Cours 4 : Optimisation avec contraintes
Méthode de Projection
Méthode de pénalisation

Optimisation déterministe

EISTI
Ingénieurs 2$^{\text{ème}}$ année GI
2010-2011

Nisrine Fortin Camdavant

1. Méthode du gradient projeté

2. Méthode de pénalisation
   - Pénalisation extérieure
   - Pénalisation intérieure

Problème d'optimisation **avec contraintes** :

$$(\mathcal{P}) : \quad \begin{cases} \min J(x) \\ \\ x \in K \end{cases}$$

- J une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$
- K l'ensemble des contraintes.

Dans toute la suite, K est un ensemble non vide, fermé de $\mathbb{R}^n$.

I. Méthode du gradient projeté

Principe

- **Outils :** projection sur un convexe fermé
  - soit K un convexe fermé et non vide de $\mathbb{R}^n$, pour tout $\mathbf{x}$ alors

$$P_K(\mathbf{x}) = \arg\min_{y \in K} \|x - y\|^2$$

    existe et est unique.

- **Principe :**
  1. descente de gradient : on minimise la fonction objectif sans tenir compte des contraintes avec les méthodes de gradient, mais à chaque itération, comme

$$x_{k+1} = x_k - \rho_k \nabla J(x_k)$$

     il n'est pas certain que $x_{k+1} \in K$
  2. projection sur K à chaque étape : on **projète** x_{k+1} sur K à chaque étape.

Algorithme

Algorithme du Gradient projeté

- Initialisation : $x_0 \in \mathbb{R}^n$,
  - $\widetilde{x}_1 = x_0 - \rho_0 \nabla J(x_0)$ où ρ_0 éventuellement calculé par une méthode de recherche linéaire
  - $x_1 = P_K(\widetilde{x}_1)$
- tant que $\|x_{k+1} - x_k\| >$ tolérance
  - $\widetilde{x}_{k+1} = x_k - \rho_k \nabla J(x_k)$ où ρ_k éventuellement calculé par une méthode de recherche linéaire
  - $x_{k+1} = P_K(\widetilde{x}_{k+1})$

Convergence

- **Théorème :**

  si J est $\mathcal{C}^1$, α-convexe, de gradient M-lipschitzienne et si $\rho_k \in [\beta_1, \beta_2]$ avec $0 < \beta_1 < \beta_2 < \dfrac{2\alpha}{M^2}$ alors l'algorithme du gradient projeté converge.

- **Remarques :**
  - Seule (mais importante) difficulté de la méthode : trouver l'opérateur de projection sur K qui peut être difficile à déterminer si K est compliqué.
  - Test d'arrêt : ne pas prendre `while` $\nabla J(x_k) >$ tolérance car $\nabla J(x^*) = 0$ n'est plus une condition nécessaire d'optimalité quand il y a des contraintes.

II. Méthode de pénalisation

Principe

- **Outil :** Fonctions de pénalisation.
- **Principe :**
  1. Remplacement du problème avec contraintes par un problème sans contraintes en intégrant les contraintes $x \in K$ dans une fonctionnelle J_ϵ,
  2. la fonction J_ϵ devient d'autant plus grande que les contraintes ne sont pas respectées,
  3. on minimise J_ϵ sur $\mathbb{R}^n$ par les méthodes de minimisation de problèmes sans contraintes.

Exemple théorique

- **Solution naive :**
  - On définit
    $$\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in K \\ \\ +\infty & \text{si } x \notin K \end{cases}$$
    Le problème
    $$(\mathcal{P}') : \quad \min_{x\in\mathbb{R}^n} J(x) + \alpha(x)$$
    est un problème d'optimisation sans contraintes.
  - $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont équivalents (même solutions).
- **Solutions réalistes :** utiliser une fonction α régulière ($\mathcal{C}^1$ au moins) petite sur K et grande en dehors.

Remarques

On considère le problème de minimisation suivant :

$$(\mathcal{P}_\epsilon) \quad \min_{x \in \mathbb{R}^n} J(x) + \frac{1}{\epsilon}\alpha(x)$$

Si α n'est même pas continue, les algorithmes vus précédemment pour les problèmes sans contraintes ne sont pas applicables $\Rightarrow$ on doit alors modifier la fonction α.

Principe de la pénalisation extérieure :

- le terme $\frac{1}{\epsilon}\alpha(x)$ ne joue un rôle qu'à l'extérieur de l'ensemble des solutions admissibles.
- On s'approche du minimum du problème $(\mathcal{P})$ venant de *"l'extérieur"*.

Conditions sur le choix de la fonction α :

1. α suffisamment régulier
2. $\alpha(x) = 0$ ssi $x \in K$
3. $\alpha(x) \geq 0$

Ainsi, quand ϵ devient petit, un minimum x_ϵ de J_ϵ va avoir tendance à rendre α petit et donc proche de 0, c'est-à-dire que x_ϵ sera presque dans K.

Exemples de la fonction α :

- Contraintes $x \leq 0$: $\alpha(x) = \|\max(0, x)\|^2$
- Contrainte $f(x) = 0$: $\alpha(x) = \|f(x)\|^2$
- Contraintes $g(x) \leq 0$: $\alpha(x) = \|\max(0, g(x))\|^2$

Inconvénient : on ne peut pas garantir que $x_\epsilon \in K$

Principe de la pénalisation intérieure :

- introduire le terme $\frac{1}{\epsilon}\alpha(x)$ qui tend vers l'infini lorsque x s'approche de la frontière δK de l'ensemble des contraintes K.
- créer une "barrière" au bord de l'ensemble admissible et on s'approche du minimum du problème $(\mathcal{P})$ de "*l'intérieur*".

Conditions sur le choix de la fonction α :

- α continue sur K°
- $x \notin K \Rightarrow \alpha(x) = \infty$

Exemples de la fonction α :

- Contraintes $g(x) \leq 0$: $\alpha(x) = -\sum_{j=1}^{q} \log(-g_j(x))$

Avantage : Le point $\mathbf{x}_\epsilon \in K^\circ$.

Algorithme de pénalisation

Algorithme de Pénalisation

1. Initialisation : $k = 1$, choix de $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\epsilon^{(}1) > 0$
2. Iteration k : tant que le critère d'arrêt n'est pas satisfait :
   - Résoudre le sous problème

$$(\mathcal{P}_{\epsilon^{(k)}}) : \quad \min_{x \in \mathbb{R}^n} J(x) + \frac{1}{\epsilon^{(k)}} \alpha(x)$$

     - Choisir un algorithme d'optimisation sans contrainte,
     - initialiser avec x_{k-1} (solution approchée du sous-problème $(\mathcal{P}_{\epsilon^{(k-1)}})$),
     - noter le minimum de $(\mathcal{P}_{\epsilon^{(k)}})$ par x_k.
   - $k \leftarrow k+1$, poser $\epsilon^{(k+1)} = \dfrac{\epsilon^{(k-1)}}{2}$

Bibliographie :

- Introduction à l'optimisation, Jean Christophe Culioli, ellipses,1994.
- Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation PG. CIARLET MASSON 1990
- Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation Albert Tarantola SIAM 2005.
- Convexité et optimisation Guy Cohen Ecole Nationale des Ponts et Chaussées et INRIA 2000.
- Optimisation sans contraintes M. Bergounioux http ://www.univ-orleans.fr/mapmo/membres/maitine/MASTER2/FAP/optimFAP.pdf
- Introduction à l'analyse numérique http ://www.math.uvsq.fr/jaisson/ENSAE cours45.pdf
- Algorithmes d'optimisation non-linéaire sans contrainte http ://www.math.u-bordeaux1.fr/ bergmann/PDF/These/annexeC.pdf