée par $q = 2\sqrt{k}\sqrt{l}$ avec $p(k) = 2$€ et $p(l) = 1$€. Le prix du produit, p, est fixé à 2€. A court terme, on fixe k à 4. Que doit faire l'entreprise pour maximiser son profit et quel est-il ?

$k = 4$, donc $q = 4\sqrt{l}$. On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} \prod & = & 4\sqrt{l} - CT \\ & = & 4\sqrt{l} - (kp(k) + lp(l)) \\ & = & 4\sqrt{l} - 8 - l \end{array}$$

i.e. :

$$\frac{d\prod}{dl} = \frac{4}{\sqrt{l}} - 1 = 0$$

$$\boxed{\text{l=16}}$$

11.5 Monopole

<u>Exercice :</u>

Soit la fonction de demande : $q = \frac{-q}{1.34} + \frac{2.34}{1.34}$ et le coût moyen $CM = 0.85q - 0.83$. Combien ce monopole produit-il ? A quel prix ?

De la fonction de demande, on déduit :$p = 2.34q - 1.34q$

$$\begin{array}{rcl} \prod & = & \text{Chiffre d'affaire - coût total} \\ & = & qp - 0.85q^2 + 0.83q \\ & = & q(2.34 - 1.34q) - 0.85q^2 + 0.83q \\ & = & -2.19q^2 + 3.17 \end{array}$$

On cherche à maximiser $\prod$ *i.e.* :

$$\frac{d\prod}{dq} = -4.38q + 3.17 = 0$$

$$\boxed{q = \tfrac{3.17}{4.38} = 0.72}$$

On en déduit :

$$\boxed{p = 2.34 - 1.34(0.72) = 1.38}$$

Ce qui devient finalement :

$$\boxed{\prod = -2.19(0.72)^2 + 3.13(0.72) = 1.15}$$

Exercice :

Soient deux entreprises qui mettent en bouteille de l'eau de source. Les capacités de production journalière sont :
- $0 \leq q_1 \leq 4000$ pour la première
- $0 \leq q_2 \leq 3000$ pour la seconde

Le prix du marché est donné par : $P = 8 - \frac{q_1+q_2}{1000}$.
Par souci de simplification, nous considérons que le coût moyen est nul.
- Trouver l'équilibre en duopole de Cournot.
- Si les deux entreprises forment un cartel quel sera le resultat ?
- Démontrer que le cartel n'est pas stable.

1.

On a : $\prod_1 = q_1\left(8 - \frac{q_1+q_2}{1000}\right)$, $\prod_2 = q_2\left(8 - \frac{q_1+q_2}{1000}\right)$
Il devient donc :

$$\frac{d\prod_1}{dq_1} = 8 - \frac{2q_1}{1000} - \frac{q_2}{1000} = 0 \quad \frac{d\prod_2}{dq_2} = 8 - \frac{2q_2}{1000} - \frac{q_1}{1000} = 0$$

d'où $q_1 = q_2 = \frac{8000}{3} = 2667$. On a alors :

$$\prod_1 = \prod_2 = \frac{8000}{3}\left(8 - \frac{16}{3}\right) = \frac{16000}{9} = 1778$$

2.

En situation de cartel, nous avons : $Q = q_1 + q_2$ et le profit du cartel est : $\prod_c = Q\left(8 - \frac{Q}{1000}\right)$. On a donc :

$$\frac{d\prod_c}{dQ} = 8 - \frac{2Q}{1000} \Rightarrow Q = 4000$$

Il devient $\prod_c = 4000 \times 4 = 16000$, donc $q_1 = q_2 = 2000$ et $\prod_1 = \prod_2 = 8000$, ce qui est plus avantageux pour les entreprises.

3.

Démontrons que cet équilibre n'est pas stable :
Si l'entreprise produit 1 produit pour $(2000 + dq_1)$ quantitées, sont profit serait :

$$\begin{aligned}\prod_1 &= (2000 + dq_1)\left(4 - \frac{dq_1}{1000}\right) \\ &= 8000 - 4dq_1 - 2dq_1 - \frac{(dq_1)^2}{1000} \\ &= 8000 + 2dq_1 - \frac{(dq_1)^2}{1000}\end{aligned}$$

Pour dq_1 petit, $\prod_1 = 8000 + 2dq_1$, donc l'entreprise aura un intéret à quitter l'équilibre.