Ch. 6 INFÉRENCE

Introduction

Rappel :
Le but de la statistique est de déterminer un modèle probabiliste ou bien certains paramètres du modèle à partir des observations.

Faire l'inférence sur les paramètres ou la loi suivie par un phénomène physique.

Deux types de problèmes

– La loi suivie est totalement inconnue $\Rightarrow$ **Statistique non - paramétrique**.

– La loi suivie est connue mais les paramètres de la loi sont inconnus $\Rightarrow$ **Statistique paramétrique**.

Statistique paramétrique.

Exemple : La loi suivie est une loi Normale mais les paramètres σ^2 et/ou μ sont inconnus.
On note :

θ le paramètre inconnu ou $\underline{\theta}$ les paramètres inconnus.

Problème du statisticien :

Connaître la vraie valeur de θ

Solution Il fera des observations sur un échantillon et ensuite il va essayer de voir par quelle fonction, qui résulte des ces observations, pourra estimer au **mieux** les paramètres inconnus.

Il fera donc une **inférence** .

Estimation du paramètre $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \ldots, \theta_m]^\top$

- **L'estimation ponctuelle :**
  A partir des n v.a. $X_1, \ldots, X_n$ on calcule une seule valeur pour estimer le paramètre $\boldsymbol{\theta}$.

- **Estimation par *Intervalle De Confiance* :** On associe au paramètre $\boldsymbol{\theta}$ un Intervalle, dit de ***confiance***, dans lequel se trouve la vraie valeur de $\boldsymbol{\theta}$ avec une probabilité fixée d'avance.

Modélisation

Définition : . Soit une v.a. X définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de densité $f(x, \boldsymbol{\theta})$ avec $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots \theta_r)^T \in \Theta$. On définit la ***famille des fonctions de densité*** quand $\boldsymbol{\theta}$ varie dans Θ : $\mathcal{F}(\Theta) = \{f(\cdot, \boldsymbol{\theta}) \mid \boldsymbol{\theta} \in \Theta\}$.

Définition : . On appelle ***modèle statistique*** la donnée d'un espace $(\Omega, \mathcal{A})$ probabilisable et d'une famille de densités $(P_\theta)_{\theta \in \Theta}$ quand $\boldsymbol{\theta}$ varie dans Θ .

Définition : . On appelle ***échantillon de taille*** n ou **n - *échantillon*** de la v.a. X, toute suite de v.a. $(X_1, X_2, ..., X_n)$ indépendantes qui suivent la même loi que X

On note :

- $\underline{\theta} = [\theta_1, \theta_2, ..., \theta_k]$ les paramètres inconnus.
- On notera $\mathcal{L}(\underline{\theta})$ la loi connue de paramètre θ
- $(X_1, X_2, ..., X_n)$ un n- échantillon
- $(x_1, x_2, ..., x_n)$ une réalisation de l'échantillon.

Définition : . Soit $(X_1, X_2, ..., X_n)$ un $\mathbf{n}$ **-échantillon.**
On appelle $\boldsymbol{statistique}$ toute v.a. U de la forme $U = \phi\,(X_{1,}X_2, ..., X_n)$ où ϕ est une application mesurable de

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

qui ne dépend pas de θ

Pb :

- Comment choisir la "meilleure" statistique pour estimer les paramètres
- Comment déterminer la fonction de perte.
  C.à.d. Estimer l'erreur commise par l'estimation ?

Définition : On appelle ***estimateur*** de θ, (ou $\alpha(\theta)$), toute statistique U, notée aussi $\widehat{\theta}$, dont la valeur observée sur l'échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ est utilisée pour estimer le paramètre inconnu θ (ou une fonction de θ, $\alpha(\theta)$).

Problème : Comment choisir un Estimateur ?

On doit étudier ses propriétés.

1. Propriétés à distance finie des estimateurs

On considère un échantillon de la v.a. X qui suit une loi de paramètre θ.

1.1 Estimateur non biaisé

Définition L'estimateur $U_n(X_1, \ldots, X_n)$ est ***sans biais*** pour le paramètre $\theta \in \Theta$, (ou pour une fonction de θ, $\alpha(\theta)$) si :

$$E_\theta[U_n] = \theta \quad (\text{ ou } E_\theta[U_n] = \alpha(\theta)) \quad \forall \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$$

$b = E_\theta[U_n] - \theta\,;$ b : est le biais de l'estimateur.

Rq :

- Le biais est l'erreur systématique due au fait que U varie autour de $E(U)$ et pas autour de θ.
- Cette propriété n'est pas invariante par rapport à une transformation.
  Si T est sans biais pour θ, $h(U)$ n'est pas en général sans biais pour $h(\theta)$ sauf dans le cas d'une transformation linéaire.

1.2 Risque quadratique d'un estimateur

Définition : On appelle ***risque quadratique*** d'un estimateur U_n de θ, (ou de $\alpha(\theta)$) le nombre :

$$R_\theta(U) = E_\theta(U-\theta)^2$$

ou

$$R_\theta(U) = E_\theta(U-\alpha(\theta))^2$$

. On dit que U est ***préférable*** à V si :

$$R_\theta(U) \leq R_\theta(V) \;\;, \forall\theta \in \Theta$$

Rq :

- $R_\theta(U) = V(U) + b^2$
  car $E_\theta(U-\theta)^2 = V(U) + [E(U) - \theta]^2$
- Le risque quadratique de l'estimateur exprime la variation autour de θ.

1.3 Efficacité relative des deux estimateurs

Définition : Soient T et U deux estimateurs sans biais de $\alpha(\theta)$.

L'estimateur T est dit plus ***efficace*** que U si :

$$V(T) \leq V(U) \ \forall \theta \in \Theta$$

Rq :

– Cette définition exprime que T présente des variations plus petites que U
– Cette notion concerne les estimateurs sans biais

2. Propriétés asymptotiques des estimateurs

2.1 Définition : L'estimateur $U_n(X_1, \ldots, X_n)$ est un ***estimateur asymptotiquement sans biais*** pour le paramètre $\theta \in \Theta$ (ou $\alpha(\theta)$) si :

$$E_\theta[U_n] \longrightarrow n \to \infty \theta \quad (\text{ ou } E_\theta[U_n]$$

2.2 Définition : L'estimateur $U_n(X_1, \ldots, X_n)$ est un estimateur ***convergent*** si :

$$U_n$$

2.3 Proposition. Si $\lim_{n \to \infty} R_\theta(U_n) = 0$ alors U_n est **convergent et asymptotiquement sans biais**.

2.2 Définition : Un estimateur U de θ est dit ***asymptotiquement normal*** si

$$\sqrt{n}(U-\theta) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

ou bien

$$(U-\theta) \sim \mathcal{N}(0, \frac{\sigma^2}{n})$$

Exemple : $\overline{X} = \frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}$ est asymptotiquement normal.

Remarques :

- Un estimateur sans biais n'est pas toujours meilleur au sens du risque quadratique qu'un estimateur avec biais.
- Deux estimateurs ne sont pas toujours comparables.
- Entre deux estimateurs sans biais, le plus précis est celui qui a la plus petite variance.

Pb : Comment améliorer un estimateur ?

– Méth.1 : Á partir d'un estimateur T on essaie de "construire" un autre U préférable à T en réduisant sa variance.
– Méth.2 : Transformer un estimateur T pour réduire son biais.