Ch.4 Approximations des Lois

Dans tout ce qui suit on considère
- des v.a.i.i.d.
- $E(X_k), \sigma^2$ existent pour tout $k = 1, 2, ..., n$

Utilisation du TCL

4.2 Variables continues : Approximation de $P(a < S_n \leq b)$

Soit la suite $(X_n)_n$ de v.a.i.i.d. , $E(X_k) = \mu; V(X_k) = \sigma^2$

Soit la v.a. $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ on a : $E(S_n) = n\mu$ et variance $V(S_n) = \sigma^2 n$.

$$\begin{aligned} P(a < S_n \leq b) &= P\left(\frac{a-n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < \frac{S_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{b-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{b-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{a-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

Φ : fonction de répartition de $\mathcal{N}(0,1)$

$Z_n = \frac{S_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ est une v.a. standarisée, par le TCL, $Z_n \sim \mathcal{N}(0,1)$

Exemple :

Il y 50 personnes qui attendent d'être servies.

Soit T_i le temps de service de la i-ème personne, qui suit une loi exponentielle avec $\lambda = 1$

Calculer la probabilité que la durée totale d'attente dépasse 60 minutes.

Rép.

$$T = T_1 + T_2 + ... + T_{50} \quad ; \quad E(T_i) = \frac{1}{\lambda} \quad ; \quad \sigma^2 = Var(T_i) = \frac{1}{\lambda^2} = 1$$

Par T.C.L. on a :

$$P(T > 60) = 1 - P(\frac{T-16*1}{\sqrt{16*1}} < \frac{20-16*1}{\sqrt{16*1}}) = 1 - F(1) \cong 0.15866$$

4.3 Approximation d'une loi discrète

Soit la suite $(X_n)_n$ des v.a. discrètes

Sans correction : On a par le **TCL** :

$$P(a \leq S_n \leq b) \cong \Phi\left(\frac{b - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{a - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

Mais si n n'est pas très grand cette approximation n'est pas bonne, on doit la corriger.

Avec correction :

$$P(a \leq S_n \leq b) = P(a - \frac{1}{2} \leq S_n \leq b + \frac{1}{2}) = \Phi\left(\frac{b + \frac{1}{2} - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{a - \frac{1}{2} - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

Approximation de la loi binomiale

Une pièce équilibrée est lancée 60 fois. Quelle est la probabilité que le nombre de faces soit entre 28 et 32 ?

– **Avec correction :**
  $$P(28 \leq S_n \leq 32) \cong \Phi\left(\frac{32+\frac{1}{2}-60p}{\sqrt{60*\frac{1}{2}}}\right) - \Phi\left(\frac{28-\frac{1}{2}-60p}{\sqrt{60*\frac{1}{2}}}\right) = 0.481395$$
– **Sans correction :**
  $$P(28 \leq S_n \leq 32) \cong \Phi\left(\frac{32-60p}{\sqrt{60*\frac{1}{2}}}\right) - \Phi\left(\frac{28-60*p}{\sqrt{60*\frac{1}{2}}}\right) = 0.394423$$
– **Probabilité exacte :**

  $$P(28 \leq S_n \leq 32) = 0.481042$$

Approximation de la loi de Poisson

$(X_n)_n \sim P(\lambda)$.

La v.a. $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ est approximée par la loi normale $\mathcal{N}\ (n\lambda, n\lambda)$.

– sans correction

$$P\left(a < S_n \leq b\right) = P\left(\frac{a - n\lambda}{\sigma\sqrt{n\lambda}} \leq \frac{S_n - n\lambda}{\sigma\sqrt{n\lambda}} \leq \frac{b - n\lambda}{\sigma\sqrt{n\lambda}}\right) \qquad (1)$$

– avec correction

$$P(a-\frac{1}{2} < S_n \leq b+\frac{1}{2}) = P\left(\frac{a - 0.5 - n\lambda}{\sigma\sqrt{n\lambda}} \leq \frac{S_n - n\lambda}{\sigma\sqrt{n\lambda}} \leq (\frac{b + 0.5 - n\lambda}{\sigma\sqrt{n\lambda}}\right) \qquad (2)$$