STATISTIQUE COMPUTATIONNELLE – 2

CONVERGENCE – THÉORÈMES LIMITES

2.1 Convergence

La notion de la convergence, qui est familière en analyse, est utilisée en probabilités pour étudier la proximité des distributions de deux variables aléatoires.

On considère une suite des v.a. $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ de $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ que l'on notera par $(X_n)_n$. Notons aussi par F_{X_i} la fonction de répartition de la v.a.X_i. On fait, encore, l'hypothèse que les moments d'ordre 2 de la suite des v.a.$(X_n)_n$ et de la v.a. X existent.

DÉFINITION 2.0.1 *On dit que la suite des v.a.* $(X_n)_n$ *converge vers la v.a.* X presque sûrement *ou* avec probabilité un *et l'on note*

$$\lim_{n\to\infty} X_n \underset{ps}{=} X$$

si

$$P\left[\lim_{n\to\infty} X_n = X\right] = 1$$

c'est-à-dire si

$$P\left[\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right] = 1 \quad \forall\omega \in \Omega - \Omega_0 \quad avec \quad \Omega_0 \subset \Omega \quad tel\ que\ P(\Omega_0) = 0$$

DÉFINITION 2.0.2 *On dit que la suite des v.a.* $(X_n)_n$ *converge en probabilité vers la v.a.* X *et l'on note*

$$\lim_{n\to\infty} X_n \underset{p}{=} X$$

si

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} P(\{\mid X_n - X \mid < \varepsilon\}) = 1$$

DÉFINITION 2.0.3 *On dit que la suite $(X_n)_n$ converge en moyenne quadratique vers X et l'on note*

$$\lim_{n\to\infty} X_n \underset{mq}{=} X$$

si

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\mid X_n - X \mid^2\right] = 0$$

c'est-à-dire que $\forall \varepsilon > 0$ il existe un entier $N(\varepsilon) > 0$ tel que $E\left[\mid X_n - X \mid^2\right]$ $\forall n \geq N(\varepsilon)$.

DÉFINITION 2.0.4 *On dit que la suite $(X_n)_n$ converge en loi vers X et l'on note*

$$\lim_{n\to\infty} X_n \underset{l}{=} X$$

si

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ pour lequel la fonction } F_X \text{ est continue}$$

Nous avons le schéma d'implication suivant :

$$\begin{array}{rcl} \text{conv. presque sûre} & \searrow & \\ & & \text{conv. en probabilité} \rightarrow \text{conv. en loi} \\ \text{conv. en moyenne quadratique.} & \nearrow & \end{array}$$

Les deux notions de convergence, à savoir la convergence en probabilité et la convergence presque sûre, semblent être identiques.. En effet pour les deux notions nous avons que $\forall \varepsilon > 0$ et $\forall \delta > 0$, il existe un entier $N(\varepsilon, \delta) > 0$ tel que $P(\{\mid X_n - X \mid < \varepsilon\}) = 1$ $\forall n \geq N(\varepsilon, \delta)$. Mais la convergence presque sûre établit en plus que cette relation est valable pour chaque $\omega \in \Omega - \Omega_0$, c-à-d. $\lim_{n\to\infty} X_n$ que $\forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0$ et $\forall \omega \in \Omega - \Omega_0$ il existe un entier $N(\varepsilon, \delta; \omega) > 0$ tel que $P(\{\mid X_n(\omega) - X(\omega) \mid < \varepsilon\}) = 1$ $\forall n \geq N(\varepsilon, \delta; \omega)$.

2.2

Inégalités

Soit $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ vecteur aléatoire et $g \geq 0$ une fonction mesurable à valeurs réelles, définie sur $\mathbb{R}^n$, telle que $g(\mathbf{X})$ est une variable aléatoire. On démontre que :

(1)

$$P(g(\mathbf{X}) \geq c) \leq \frac{E[g(\mathbf{X})]}{c} \quad \textit{avec} \;\; c > 0$$

(2) **Inégalité de Markov**

$$P[(|X-\mu|)^r \geq c^r] \leq \frac{E[|X-\mu|^r]}{c^r}$$

(3) **Inégalité de Tchebychev**

$$P\left[(|X-\mu|)^2 \geq c^2\right] \leq \frac{E\left[|X-\mu|^2\right]}{c^2} = \frac{\sigma_X^2}{c^2}$$

(4) **Forme simplifiée de l'inégalité de Tchebychev**

$$P[|X-\mu| \geq k\sigma] \leq \frac{1}{k^2}$$

(5) Inégalité de Kolmogorov : Si $(X_n)_n$ suite de v.a. indépendantes, centrées et de variance finie, alors nous avons :

$$P\left[\max_{1\leq k\leq n} |S_k| > c\right] \leq \frac{V(S_{n)}}{c^2} \quad ; \forall c>0\ ,\ n=1,2,\ldots$$

où on a posé : $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$.

2.3 Lois des grands nombres

La loi des grands nombres enonce le fait suivant : plus la taille d'un échantillon augmente, plus la moyenne de l'échantillon se rapproche de celle de la population.

Loi forte des grands nombres $\overline{X}_n \rightarrow_p \mu$ où $\overline{X}_n$ la moyenne empirique d'un échantillon de taille n et μ la moyenne de la population.

Loi faible des grands nombres $\overline{X}_n \rightarrow_{ps} \mu$.

2.4 Théorème central limite (TCL)

Nous savons que sous certaines conditions, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ converge vers $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k)$. Mais, en règle générale, $E(X_k)$ est une v.a., de sorte que ces résultats, bien qu'ils valident la démarche statistique, n'apportent pas une aide pour le calcul de $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$.

Le théorème suivant nous fournit plus des précisions dans le cas particulier des v.a.i.i.d.

THÉORÈME 2.0.1 (Th. central limite).- *Soit la suite* $(X_n)_n$ *de v.a.i.i.d. telles que* $E(X_k)=\mu$ *avec* $|\mu|<\infty$ *et* $V(X_k)=\sigma^2<\infty$; $\forall k=1,2,\ldots$. *Notons par*

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$$

et par

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

la v.a. centrée réduite de S_n . Alors nous avons

$$\lim_{n\to\infty} Z_n \underset{l}{=}\sim \mathcal{N}(0,1)$$

De ce théorème nous pouvons conclure que

$$\lim_{n\to\infty} Z_n \sim \mathcal{N}(0,1)$$

avec

$$Z_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} E\left(X_k - \mu_k\right)}{\left(\sum_{k=1}^{n} V\left(X_k\right)\right)^{0.5}}$$

2.5 Approximation des lois à l'aide de la loi uniforme

Bien que nous avons déjà examiner l'approximation de la loi binomiale ou de la loi de Poisson par la loi normale, le cadre théorique de l'approximation d'une loi par une autre loi a comme fondement le T.C.L. Nous présentons l'approximation des lois à l'aide la loi uniforme.

Considérons une v.a. X qui suit la loi de probabilité $\mathcal{L}$ de fonction de répartition F. On suppose que F est continue à droite, i.e. que $F(x) = P(X \leq x)$. On cherche à déterminer une suite des valeurs numériques de la v.a. X , c'est-à-dire une suite de nombres qui sont répartis selon la loi $\mathcal{L}$. Le théorème suivant fournit une méthode de construction.

THÉORÈME 2.0.2 *Soit une v.a. X qui suit la loi de probabilité $\mathcal{L}$ de fonction de répartition F, continue. Considérons la fonction $G :]0,1] \to \mathbb{R}$, définie par la relation*

$$G(y) = \inf\ \{x \in \mathbb{R}\ \mid\ F(x) \geq y\} \quad ; \quad y \in]0,1] \tag{2.1}$$

Alors, si Y est une v.a. qui suit la loi uniforme $U(0,1)$, la v.a. $G(Y)$ suit la loi $\mathcal{L}$ de fonction de répartition F, c'est-à-dire elle représente la v.a. X .

D'après ce théorème, nous pouvons utiliser les valeurs d'une v.a. qui suit la loi uniforme $U(0,1)$ pour engendrer d'autres v.a. qui suivent une autre loi $\mathcal{L}$.

Comme exemple d'application nous allons utiliser la loi uniforme pour engendrer des valeurs qui suivent la loi normale réduite.

Soit $(X_n)_n$ suite de v.a. qui suivent la loi uniforme $U(0,1)$. Nous savons que l'espérance mathématique de cette loi est $E(X_k) = \dfrac{1}{2}$ et la variance $V(X_k) = \dfrac{1}{12}$. Par conséquent la v.a. $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ a comme espérance mathématique $E(S_n) = \dfrac{n}{2}$ et variance $V(S_n) = \dfrac{n}{12}$. La v.a. standarisée

$$Z_n = \frac{S_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{12}}}$$

suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Donc la v.a. S_n suit la loi $\mathcal{N}(0,\frac{n}{12})$.

Ce résultat nous permet d'élaborer l'algorithme suivant pour créer des éléments de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$:

(1) On extrait douze fois un élément de la loi uniforme $U(0,1)$ (c'est-à-dire un nombre distribué équiprobablement dans l'intervalle $[0,1]$).

(2) On fait la somme de ces douze éléments.

(3) De cette somme on retranche la valeur 6.

Le résultat obtenu est un élément de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, que l'on appelle souvent bruit blanc gaussien (c'est-à-dire un nombre distribué selon la loi normale dans l'intervalle $[0,1]$).

2.6 Exercices

EXERCICE 2.1 (CONVERGENCE VERS UNE CONSTANTE) $\forall c \in \mathbb{R} : X_n \to_l c \Leftrightarrow X_n \to_p c$

EXERCICE 2.2 *Soit* $(X_n)_n$ *une suite de v.a. qui suivent la loi binomiale* $B(n,\lambda/n)$. *On a que si* $X_n \to_l X$, *alors* $X \sim P(\lambda)$.

EXERCICE 2.3 *Soit la suite de v.a* $\{X_n\}_{n\geq 0}$ *et la v.a* $X = a$ *avec* a *constante.*

Montrer que si :

- $\lim_{n\to\infty} E\ (X_n) = a$

  et

- $\lim_{n\to\infty} V\ (X_n) = 0$

(1) X_n *converge en moyenne quadratique vers* X

(2) X_n *converge en probabilité vers* X.

EXERCICE 2.4 *Un astronome souhaite mesurer la distance, en années lumière, entre son observatoire et une étoile. Il prévoit de prendre plusieurs mesures et accepter leur moyenne comme estimation de la distance réelle.*

On suppose que X_i , $i = 1,\ldots,n$ *sont des v.a.i.i.d. d'espérance commune* d *et de variance commune* 4.

Combien de mesures doit-il réaliser pour être sûr à 95% *que l'erreur soit inférieure à une démi-année lumière ?*

EXERCICE 2.5 *Pour palier à un défaut de fonctionnement d'une machine, les articles produits par cette machine sont traités selon une méthode* A . *Des études ont montré que sur 233 articles, 84 ont été réparés après le traitement.*

(1) En admettant que chaque article a une probabilité égale d'être réparé, trouver la loi de probabilité du nombre X *d'articles réparés. Calculer sa moyenne et sa variance.*

(2) *On suppose qu'on utilise ce traitement pour 100 articles.*
Calculer l'espérance et l'écart-type de la variable $Y = X/n$.

(3) *Par quelle loi peut-on approcher la v.a.* Y *?*

(4) *Calculer la valeur de* n *pour que*

$$p\left(\frac{X}{n} \geq 0.44\right) \; = \; 0.03$$

EXERCICE 2.6 *Le nombre de personnes arrivant à un arrêt d'autobus, entre l'instant* 0 *et l'instant* t*, suit une loi de Poisson de paramètre* λ *. On suppose que la capacité maximum d'autobus est de* N *personnes. Quel est l'intervalle maximum de passage de deux autobus consécutifs, pour que toutes les personnes attendant à l'arrêt puissent monter avec une probabilité supérieure à 0,99 ?*

Exercices à faire chez soi

EXERCICE 2.7 *Soit une v.a.* X *définie sur* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *avec* $\Omega = \{1,2,3,4\}$ *,* $\mathcal{A}$ *tribu discrète.*
On définit les v.a. X_n, $n = 1,2,\ldots$ *comme suit :*
$X_n(1) = X_n(2) = 1$ *,* $X_n(3) = X_n(4) = 0$ *,* $n = 1,2,\ldots$*;*
et la variable aléatoire X *avec* $X(1) = X(2) = 0$ *,* $X(3) = X(4) = 1$

(1) *Montrer que* X_n *ne converge pas en probabilité vers* X.

(2) *Montrer que* X_n *converge en loi vers* X.

EXERCICE 2.8 *Soit une suite de v.a.* $(X_n)_{n\geq 0}$ *qui converge en loi vers une v.a.* X *et* $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.
On pose $X_n = -X$ *pour tout* $n \geq 0$.
Examiner la convergence en probabilité de v.a. X_n.

EXERCICE 2.9 *Soit* X *v.a. avec fonction de répartition continue* F_X.

(1) *Montrer que la v.a.* $Y = F_X(X)$ *suit la loi uniforme* $U[0,1]$.

(2) *Déterminer les valeurs de la v.a. uniforme* Y *qui simule la v.a.* X *dont la probabilité est donnée par :*

$$P(X \leq x) = \begin{cases} 0\,, & si\;\; x < 0 \\ x\,, & si\;\; 0 \leq x < 1/2 \\ 1/2\,, & si\;\; 1/2 \leq x < 1 \\ x/2\,, & si\;\; 1 \leq x < 2 \\ 1, & si\;\; x \geq 2 \end{cases}$$

EXERCICE 2.10 *Soit la suite de v.a.i.* $(X_k)_{k=1,\ldots,n}$ *avec* $X_k \sim \mathcal{U}[0,1]$; $k = 1,\ldots,n$. *On note* $Y_n = \max\max\{X_1,\ldots,X_n\}$.

(1) *Montrer que* Y_n *converge en moyenne quadratique vers* 1.

(2) *Montrer que* $n(1 - Y_n)$ *converge en loi vers une loi que l'on identifiera.*