STATISTIQUE
TESTS

D. Baskiotis

LAPI – EISTI

12 décembre 2009

Tests d'hypothèses

Généralités :

– Avec le calcul des probabilités on construit des modèles mathématiques pour décrire des phénomènes aléatoires.
– Avec les méthodes statistiques on essaie "d'ajuster " les observations à un modèle probabiliste.

On vu :

1. Problème d'échantillonnage
2. Problème d'estimation
3. On verra le problème *de la décision statistique.*

Décision statistique.

On doit décider lequel parmi les différents modèles proposés peut convenir, avec *un risque de se tromper* α .

Pb : Décider après observation d'un échantillon, de la véracité d'une hypothèse émise sur la loi suivie et les paramètres de la loi.
On se limitera aux test paramétriques.

c.à.d. : On connaît la loi suivie.

L'hypothèse concerne une "*affirmation*" sur la valeur d'un des paramètres de la loi, $\theta = E(X), \quad \sigma^2$ ou p.

Exemple :

Une machine fabrique des pièces, en :

– bon fonctionnement elle produit 3% de rebus
– en mauvais fonctionnement 5%.

On observe un échantillon de $n = 140$ et on trouve 6 pièces défectueuses, c.à.d $f_{140} = \frac{6}{140} = 4,28\%$.

Pb : Doit -on décider qu'elle fonctionne toujours bien ou pas ?

c.à.d. : doit-on accepter ou refuser l'hypothèse $p = 3\%$ ou l'hypothèse $p = 5\%$?

1. Décider si un médicament est efficace
2. Décider si un câble est plus résistant qu'un autre.

On doit donc décider si les observations permettent de refuser l'hypothèse émise sur le paramètre inconnu, *avec une probabilité faible*.

Risque première espèce

Definition 1. *: On appelle risque première espèce α (ou seuil ou niveau de signification du test),*

la probabilité de se tromper sur l'hypothèse émise au départ.

Construction d'un test

Étapes à suivre :

Un exemple :

1. On définit l'hypothèse à tester, appelée hypothèse nulle, notée H_0 :
   $H_0 : \ \theta = \theta_0 = \mu_0 = 4$cm.
2. On définit une (ou plusieurs hypothèses alternatives), notée H_1 ou H_A (on note souvent H_D à détecter)
   $H_1 : \theta = \theta_1 = \mu_1 = 3$cm.
3. On fixe $\alpha = 0.05$
4. On choisit une fonction (une statistique) dont on conna^la loi,
   $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}$

5. *Á l'aide de α et de la statistique on définit la region* , dite *critique du test* , ou *region du refus de l'hypothèse nulle*, notée souvent C, ou D.

$$P_{H_0}(a \leq \overline{X} \leq b) = P_{H_0}(\tfrac{a-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \leq \tfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \leq \tfrac{b-\mu}{\sigma}\sqrt{n}) = 1 - \alpha$$

6. On observe l'échantillon, c.à.d on calcule $\overline{x}$ et S^2

7. **Décision :**

   - Si $\overline{x} \in C$ on refuse H_0 : $\theta = \theta_0$ avec α, donc on accepte $H_1 : \theta = \theta_1$.
   - Si $\overline{x} \notin C$ on refuse H_1. $\theta = \theta_1$ avec α, donc on accepte $H_0 : \theta = \theta_0$.

"*Construire donc un test*" est équivalent à "*calculer la region critique du test*".

Les hypothèses

Definition 2. *On note :*

- $H_0 : \theta \in \Theta_0$, appelée hypothèse nulle, l'hypothèse supposée vraie au départ.
- $H_1 : \theta \in \Theta_1$, appelée hypothèse alternative. (ou H_1).

On dit qu'on teste H_0 contre H_1.

Une hypothèse peut être simple ou composite.

$$\begin{cases} H_0 : & \theta = \theta_0 \quad \text{hyp simple} \\ H_1 : & \theta = \theta_1 \quad \text{hyp simple} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} H_0 : & \theta = \theta_0 \quad \text{hyp. simple} \\ H_1 : & \theta \neq \theta_1 \quad \text{hyp. composite} \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} H_0 : & \theta \neq \theta_0 \quad \text{hyp. composite} \\ H_1 : & \theta = \theta_1 \quad \text{hyp. simple} \end{cases}$$

Les risques

Definition 3. *On appelle :*

1. *Risque première espèce α :* *La* Probabilité de refuser à tord l'hypothèse nulle H_0 *(donc la courbe de H_0)*
   Donc : ''Rejet de H_0, alors qu'elle est vraie''.
2. *Risque deuxième espèce β :* *La* Probabilité de refuser à tord l'hypothèse H_1.

   Donc : ''Rejet de H_1 , alors qu'elle est vraie ''.

Exemple : On teste $\theta = \mu$

$$\begin{cases} H_0 : & \theta = \theta_0 = 3 \\ H_1 : & \theta = \theta_1 = 5 \end{cases}$$

$\alpha = 5\% \quad \beta = 8\%.$

$\mu_0 < \mu_1$

Table de décision

	H_0 vraie	H_1 vraie
H_0 décidée	$1-\alpha$	β
H_1 décidée	α	$1-\beta$

On appelle puissance du test la fonction $1-\beta(\theta)$.

Remarques :

- On choisit comme H_0, l'hypothèse dont le rejet à tord, a les conséquences les plus pénalisantes.
- Les deux erreurs sont traitées toujours d'une façon différentes.
- Le risque β est difficilement calculable (sauf dans le cas des hypothèses simples)

- Dans tous les cas si la valeur de β n'est pas satisfaisante, on calcule β et ensuite on ajuste α.
- On a des test bilatéreaux et des tests unilatéraux.

Choix d'un test

On souhaite construire un test qui a à la fois α petit et β petit,

car on souhaite se tromper avec une petite probabilité sur les deux hypothèses.

Définition d'un test

Soit X une v.a. qui suit une loi $\mathcal{L}$.

$(X_1, X_2, ..., X_n)$, un échantillon, $(x_1, x_2, ..., x_n)$ une réalisation

Résoudre le test signifie : Définir α et C la region critique.

Definition 4. *On appelle test une (fonction) statistique φ définie de la façon suivante :*

$$\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x_1, x_2, ..., x_n) \in C \\ 0 & \text{si } (x_1, x_2, ..., x_n) \notin C \\ \gamma & \text{si } (x_1, x_2, ..., x_n) \text{ se trouve sur la frontière} \end{cases}$$

C.a.d : On décide H_1 avec probabilité égale à γ ou on décide H_0 avec probabilité $1 - \gamma$.

Attention Si la loi est continue cette probabilité est nulle.

Exemple

Une usine fabrique des piles des 1er choix et second choix.

Les durées de vie sont respectivement : $\mu_A = E(X) = 50$ et $\mu_B = E(X) = 47$ heures,
avec un écart-type $\sigma = 4$.

Un client veut vérifier que les piles achetées sont de la qualité A.

Il prend 100 piles et il trouve la moyenne expérimentale $\overline{x} = 48$ heures.

Question : Doit-il accepter le lot c.à .d accepter que $\mu_A = 50$?

Réponse

1. Il pose les hypothèses : $\begin{cases} H_0 : & \theta = \mu_0 = 50 \\ H_1 : & \theta = \mu_1 = 47 \end{cases}$
2. Il fixe le risque $\alpha = 0.05$
3. Il doit tester μ, comme σ est connu, il prendra la statistique : $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$.
4. Calcul de la region critique : $P_{H_0}(\overline{X} < C) = P_{H_0}(\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n} < \frac{C-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}) = 0.05$.

   Par la table on trouve $t = -1.64 \Rightarrow \frac{C-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{C-50}{4} * 10 = -1.64 \Rightarrow C = 49.34$

5. Calcul de β :
$1-\beta = P_{H_1}(\overline{X} < C) = P_{H_1}(\frac{\overline{X}-\mu_1}{\sigma}\sqrt{n} < \frac{C-\mu_1}{\sigma}\sqrt{n}) = P_{H_1}(\frac{\overline{X}-47}{4}\sqrt{100} < \frac{C-47}{4}\sqrt{100}) = F(\frac{2.34}{4} * 10) = F(5.85) = 0.9999$
donc $\beta = 0.00001$
6. In observe un échantillon : $n = 100$ et on trouve $\overline{x} = 48$.

Décision : $\overline{x} = 48 < 49.34$, $\overline{x}$ dans la region critique (ou zone de refus) . In refuse H_0 :'' la durée moyenne des piles est de 50 heures avec $\alpha = 0.05$ et il accepte l'hypothèse alternative.

C.a.d : On n'a pas prouvé que la durée de vie moyenne de ce lot est $\mu = 50$, avec $\alpha = 0.05$

Remarques :

- $\alpha = 0.05$ signifie " probabilité de refuser à tord $H_0 : \mu = 50$
- $\beta = 0.00001$est la " probabilité de refuser à tord $H_1 : \mu = 47$. J'ai des très faibles chances de la refuser à tord
- p.e : Si $\overline{x} = 49.5$, j'accepte $H_0 : \mu = 50$, mais si $H_1 : \mu = 47$ était vraie , on a peu des chances d'avoir pris la bonne décision.

Résumé

Dans la construction d'un test :

– Il y a quatre paramètres : α, β, n, C et deux équations$\begin{cases} P_{H_0}(u(x;\theta\ ) \in C) = \alpha \\ P_{H_1}(u(x;\theta\ ) \notin C) = 1-\beta \end{cases}$

– Dans le cas des tests bilatéraux on teste :

$$\begin{array}{ll} H_0: & \theta = \mu_0 \\ H_1: & \theta \neq \mu_0 \end{array}$$

c.a.d : $\theta = \mu_1$ ou $\theta = \mu_2$

Tests d'Hypothèses
(suite)

Rappels :

- On choisit comme H_0, l'hypothèse dont le rejet à tord, a les conséquences les plus pénalisantes.
- α : C'est l'aire de la courbe H_0 qui se trouve dans **la region critique**
- β : C'est l'aire de la courbe H_1 qui se trouve dans **la region d'acceptation de** H_0.
- Les deux erreurs sont traitées toujours d'une manière différentes.
- Le risque β est difficilement calculable (sauf dans le cas des hypothèses simples)
- On appelle puissance du test la fonction $1 - \beta(\theta)$.

Exemple

Une usine fabrique des piles des qualité A et B.

Les durées de vie sont respectivement :
$\mu_A = E(X) = 50$ et $\mu_B = E(X) = 47$ heures, $\sigma = 4$.

Un client veut vérifier si les piles achetées sont de la qualité A.

Il a un échantillon de 100 piles.

Question : Doit-il accepter le lot ?

c.à .d accepter que $\mu_A = 50$?

Réponse

1. Il pose les hypothèses : $\begin{cases} H_0 : & \theta = \mu_0 = 50 \\ H_1 : & \theta = \mu_1 = 47 \end{cases}$
2. Il fixe le risque $\alpha = 0.05$
3. Il teste μ ; comme σ est connu, il prendra la statistique $\overline{X}$:
   $\dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0, 1)$.
4. Calcul de la region critique :
   $P_{H_0}(\overline{X} < C) = P_{H_0}(\dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} < \dfrac{C - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}) = 0.05$,
   Par la table : $t = -1.64$

   $\Rightarrow \frac{C-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{C-50}{4} * 10 = -1.64 \Rightarrow C = 49.34$

5. Calcul de β :

$$1-\beta = P_{H_1}(\overline{X} < C) = P_{H_1}(\frac{\overline{X}-\mu_1}{\sigma}\sqrt{n} < \frac{C-\mu_1}{\sigma}\sqrt{n})$$

$$= P_{H_1}(\frac{\overline{X}-47}{4}\sqrt{100} < \frac{C-47}{4}\sqrt{100}) = F(\frac{2.34}{4} * 10) = F(5.85) = 0.9999$$

donc $\beta = 0.00001$

6. Décision :
   - Il observe un échantillon : $n = 100$, $\overline{x} = 48$.
   - $\overline{x} = 48 < 49.34$, $\overline{x}$ (dans la zone de refus).

Il refuse H_0 : : '' la durée moyenne des piles est de 50 heures avec $\alpha = 0.05$ ''

et il accepte l'hypothèse alternative H_1 : "La durée de vie est" $\mu = 47$

C.a.d : On n'a pas prouvé que la durée de vie moyenne de ce lot est $\mu = 50$, avec $\alpha = 0.05$

Remarques :

- $\alpha = 0.05$ signifie " probabilité de refuser à tord $H_0 : \mu = 50$
- $\beta = 0.00001$ est la " probabilité de refuser à tord $H_1 : \mu = 47$.
  J'ai des très faibles chances de la refuser à tord.

Dans la construction d'un test :

– Il y a quatre paramètres : $\alpha, \quad \beta, \quad n, \quad C$
et deux équations

$$\begin{cases} P_{H_0}(u(x;\theta\ ) \in C) = \alpha \\ \\ P_{H_1}(u(x;\theta\ ) \in C) = 1 - \beta \end{cases}$$

Donc, **il y a deux paramètres parmi les quatres qui sont connus et deux inconnus**

CHOIX D'UN TEST

Types des tests

- Tests Bilatéraux.
  $H_0: \quad \theta = \mu_0$
  $H_1: \quad \theta \neq \mu_0 \quad \theta = \mu_1$ ou $\theta = \mu_2$

- Tests Unilatéraux
  $H_0: \quad \theta = \mu_0$
  $H_1: \quad \theta = \mu_1$

Définition d'un test

Soit une v.a. $X \sim \mathcal{L}$. ,$(X_1, X_2, ..., X_n)$ un échantillon, $(x_1, x_2, ..., x_n)$ une réalisation.

Définition : On appelle test une (fonction) statistique ϕ définie par :

$$\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x_1, x_2, ..., x_n) \notin C & \text{On décide } H_0 \\ 1 & \text{si } (x_1, x_2, ..., x_n) \in C & \text{On décide } H_1 \\ \gamma \in]0,1[& \text{si } (x_1, x_2, ..., x_n) & \text{On décide } H_1 \\ & \text{est sur la frontière} & \text{avec probabilité } \gamma \\ & \text{ou on décide } H_0 \text{ avec probabilité } 1-\gamma. & \end{cases}$$

C.a.d : On décide H_0 ou H_1 selon une loi de Bernoulli de paramètre $p = \gamma$

Attention Si la loi est continue cette probabilité γ est nulle.

Résoudre le test signifie : Définir γ et C (la region critique).

Test de Neyman-Pearson

Rappel : On appelle puissance du test la fonction $1-\beta(\theta)$; Probabilité de refuser H_0 lorsque H_1 est vraie (refus avec raison)

On souhaite construire un test qui a à la fois α et β petits car,

on souhaite se tromper avec une petite probabilité sur les deux hypothèses.

Définition : Le test φ_1 est meilleur que φ_2 lorsque $\alpha_{\varphi_1} \leq \alpha_{\varphi_2}$ et $1-\beta_{\varphi_1} \geq 1-\beta_{\varphi_2}$ (c.a.d. $\beta_{\varphi_1} \leq \beta_{\varphi_2}$)

Objectif : Trouver le test qui minimise à la fois α et β.

Ce problème peut être résolu si on fixe α et on minimise β

Définition : On appelle test *Uniformement le Plus Puissant* , et on note UPP, le test qui parmi les tests du même niveau α, minimise β (ou maximise $1-\beta$).

Neyman et Pearson ont résolu ce problème seulement dans le cas **des hypothèses simples.**

Théorème de N-P

Soit le test : $\begin{array}{ll} H_0 : & \theta = \mu_0 \\ H_1 : & \theta = \mu_1 \end{array}$,

Alors pour $\forall\alpha \in]0,1[$, il existe $\gamma \in]0,1[$ et C uniques, tels que :

$$\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \dfrac{\prod_{k=1}^{n} f(x_k;\theta_1)}{\prod_{k=1}^{n} f(x_k;\theta_0)} > C \\ 0 & \text{si } \dfrac{\prod_{k=1}^{n} f(x_k;\theta_1)}{\prod_{k=1}^{n} f(x_k;\theta_0)} < C \\ \gamma \in]0,1] & \text{si } \dfrac{\prod_{k=1}^{n} f(x_k;\theta_1)}{\prod_{k=1}^{n} f(x_k;\theta_0)} = C \\ \gamma \text{ est la probabilité de tomber sur le point critique.} \end{cases}$$

ou bien

$$\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \dfrac{L((x_1, x_2, ..., x_n; \theta_1)}{L(x_1, x_{2,} ..., x_n; \theta_0)} > C \\ 0 & \text{si } \dfrac{L(x_1, x_{2,} ..., x_n; \theta_1)}{L(x_1, x_{2,} ..., x_n; \theta_0)} < C \\ \gamma \in]0,1] & \text{si } \dfrac{L(x_1, x_{2,} ..., x_n; \theta_1)}{L(x_1, x_{2,} ..., x_n; \theta_0)} = C \\ \gamma \text{ est la probabilité de tomber sur le point critique.} \end{cases}$$

Donc : Construire le test de Neyman-Pearson :
C'est **Calculer** C **et** γ qui **sont uniques.**

Remarque : Comme $L(x_1, x_{2,\ldots,} x_n; \theta) = K \prod_{k=1}^{n} f(x_k; \theta)$, on travaille souvent avec la fonction de vraisemblance.

Attention Si la loi est continue cette probabilité γ est nulle.

Exemple

Loi Discrète

On teste si une pièce est équilibrée.

$X_i \sim B(p)$,

$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ nb des piles obtenues si on lance n fois. $X \sim B(n,p)$, $\vartheta = p$

$$P(X_i = x_i) = \theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i}.$$

Étapes :

1. $\begin{cases} H_0 : \quad \theta = \mu_0 = 0.5 \\ \\ H_1 : \quad \theta = \mu_1 = 0.75 \end{cases}$

2. $n = 25$, $\alpha = 0.05$, β et C inconnus

3. Calcul de la region critique :

(a) $L(x_1, x_{2,...}, x_n; \theta) = K \prod_{k=1}^{n} \theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i} = K\theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}$

(b) $R(x_1, x_{2,...}, x_n; \theta) = K_1 \frac{\theta_1^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-\theta_1)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\theta_0^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-\theta_0)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}} > C_1$

(c) $\ln R(x_1, x_{2,}..., x_n; \theta) = \sum_{i=1}^{n} x_i \ln(\theta_1) + (n - \sum_{i=1}^{n} x_i) \ln(1 - \theta_1) - \sum_{i=1}^{n} x_i \ln(\theta_0) - (n - \sum_{i=1}^{n} x_i) \ln(1 - \theta_0)$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \ln(\frac{\theta_1}{\theta_0}) + (n - \sum_{i=1}^{n} x_i) \ln(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}) > \ln C_1$$

(d) $\sum_{i=1}^{n} x_i > C_0$;

ATTENTION Á : $\ln(\frac{\theta_1}{\theta_0})$ et $\ln(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0})$

(e) Or $X = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim B(n,p)$

4. Test de Neyman-Pearson :
   $\alpha = P_{H_0}(X > C_0) + \gamma P_{H_0}(X = C_0) = 0.95$
5. On doit calculer C_0 et γ
   (a) $\alpha = 1 - P_{H_0}(X \leq C_0) + \gamma P_{H_0}(X = C_0)$

   $$\Leftrightarrow \quad P_{H_0}(X \leq C_0) - \gamma P_{H_0}(X = C_0) \ = 1 - \alpha.$$

   (b) On regarde dans la table de la loi binomiale avec $p = 0.5$:

   $\mathbf{P}_{H_0}(\mathbf{X} \leq \mathbf{17}) = \mathbf{0.97836}$; $P_{H_0}(X \leq 16) = 0.94612$;
   $P_{H_0}(X \leq 18) = 0.99268$

   Donc $C_0 = 17$; et $P_{H_0}(X = 17) = 0.0323$

(c) On en déduit : $\gamma = \dfrac{\mathbf{P}_{H_0}(\mathbf{X} \leq \mathbf{C}_0) - \mathbf{0.95}}{P_{H_0}(X = 17)} = \dfrac{0.9784 - 0.95}{0.0323} = 0.8792$

Donc $C_0 = 17$; et $\gamma = 0.8792$

6. Calcul de la puissance du test :

(a) $1-\beta = P_{H_1}(X > C_0) + \gamma P_{H_1}(X = C_0)$

$= P_{H_1}(X > 17) + 0.8792 \times P_{H_1}(X = 17) \quad ; \quad p = 0.75 \quad , (2)$

(b) Or $P_{0.75}(X > 17) = P_{0.75}(X \geq 18) = P_{0.25}(Y \leq 7) = 0.7265$
($Y \leq 7$ est l'événement symétrique)

et $P_{0.75}(X = 17) = P_{0.25}(Y = 7) =$
$P_{0.25}(Y \leq 8) - P_{0.25}(Y \leq 7) = 0.8506 - 0.7265 = 0.1241.$

(c) On en déduit de la (2) : $1-\beta = 0.7265 + 0.8792 \times 0.1241. = 0.8356 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{\beta = 1 - 0.8356 = 0.1644}$

β étant petit aussi, on peut conclure :

7. Décision :

   On observe un échantillon : On lance $n = 25$ fois la pièce, soit X le nombre des piles obtenues.

   – Si $X > 17$, on refuse l'hypothèse H_0 avec $\alpha = 0.05$
   – Si $X < 17$, on accepte H_0 avec $\alpha = 0.05$
     "pièce équilibrée"
   – Si $X = 17$, on refuse l'hypothèse H_1 avec $\gamma = 0,8792$

Exemple Loi Continue

Soit $X_i \sim \exp(\lambda)$; $E(X_i) = \theta = \frac{1.}{\lambda}$ $f(x_i;\theta) = \frac{1}{\lambda}e^{-\frac{1}{\lambda}x_i}$; $\lambda, x > 0$; X : durée dde vie d'un composant

On veut tester si $\lambda = 2$ contre $\lambda = 1$

Construction du test

1. On pose les hypothèses : $\begin{cases} H_0 : & \theta = \theta_0 = 2 \\ H_1 : & \theta = \theta_1 = 1 \end{cases}$
2. On fixe α et $n = 50$

1. Calcul de la region critique :

$$L(x_1, x_2, ..., x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta) = (\theta)^n e^{-\theta \sum\limits_{i=1}^{n} x_i}$$

(a) $$R(x_1, x_{2,}..., x_n; \theta) = \frac{L(x_1, x_2, ..., x_n; \theta_1)}{L(x_1, x_2, ..., x_n; \theta_0)} = \frac{(\theta_1)^n e^{-\theta_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i}}{(\theta_0)^n e^{-\theta_0 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i}} > C$$

(b) $$\ln R(x_1, x_{2,}..., x_n; \theta) = n \ln(\theta_1) - \theta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i - n \ln(\theta_0) + \theta_0 \sum_{i=1}^{n} x_i > C_1$$

(c) $$(\theta_0 - \theta_1) \sum_{i=1}^{n} x_i > C_2$$

1.(a) On ne conna^pas la loi de $\sum_{i=1}^{n} x_i$; mais $n = 50$.

On utilise le T.C.L. On pose $X = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$; $E(X) = n\theta$ et $\sigma^2 = n\theta^2$.

(b) $\alpha = P_{H_0}(\sum_{i=1}^{n} X_i > C_0) + \gamma P_{H_0}(\sum_{i=1}^{n} X_i = C_0) = 0.05$

$$\Longleftrightarrow \qquad P_{H_0}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\theta}{\theta\sqrt{n}} > \frac{C_0 - n\theta)}{\theta\sqrt{n}}\right) = 0.05$$

On calcule C_0 et ensuite $1 - \beta$ e.t.c

Rappels :

- On choisit comme H_0, l'hypothèse dont le rejet à tord, a les conséquences les plus pénalisantes.
- Les deux erreurs sont traitées toujours toujours d'une manière différente.
- Le risque β est difficilement calculable (sauf dans le cas des hypothèses simples)
- *On souhaite construire un test qui a à la fois* α petit et β petit,
  car on souhaite se tromper avec une petite probabilité sur les deux hypothèses.
- On a des test bilatéraux et des tests unilatéraux.