Chapitre II :
La fonction de l'utilité

1. Le cadre d'analyse de l'utilité

a. Les agents

Dans ce chapitre, intéressons-nous aux agents caractérisés par leur activité de consommation. En microéconomie, ils sont généralement désignés par le terme consommateur. On supposera qu'ils disposent d'un revenu exogène R (donné : ne dépend d'aucune autre variable dans le cadre de l'analyse que l'on effectue).

b. Les biens

On parle de Biens pour désigner un produit matériel ou un service. Les biens se différencient entre eux par leurs caractéristiques physiques ou par leur localisation (à disponibilité proche ou lointaine). La consommation de ses biens procure une certaine *utilité* à l'individu. On s'intéressera à l'arbitrage que fait le consommateur entre deux biens 1 et 2 ayant des *prix relatifs* respectifs P_1et P_2. Le panier de biens du consommateur sera représenté par $X = (q_1, q_2)$ où q_1 et q_2 indiquent respectivement quelle quantité de bien 1 et 2 le consommateur décide/choisi d'acheter/consommer.

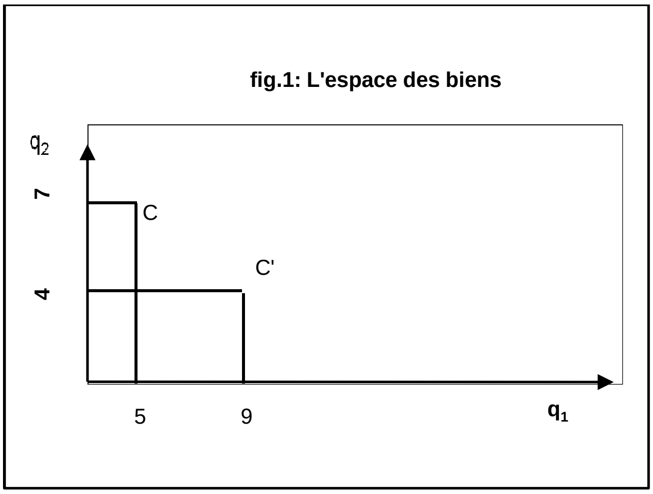
Caractéristiques générales des biens peuvent être multiples. On s'intéressera à :

- ☞ Des *biens divisibles*, en arithmétique, ceux dont les quantités s'expriment avec des décimales ; exemple du beurre (1.5 kg). Les autres biens qualifiés d'*indivisibles* (exemple de la voiture) seront donc explicitement exclus de l'analyse.
- ☞ Des *biens privés* : biens dont la consommation/utilisation par un agent prive l'autre du même usage des dits biens. On parle dans le cas contraire de biens publics (exemple de la défense nationale, les médias) dont l'utilité est partagée par différents usagers. Ceux-ci, comme les biens indivisibles, ne seront pas traités.

Remarquons que le choix de 2 biens dans ce cadre d'analyse n'est pas trop restrictif. Il ne l'est pas dans la mesure où l'un des biens peut représenter l'ensemble des biens restants de l'économie. Cela peut alors être appelé le *bien composite*. Une telle simplification permet de représenter graphiquement le *choix du consommateur*.

c. L'espace et combinaison des biens

Pour représenter un certain panier de consommation, il est commode de se placer dans un repère/plan (q_1, q_2) appelé "espace de biens".



Le point C :(5,7) signifie que le consommateur achète 5 unités de bien 1 et 7 unités de bien 2. Les points C et C' représentent deux dotations différentes en biens 1 et 2. Il peut exister des situations extrêmes où l'on consomme uniquement un seul bien.

d. La période d'analyse

L'échelle temporelle en microéconomie est très importante pour l'analyse. Il faudrait à chaque fois préciser la période sur laquelle les comportements sont étudiés. On distingue notamment les analyses à court terme de ceux à long terme. L'essentiel est de choisir un cadre adapté au plaisir que procure le bien : un livre par exemple provoque un plaisir intellectuel de long terme, tandis qu'une pomme induit une satisfaction physiologique de court terme. Un tel plaisir ou satisfaction peut être mesurable (utilité cardinale) ou non (utilité ordinale).

2. Utilité mesurable : analyse cardinale

Cette mesure de l'utilité a été adoptée par les premiers néoclassiques : W.S. Jevons. A. Marshall, C. Menger. Selon cette optique, le consommateur peut estimer la satisfaction que lui procure la consommation d'un bien. Par exemple un verre d'eau lui procurerait une «utilité totale» de dix, alors que la prise d'un bain chaud ne procurerait qu'une utilité totale de sept. L'individu pourra ainsi procéder à un classement des biens en fonction de la valeur qu'il confère à chacun. Cependant ce classement sera différent d'un individu à un autre car les préférences individuelles sont différentes.

a. Loi d'utilité marginale décroissante

Le concept d'utilité marginale fait une synthèse entre les concepts d'utilité et de rareté. L'utilité supplémentaire fournie par une unité supplémentaire d'un bien, ou utilité marginale de ce bien, décroît au fur et à mesure que l'individu acquiert de nouvelles unités de ce bien. C'est le principe de la loi de l'utilité marginale décroissante. Ce sont les utilités marginales des différents biens qui expliquent leurs différences de valeur.

Cette loi a été formulée par Gossen en 1843. L'utilité qu'un individu retire de la consommation d'unités successives tien donné diminuera à mesure que la consommation de ce bien augmente, exemple lorsque l'individu a extrêmement soif, le premier verre d'eau représente une très grande importance pour lui et il serait disposé, à la limite, à céder tout son revenu pour acquérir ce verre d'eau. L'utilité marginale de ce verre d'eau. L'utilité marginale de ce verre d'eau est infinie. Mais après avoir consommé ce premier verre, son désir de boire est toujours manifeste mais il perd néanmoins de son intensité. Par conséquent l'utilité marginale des verres d'eau successifs décroîtra de façon régulière. A mesure que les unités de biens (ici les verres d'eau) sont consommées, l'utilité totale augmente de plus en plus lentement car l'utilité marginale, c'est-à-dire l'utilité supplémentaire de chaque unité additionnelle, décroît. Reprenons l'exemple de l'eau, l'utilité totale est donnée par le tableau suivant :

Quantité consommée du bien	Utilité totale	Utilité marginale
0	0	4
1	4	3
2	7	2
3	9	1
4	10	0
5	10	0
6	10	- 1
7	9	

Les unités (utilités totales) de mesures étant imaginaires, nous pouvons les appeler les «utils».

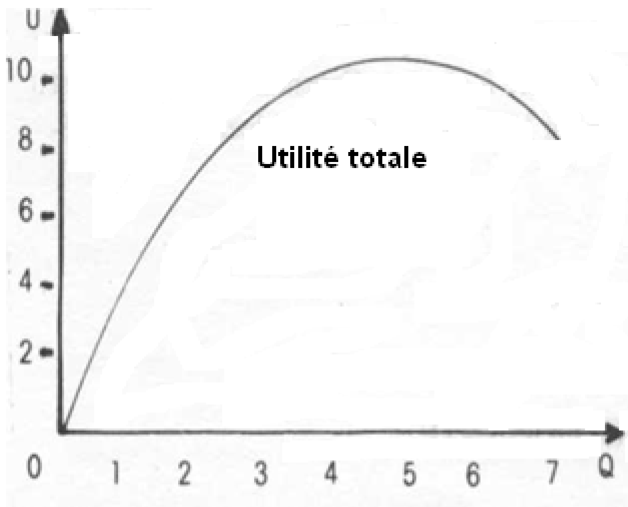


fig. 2a : Courbe d'utilité totale

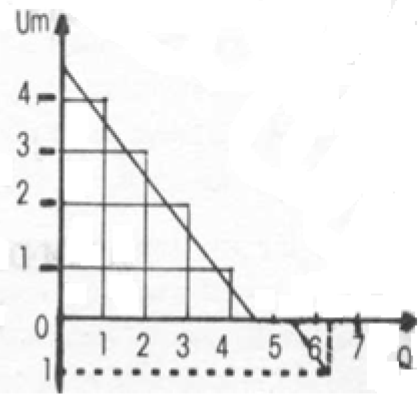


fig. 2b : Courbe d'utilité marginale

La première courbe (fig. 2a) montre comment à mesure que les quantités consommées augmentent, l'utilité totale croît mais à un taux décroissant. La deuxième courbe indique les utilités marginales successives ; c'est-à-dire les suppléments d'utilité totale procurée par chaque unité additionnelle de consommation. La baisse de l'utilité marginale matérialisée par la courbe 2b (fig. 2b) illustre la loi de l'utilité marginale décroissante.

On pourrait se poser la question de savoir si l'utilité marginale peut atteindre la valeur 0? Pour de nombreux biens, il existe un seuil de satiété au-delà duquel toute consommation de nouvelles unités du bien ne procure aucune utilité supplémentaire. La consommation prolongée peut même finir par faire décroître son utilité totale, de sorte que la consommation d'unités supplémentaires aurait une *utilité marginale négative* ou ce qu'on appelle une *désutilité*.

Formellement, pour un bien X:

$$Um_X = \frac{\Delta UT_X}{\Delta X}$$

$UT_X = \sum_{i=1}^{n} Um_{Xi} \qquad i = 1 \ldots . n$; Avec n nombre de quantités de biens

Si l'on envisage des variations infinitésimales et non plus des variations unitaires des quantités de X, dans le cas où il existe une relation fonctionnelle entre l'utilité totale et la quantité du genre $UT_X = f(X)$, l'utilité marginale se définira alors comme la limite quand $\Delta X \rightarrow 0$ du rapport ΔUT sur ΔX :

$$Um_X = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{\Delta UT_X}{\Delta X} = \frac{dUT_X}{dX} = U'_X$$

L'utilité marginale est la dérivée de l'utilité totale. Elle est donnée par la pente de la courbe d'utilité totale en un point de la courbe. Etant donné que l'utilité marginale est décroissante, la dérivée seconde de la fonction d'utilité totale est négative :

$$\frac{d^2 UT_X}{dX^2} < 0$$

Le concept d'utilité marginale permet aussi de parvenir à la théorie de la valeur d'échange en se fondant sur le principe de l'égalisation des utilités marginales des biens pondérées par leurs prix. Ce concept conduit enfin à la théorie « symétrique» de la valeur qui combine le « principe de coût de production » et le « principe d'utilité ». D'après cette théorie, le capital et le travail ont des rôles équilibrés, symétriques.

b. Loi d'égalisation des utilités marginales pondérées par les prix

Chaque individu cherche à maximiser son utilité totale. Dès lors, pour tout bien, tant qu'une unité supplémentaire consommée a une utilité marginale positive, il peut accroître l'utilité totale en consommant davantage de ce bien. Par conséquent, la consommation d'un bien quelconque doit être poursuivie jusqu'au moment où son utilité marginale s'annule. C'est la *condition de maximisation de l'utilité totale*.

Cependant, la consommation porte sur des biens différents dont les prix unitaires sont différents. Il ne peut donc pas accorder la même valeur à la dernière unité de chaque bien consommé. Il doit plutôt répartir ses dépenses entre les divers biens de manière à ce que l'*utilité de la dernière unité monétaire dépensée* pour chaque bien soit la même.

Pour concrétiser cette idée, nous allons supposer un exemple. Admettons qu'un individu soit placé devant biens : des oranges et des pommes, avec une utilité de l'unité monétaire marginale consacrée à l'achat d'oranges représentant quatre fois celle de l'unité monétaire marginale affectée à l'achat des pommes. Dans ces conditions, cet individu peut augmenter son utilité totale en détournant une unité monétaire initialement destinée à l'achat de pommes pour acheter des oranges. Il réalisera ainsi un gain correspondant à la différence des utilités obtenues à l'aide d'une unité monétaire pour chaque bien. S'il poursuit cette opération, la consommation d'unités supplémentaires d'oranges aura pour effet de réduire l'utilité marginale de la consommation des unités additionnelles d'oranges. Au bout d'un certain moment, les utilités marginales se seront suffisamment modifiées pour que l'utilité d'une unité monétaire affectée à l'achat d'oranges soit égale à celle d'une unité monétaire consacrée à l'achat de pommes. Le transfert de la dépense d'un bien à un autre ne permet plus de réaliser de gain. Si l'individu continu à consommer davantage d'oranges, il peut causer une baisse de son utilité totale car l'utilité marginale d'une unité monétaire consacrée à l'achat de pommes devient supérieure à celle d'une unité monétaire affectée à l'achat d'orange.

Pour généraliser, si l'on a deux bien X et Y et si l'on note Um_x et Um_y respectivement l'utilité marginale de la dernière unité de X et de Y, et P_x et P_y respectivement le prix de X et de Y. L'utilité marginale par unité monétaire pour X sera $\frac{Um_x}{P_x}$, et similairement l'utilité marginale par unité monétaire pour Y sera $\frac{Um_y}{P_y}$. Par exemple si l'utilité supplémentaire procurée par la consommation de la dernière unité est 40 unités d'utilité et que son coût est de 4€, son utilité marginale par unité monétaire, c'est-à-dire par euro sera $\frac{40}{4} = 10$.

Pour que l'utilité individuelle soit maximale dans le cas de deux biens Xet Y, il faut que les utilités marginales pondérées par leurs prix soient égales :

$$\frac{Um_x}{P_x} = \frac{Um_y}{P_y} \text{ ou } \frac{Um_x}{Um_y} = \frac{P_x}{P_y}$$

C'est-à-dire que la condition pour qu'un ménage maximise son utilité au regard de deux biens est que les dépenses doivent être ajustées de façon à ce que les utilités marginales de deux biens soient proportionnelles à leurs prix relatifs.

Pour que cette règle de comportement soit strictement respectée, il est nécessaire que tous les biens considérés soient parfaitement divisibles. Autrement dit, on suppose que la fonction d'utilité totale de chaque bien soit continue et dérivable.

D'autre part, toute augmentation du prix du bien X réduit le rapport $\frac{Um_x}{P_x}$. Pour revenir à l'égalité avec les rapports des utilités marginales pondérées par les prix des autres biens, il convient de considérer l'accroissement de l'utilité marginale du bien X à la suite de la baisse de la quantité demandée de X : l'augmentation du prix entraîne une diminution de la quantité demandée.

c. Effet d'une variation de prix sur l'équilibre du consommateur

Les variations de prix exercent deux effets sur l'équilibre du consommateur :

i. Effet-substitution

C'est un déplacement de la demande du consommateur (c'est-à-dire de la disposition d'achat de celui-ci) dû à une variation des prix relatifs. Par exemple si le prix du thé augmente alors que celui du café reste stable, le consommateur va acheter davantage de café à la place du thé. Ce raisonnement peut s'appliquer à d'autres biens : exemple du théâtre et le cinéma.

ii. Effet-revenu

C'est la variation du revenu *réel* du consommateur, c'est-à-dire de son *pouvoir d'achat*, à la suite d'une variation de prix. Ainsi, même si le revenu monétaire du consommateur (ou revenu nominal) ne varie pas, l'augmentation du prix d'un produit signifie qu'il doit dépenser plus pour l'acquisition d'une quantité de ce produit. Cela se traduit donc par une baisse de son revenu réel ou de son pouvoir d'achat. Inversement si le prix diminue, le pouvoir d'achat, le pouvoir d'achat augmente.

d. Utilité mesurable et paradoxe de la valeur

Ce paradoxe remonte à A. Smith (1776) qui a constaté que des biens indispensables comme l'eau, avaient des prix très bas comparés à ceux de nombreux biens de luxe comme le diamant. Alors que l'eau est nécessaire à l'existence, les diamants représentent un luxe dont on peut se passer. Comment se fait-il alors que l'eau soit si peu coûteuse par rapport au diamant ?

Ce paradoxe vient du fait que l'on considérait que les biens onéreux devaient être ceux qui ont une utilité totale élevée, et que les biens peu coûteux, ceux qui ont une faible utilité totale. Il était donc admis que les valeurs de marché devaient être reliées à l'utilité totale. Or Smith se limitait seulement à signaler que la *valeur d'usage*, c'est-à-dire l'utilité totale, était distincte de la *valeur d'échange*, c'est-à-dire la valeur du marché. Smith a bien admis que les valeurs d'usage devaient être reliées aux valeurs d'échange, mais il a remarqué que cela ne pouvait pas être toujours observé.

Ce paradoxe résulte de la confusion entre l'utilité totale et l'utilité marginale. En effet l'analyse précédente compare la valeur totale de deux biens et leurs utilités totales. En formulant cela on obtient :

$$\frac{Prix \times Quantit\acute{e}\ de\ diamants}{Prix \times Quantit\acute{e}\ d'eau} = \frac{Utilit\acute{e}\ totale\ des\ diamants}{Utilit\acute{e}\ totale\ de\ l'eau}$$

Or dans la réalité, l'utilité totale de l'eau est supérieure à celle des diamants, alors que la valeur totale des diamants dépasse celle de l'eau. En fait la maximisation de l'utilité dépend de l'égalisation des valeurs formées par le marché et des utilités marginales et non des utilités totales. Si l'eau est bon marché, c'est parce qu'elle est abondante et que les gens la consomment jusqu'au moment où son utilité marginale devient très faible et pour consommer une unité supplémentaire d'eau, ils ne sont pas disposés à payer un prix plus élevé. A l'inverse les diamants sont rares (rareté qui peut être organisée) et les individus doivent arrêter leur consommation a un niveau où l'utilité marginale est très élevée, ce qui explique la cherté du diamant. Ils sont donc disposés à payer un prix élevé pour acquérir un diamant supplémentaire.

e. Limites de l'analyse cardinale

Le problème auquel devait faire face l'analyse cardinale de l'utilité et qui a paru insoluble est celui de la *mesure de l'utilité*. A. Marshall a proposé une ébauche de solution en adoptant l'*hypothèse de constance de l'utilité marginale de la monnaie*. Dès lors, l'utilité peut être mesurée par la quantité de monnaie qu'un individu consent offrir pour acquérir une quantité d'un bien donné X. Tant que l'utilité marginale de la monnaie offerte est inférieure à l'utilité marginale du bien X, le consommateur aura intérêt à acheter des quantités de X. Du moment que l'utilité marginale de la monnaie est constante, la question de sa détermination ne se pose pas. Néanmoins, cette hypothèse de constance de l'utilité marginale ne semble pas réaliste dans la mesure où celle-ci dépend du stock de monnaie détenue.

En outre l'utilité d'un bien est influencée par les détentions ou les possibilités d'acquisition d'autres biens (substituables ou complémentaires). Cela découle du principe d'interdépendance des utilités des divers biens. Ainsi par exemple l'utilité que procure un stylo à encre sera dépendante de la quantité d'encre dont on peut disposer. Cela réduit donc, sans perdre de vue le problème d'additivité des utilités individuelles soulevé dans l'introduction de ce cours, la portée de l'approche cardinale de l'utilité.

D'où l'intérêt de l'analyse ordinale de l'utilité.

3. Utilité non mesurable : analyse ordinale

C'est une conception qui remonte à Pareto (début du XXème siècle) et qui fut approfondie par P. Samuelson. Pareto a proposé de remplacer le terme utilité par le terme ophélimité et le terme utilité cardinale par celui d'utilité ordinale.

Dans le cas précédent d'utilité mesurable nous avons supposé que l'utilité totale d'un bien était mesurable. Les nombres représentant les valeurs de l'utilité pouvaient être manipulés de la même manière que des poids. Ce qui n'est pas réaliste. Une fonction d'utilité représentative peut être tout de même définie.

a. Définition de la fonction de l'utilité

Une fonction d'utilité est une façon d'attribuer une valeur aux paniers de consommation de telle sorte que les paniers plus désirables reçoivent des valeurs supérieures à ceux qui le sont le moins.

Il s'agit d'une fonction U telle que si :

$$(x_1, x_2) > (y_{1,} y_2) \rightarrow U(x_1, x_2) > U(y_{1,} y_2)$$

Si le panier (x_1, x_2) est préféré au panier $(y_{1,} y_2)$, le niveau d'utilité associé au premier est supérieur à celui du second.

On peut la formaliser de manière plus générale par une fonction U décrivant un pré-ordre de préférence :

$$U: \mathbb{R}_+^K \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{tel que}$$

- $x > y \,!\, U(x) > U(y);$
- $y > x \,!\, U(y) > U(x).$

L'utilité est alors une fonction qui associe une valeur à chaque dotation (x_1, x_2) permettant ainsi de classer les dotations selon la satisfaction qu'elles procurent au consommateur. Chaque consommateur a sa fonction d'utilité qui dépend des quantités disponibles de biens.

Exemples :

- ✓ Biens parfaitement substituables :

$$U\,(q_1, q_2) = \alpha q_1 + \beta q_2 \quad ; \quad (\alpha, \beta) > (0{,}0)$$

- ✓ Biens strictement complémentaires :

$$U\,(q_1, q_2) = \min\{\alpha q_1, \beta q_2\} \quad ; \quad (\alpha, \beta) > (0{,}0)$$

- ✓ Fonction d'utilité quasi-linéaire :

$$U\,(q_1, q_2) = \alpha q_1 + v q_2 \quad ; \quad v \text{ est une fonction non linéaire}$$

- ✓ Fonction d'utilité Cobb Douglas :

$$U\,(q_1, q_2) = A q_1^{\alpha} + q_1^{\beta}$$

Il est primordial néanmoins de soulever quelques remarques concernant la fonction d'utilité :

- ☞ Dans le cas de préférences classiques, elle est croissante en x_1 et en x_2.
- ☞ il existe une infinité de fonction d'utilités qui permettent d'obtenir ce résultat. Exemple : imaginons que $A > B > C$. Les trois fonctions d'utilité suivantes donnent un classement précis.

Panier	U_1	U_2	U_3
A	5	3000	0.1
B	4	1000	0.01
C	3	-4000	0.0001

- La valeur de la fonction d'utilité n'est intéressante que dans la mesure où elle classe les différents paniers. Le niveau de la fonction d'utilité n'est pas interprétable en soit.
- Toute transformation monotone croissante d'une fonction d'utilité représente les mêmes préférences que la fonction d'utilité initiale.

Dans ce cas de l'analyse ordinale, le postulat de rationalité demande simplement au consommateur d'être capable de ranger les biens par ordre de préférence. Le consommateur dispose alors d'une mesure ordinale de son utilité, c'est-à-dire n'a pas besoin d'attribuer des nombres qui représentent (dans une unité arbitraire) le degré ou la valeur de l'utilité que chaque bien lui procure. Son classement entre les biens est exprimé sous forme mathématique par sa *fonction d'utilité*. Elle associe des nombres déterminés à diverses quantités de biens consommés, mais ces nombres indiquent seulement un classement ou un ordre de préférence. Si l'utilité du choix A est 15 et celle du choix B est de 45, nous pouvons seulement dire que B est préféré à A. Mais cela n'aura pas de sens de dire que l'*intensité de l'utilité* attachée à B est le triple de celle attachée à A. Cela permet de construire des courbes d'indifférence.

b. Courbes d'indifférence ou d'iso-satisfaction

Le consommateur est appelé à choisir entre deux biens X et Y, et à combiner la consommation de ces biens selon des combinaisons qui lui rapportent des satisfactions déterminées. Représentons graphiquement ces diverses combinaisons :

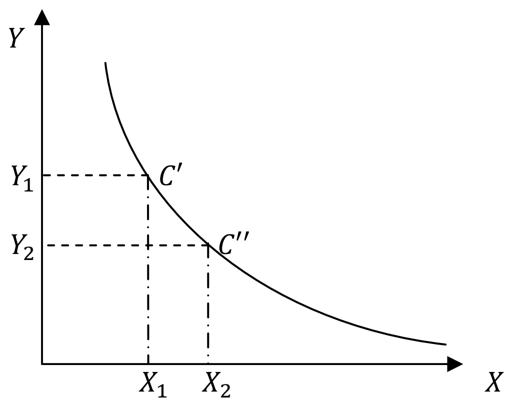


Fig. 3 : Courbe d'indifférence

Si l'on représente plusieurs niveaux de satisfaction, on obtient une carte de courbes d'indifférence ou une carte d'indifférence; chaque courbe correspondant à un niveau d'utilité.

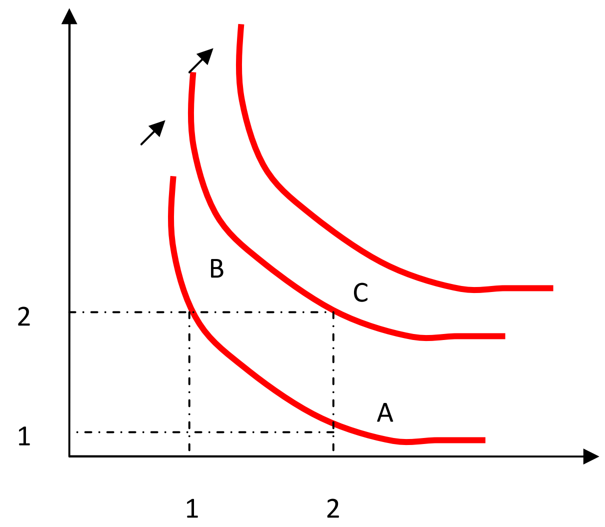
i. Propriétés majeures des courbes d’indifférences

Ces propriétés sont au nombre de cinq:

- plus on s'éloigne de l'origine des axes, plus le niveau de satisfaction s'élève;
- les courbes d'indifférence ne peuvent pas se couper, sinon on aurait un même point (c'est-à-dire les mêmes quantités de biens) qui correspondrait à deux ou plusieurs niveaux de satisfaction, ce qui serait un non sens;
- les courbes d'indifférence sont décroissantes, ce qui indique que si le consommateur réduit sa consommation du bien Y, il doit accroître celle de X pour conserver un niveau de satisfaction constant;
- quelle que soit une combinaison de biens X et Y, elle appartient à une courbe d'indifférence. Cette propriété est appelée densité des courbes d'indifférences ;
- les courbes d'indifférence sont convexes par rapport à l'origine.

Toute la théorie du choix de consommateur est basée sur ces axiomes. Selon ces derniers nous essayerons de représenter les préférences des consommateurs sous le nom de « courbes d’indifférences » ou de « carte de préférences » (fig.4).

Fig.4 : Carte d’indifférences



Soit le point C: $(2, 2)$, le point C est préférable aux points A et B (plus de dotations des deux biens). Étant donné que la courbe d’indifférence est l’ensemble des paniers de biens auxquels le consommateur est indifférent alors la courbe passant par C est préférable à celle passant par A.

ii. Convexité et principe de TMS

La convexité de la courbe d'indifférence par rapport à l'origine des axes traduit l'hypothèse fondamentale de la théorie de l'indifférence. Elle découle du principe de taux marginal de substitution (TMS).

Mathématiquement, le TMS se détermine comme suit : si l’on dispose d'une fonction d'utilité continue et dérivable $U = f\ (X, Y)$, on calcule la différentielle totale de cette fonction d'utilité:

$$dU = \frac{\partial f}{\partial X}dX + \frac{\partial f}{\partial Y}dY = 0$$

$\frac{\partial f}{\partial X} = f'_X$ et $\frac{\partial f}{\partial Y} = f'_Y$ étant les dérivées partielles de U par rapport à X et Y.

$$TMS_{X \text{ à } Y} = -\frac{dY}{dX} = \frac{f'_X}{f'_Y}$$

Le TMS indique le taux auquel Y décroît lorsque X augmente au long d'une courbe d'indifférence, c'est-à-dire en maintenant le même niveau de satisfaction. Il est égal au rapport des dérivées partielles de la fonction d'utilité.

$-\frac{dY}{dX}$ représente la pente de la courbe d'indifférence, qui est décroissante.

Prenons un exemple d'un individu qui choisit entre deux biens : oranges et pommes. Sa courbe d'indifférence se présente comme suit :

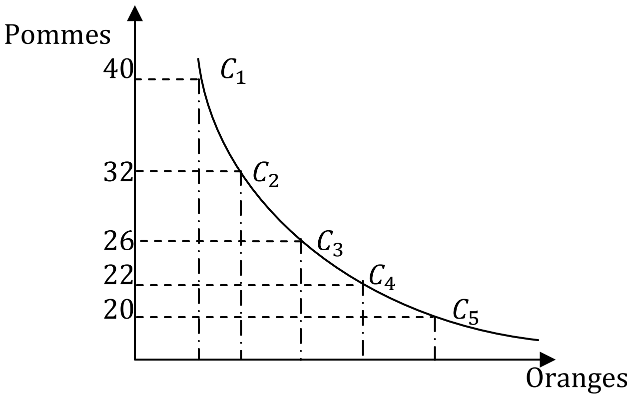


Fig. 5 : Substitution entre pommes et oranges

Taux de substitution des pommes par les oranges

Déplacement	ΔQ pommes	ΔQ oranges	taux de substitution
De C_1 à C_2	- 8	+5	-8/5= - 1.6
C_2 à C_3	- 6	+5	-6/5= - 1.2
C_3 à C_4	- 4	+5	-4/5= - 0.8
C_4 à C_5	- 2	+5	-2/5= - 0.4
	abandon d'unités de pommes : sacrifice	abandon d'unités d'oranges	taux de substitution de pommes pour obtenir une unité d'oranges

La dernière colonne indique le taux auquel le consommateur est prêt à sacrifier des pommes pour obtenir une unité d'oranges. Mais à mesure que sa consommation de pommes diminue et celle d'oranges croît, le consommateur est de moins en moins disposé à sacrifier des pommes en supplément pour obtenir plus d'oranges.

Si l'on envisage un déplacement infinitésimal à partir d'un point quelconque de la courbe, le taux auquel le ménage sacrifiera des pommes pour obtenir des oranges est donné par la pente de la tangente à la courbe en ce point. En se déplaçant de haut en bas, c'est-à-dire de C_1 à C_5, la pente de la courbe diminue. Cela indique que plus le consommateur a d'oranges, moins il sera disposé à sacrifier des pommes pour obtenir des oranges en plus.

En résumé, on peut dire que lorsque l'on se déplace sur une courbe d'indifférence de gauche à droite (ou du haut vers le bas), la pente de la courbe diminue: on passe des combinaisons de biens X Y où le bien Y est abondant et le bien X rare à des combinaisons où le bien Y devient rare et le bien X abondant.

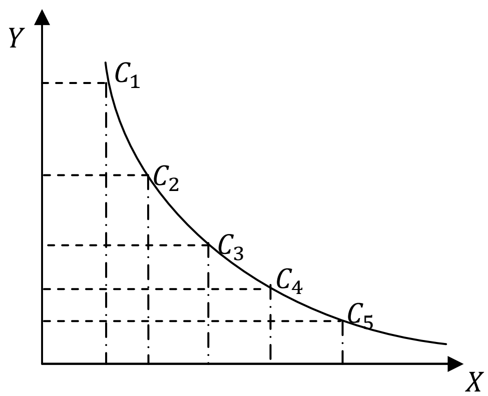


Fig. 6 : Substitution entre biens X et Y

Entre C_1 et C_2, le bien Y est abondant. Pour obtenir une petite quantité du bien X (bien rare) on est disposé à sacrifier une grande quantité de Y en compensation. Par contre entre C_3 et C_4 Y devient rare et l'on n'accepte d'en céder une unité qu'en échange d'une grande quantité de bien X devenu très abondant. Ainsi, plus la consommation d'un bien augmente, plus son utilité marginale décroît.

Précisons deux remarques importantes :

- ☞ La courbe d'indifférence n'est pas toujours décroissante. Néanmoins, seule la partie décroissante revêt un *intérêt économique*. Car la pente est négative et par conséquent l'utilité marginale de X et celle de Y sont positives. Par contre au niveau des parties croissantes de la courbe, la pente est positive et par conséquent l'utilité marginale d'un des deux biens est négative. En effet, pour un même niveau de satisfaction, il faut une plus grande quantité des deux biens.

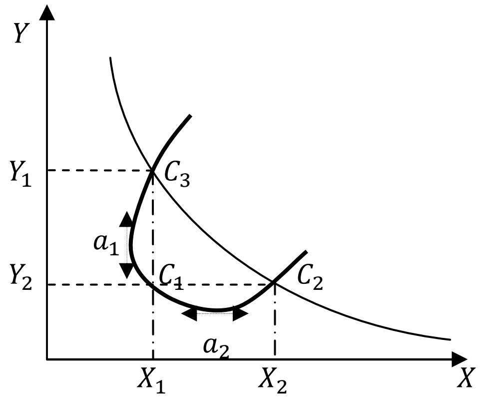


Fig. 7 : courbe d'indifférence avec pente positive

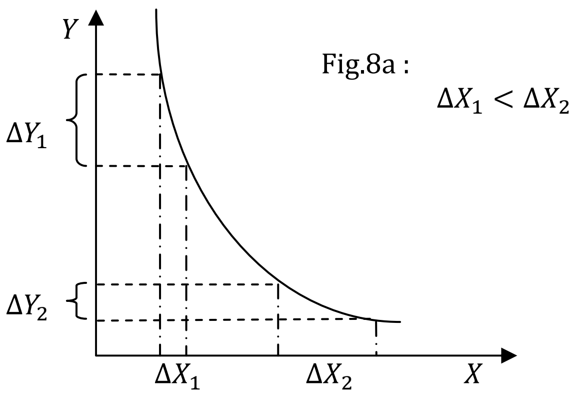
Les combinaisons C_1, C_2 et C_3 représentent la même satisfaction, mais aux points C_2 et C_3, il faut plus de quantité de bien.

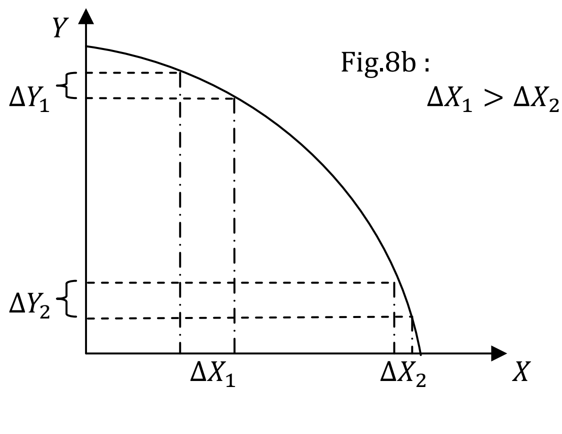
Au point a_1 l'utilité marginale de X est nulle.

Au point a_2 l'utilité marginale de Y est nulle.

☞ La courbe d'indifférence peut prendre plusieurs formes:

- Formes liées à la variabilité de la substitution.





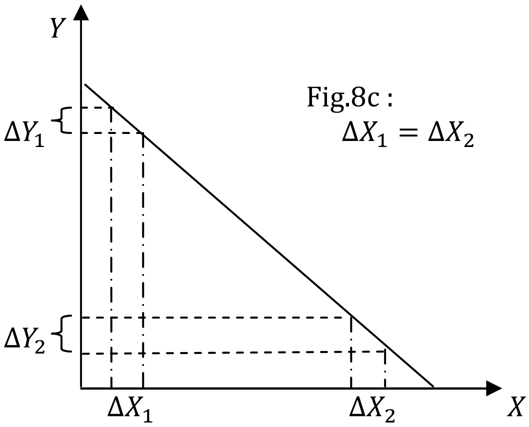


Fig.8c :
$\Delta X_1 = \Delta X_2$

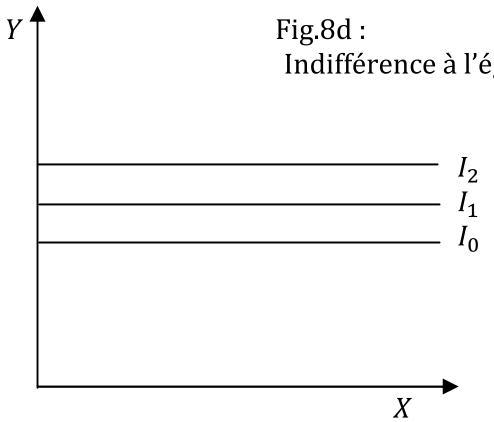


Fig.8d :
Indifférence à l'égard d'un bien

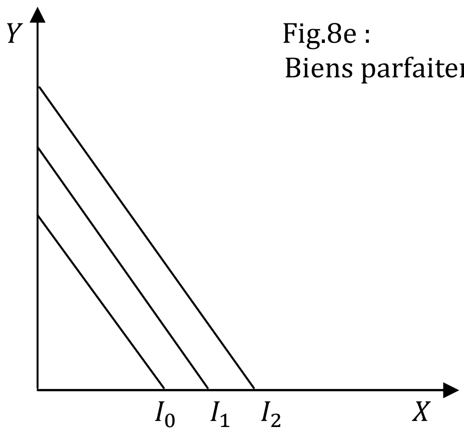


Fig.8e :
Biens parfaitement substituables

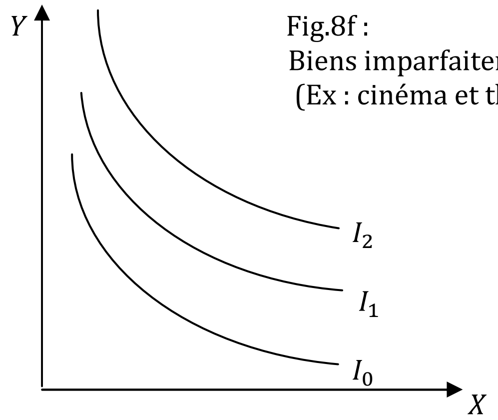


Fig.8f :
Biens imparfaitement substituables
(Ex : cinéma et théâtre)

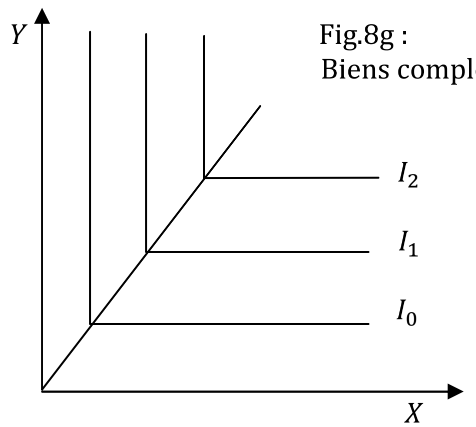


Fig.8g :
Biens complémentaires

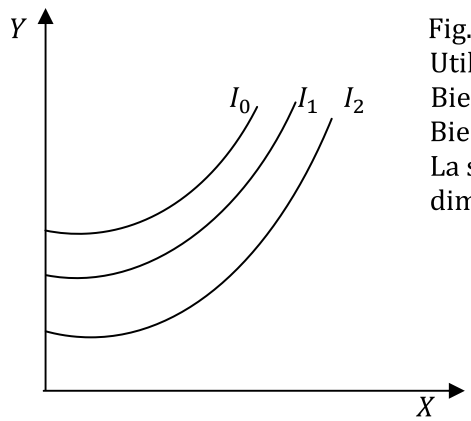


Fig.8h :
Utilité et désutilité :
Bien Y est utile (plastique)
Bien X est nuisible (polution)
La satisfaction augmente quand Y s'accroît et elle diminue quand X s'élève. La pente est ici positive.

4. L'hypothèse de l'espérance de l'utilité

Elle présente et discute les formalisations pour décrire le comportement individuel dans des environnements aléatoires, c'est-à-dire en raisonnant en contexte d'incertitude.

Soit U l'utilité de l'agent. L'objectif de la pensée néoclassique étant, pour tout agent, de maximiser l'utilité. Cependant, celle-ci est reliée au risque. Ce qui présuppose que l'agent opère son choix dans un univers incertain.

Soit par exemple les évènements possibles E_1 et E_2. Posons P_1 et P_2 comme probabilités respectives que les évènements E_1 et E_2 se produisent. D'où $P_1 + P_2 = 1$.

Si E_1 se produit l'utilité de l'agent s'établira en U_1.
Si E_2 se produit l'utilité de l'agent s'établira en U_2.

Dans ce contexte l'agent est contraint de raisonner non sur un niveau certain d'utilité, mais plutôt sur des niveaux d'utilité possibles. On définit donc le concept de l'*espérance de l'utilité*, noté $E[U]$, avec $E[U] = P_1U_1 + P_2U_2$.

Soyons plus précis. Soit (Ω, Ψ, μ) un espace probabiliste qui représente l'espace des états de la nature. Ω est l'ensemble des états de la nature ; $w \in \Omega$ est une description complète des variables exogènes du modèle considéré ; Ψ est l'ensemble des parties de Ω quand Ω est fini. Un évènement est alors un sous ensemble E de Ω ; μ est une mesure de probabilité objective sur les évènements de Ψ.

Définissons une action $a(.)$ telle une application de (Ω, Ψ, μ) dans un espace de conséquences C qui peut être identifié à $\mathbb{R}$ pour représenter les conséquences monétaires. Chaque action induit une mesure de probabilité π sur C.

Exemple : un billet de loterie définie une action.

Considérons un billet qui fait gagner 100€ si un nombre premier sort dans une roulette de 10 numéros de 1 à 10.

$\forall\, w \in E$ on a $a(w) = 100$ où E est l'ensemble des nombres premiers inférieurs à 10.
Si $\bar{E}$ est le complémentaire de E dans Ω, $\forall\, w \in \bar{E}$ on aura $a(w) = 0$.
Donc $\pi(100) = \mu(E) = \frac{1}{2}$.

Généralisons cela. On présente une loterie $a = [X, \pi]$ par un vecteur $[X_1, X_2, \dots, X_S]$ de gains monétaires X_S pour chaque état de nature $s = 1 \dots S$ et un vecteur de probabilité $[\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_S]$; Ω supposé fini et $\sum_{s=1}^{S} \pi_S = 1$.

Le problème posé est celui de la façon dont un agent rationnel évalue une telle loterie : à combien d'euros peut-on évaluer le billet ci-dessus ? Il y'a une chance sur deux de gagner 100€. L'espérance mathématique est souvent la première solution évoquée par un étudiant avéré. Soit $E = \frac{1}{2}.100€ + \frac{1}{2}.0€ = 50€$.

Ou plus généralement $U(a) = \sum_{s=1}^{S} \pi_S X_S$. Mais, cette intuition première se heurte au paradoxe de Saint Petersburg. En effet en considérant le jeu de pile et face répété et la loterie qui donne 2^n€ si face sort pour la première fois en nième coup.

$$U(a) = Lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n}.2^n = \infty \ !!$$

Evaluée selon le critère d'espérance mathématique cette loterie a une valeur infinie et portant on est persuadé qu'aucun joueur n'est prêt à donner une somme de 1000€ par exemple pour jouer ce jeu.

L'explication de ce paradoxe par Bernouilli est que les agents ont une utilité marginale décroissante pour la monnaie et évaluent une loterie par l'espérance de l'utilité des différentes conséquences. Il estimait qu'à un accroissement infinitésimal de richesse corresponde un accroissement d'utilité « inversement proportionnel aux biens déjà possédés ».

En négligeant quelques constantes, cette hypothèse sur la richesse M et son utilité U s'écrivait :

$$dU = \frac{dM}{M};$$

Ce qui conduisait à : $U(M) = log(M)$.

Bernouilli venait donc d'inventer la fonction d'utilité, mais limitée à la monnaie. Cela lui permit surtout de déterminer la valeur qu'on pouvait miser pour jouer au jeu en remplaçant l'espérance du gain par l'espérance de son utilité, on obtient en effet :

$$\mathrm{U(a)} = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{n}} \log 2^{\mathrm{n}} = \log 4$$

qui s'avère un nombre fini.

Toutefois, la décroissance de l'utilité marginale du revenu n'est pas suffisante pour éviter la construction de paradoxe de type Saint Petersburg. Tant que $\mu(.)$ n'est pas bornée supérieurement, cela est possible en prenant une suite $X_n$telle que $Ux_n = 2^n$. Si l'on évalue les loteries selon l'espérance de l'utilité du gain, il est nécessaire de supposer que cette utilité est bornée supérieurement pour éviter les contradictions évidentes avec le comportement d'agents dont on a toutes les raisons de penser qu'ils sont rationnels.

Représenter le comportement rationnel d'un agent face au risque par la maximisation de $\sum_{s=1}^{S} \pi_S u(X_S)$ pour une certaine fonction $u(.)$ bornée supérieurement constitue l'*hypothèse de l'espérance de l'utilité*.

La méthode de Bernouilli fut régulièrement exposée dans certains traités de théorie des probabilités mais elle resta cantonnée dans cette discipline. Son heure de gloire vint en 1944, quand la théorie des jeux développa l'analyse de l'utilité dans un cadre probabiliste grâce à Von Neumann. Les microéconomistes admirent que chacun maximisait une espérance d'utilité à la façon de Bernouilli, ce qui leur permit de mieux analyser des domaines comme l'assurance, la finance, l'économie de la santé ou du travail.

5. Aversion au risque

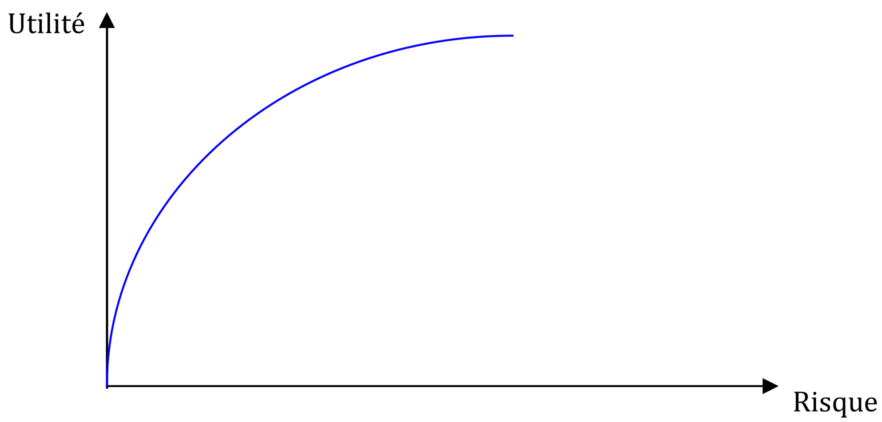
Von Newman et Morgenstern (1954) ont proposé des axiomes qui sont sensés représenter la *rationalité des choix dans un environnement risqué* : $U(a) = \sum_{s=1}^{S} \pi_S u(X_S)$ où $u(.)$ est une fonction d'utilité définie à une fonction affine croissante près. On appelle $u(.)$ la fonction d'utilité de Von Newman Morgenstern (VNM), elle rend compte des comportements face au risque.

Il existe une relation entre l'utilité de l'agent et son attitude face au risque. On distingue en général trois sortes d'attitudes :

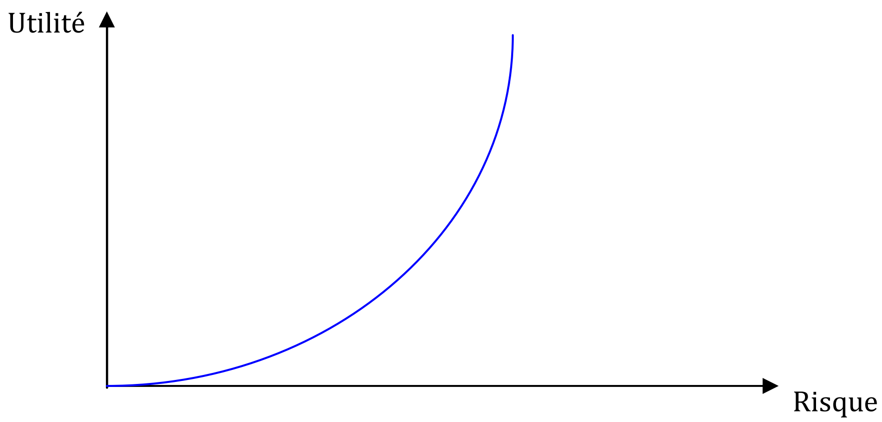
- ✓ La réticence : l'agent préfère éviter le risque. On dit qu'il présente une aversion au risque ;
- ✓ L'attraction : l'agent manifeste une préférence nette pour le risque ;
- ✓ L'insensibilité : l'agent présente une neutralité envers le risque.

L'attitude face au risque peut s'exprimer en termes d'utilité : l'utilité est alors fonction du comportement face au risque. Graphiquement, cela est représenté :

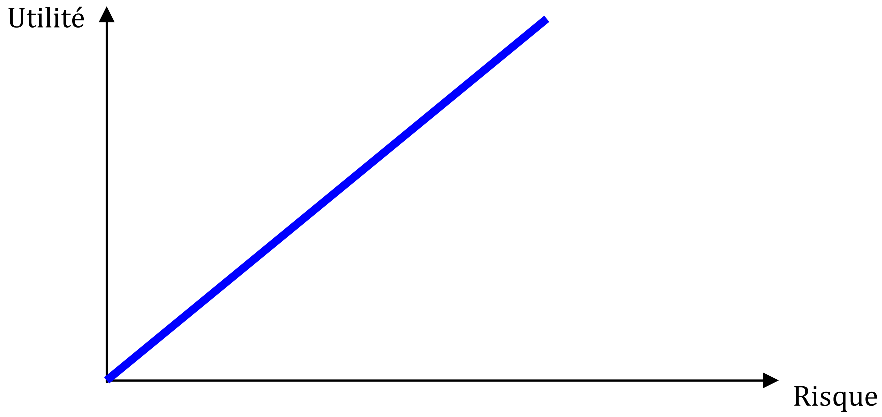
- ☞ Par une courbe concave si l'agent présente une aversion au risque. Car plus le risque s'accroît, plus l'utilité marginale de l'agent est faible ;



- ☞ Par une courbe convexe en cas de préférence pour le risque ;



☞ Et, enfin, par une droite en cas de neutralité envers le risque



6. Applications (Voir arel)