LOGIQUE COMPUTATIONNELLE

COURS 5

MODÈLES DE HERBRAND I

Ch. Baskiotis

LAPI – EISTI

12 octobre 2009

Implication logique

On veut prouver $E \models A$ où E un ensemble des clauses et A une clause.

Implication logique

On veut prouver $E \models A$ où E un ensemble des clauses et A une clause.

$\Rightarrow E \bigcup \{\neg A\}$ insatisfiable

Implication logique

On veut prouver $E \models A$ où E un ensemble des clauses et A une clause.

$\Rightarrow E \bigcup \{\neg A\}$ insatisfiable

$\Rightarrow$ Pas d'interprétation qui est un modèle pour $E \bigcup \{\neg A\}$

Implication logique

On veut prouver $E \models A$ où E un ensemble des clauses et A une clause.

$\Rightarrow E \bigcup \{\neg A\}$ insatisfiable

$\Rightarrow$ Pas d'interprétation qui est un modèle pour $E \bigcup \{\neg A\}$

$\Rightarrow E \bigcup \{\neg A\}$ On a un espace de recherche potentiellement infini.

Les raisons de la cause

Pourquoi ce qu'il était possible en calcul des propositions, n'est plus possible en calcul des prédicats ?

Les raisons de la cause

Pourquoi ce qu'il était possible en calcul des propositions, n'est plus possible en calcul des prédicats ?

Parce que on a introduit les variables !

Première idée : retour aux sources

Puisque les variables nous embêtent, supprimons-les, dixit Löwenheim en 1915.

Première idée : retour aux sources

Puisque les variables nous embêtent, supprimons-les, dixit Löwenheim en 1915.

Il remplaçait les variables par des constantes.

Première idée : retour aux sources

Puisque les variables nous embêtent, supprimons-les, dixit Löwenheim en 1915.

Il remplaçait les variables par des constantes.

Problème : Il fallait tester toutes les combinaisons des constantes.

Un peu d'ordre ...

Herbrand regardant le maquis des combinaisons des constantes, a eu l'idée de mettre de l'ordre.

Un peu d'ordre ...

Herbrand regardant le maquis des combinaisons des constantes, a eu l'idée de mettre de l'ordre.

Faisons donc dans le grand, le grandiose, le démesuré, à un mot, l'infini !

Un peu d'ordre ...

Herbrand regardant le maquis des combinaisons des constantes, a eu l'idée de mettre de l'ordre.

Faisons donc dans le grand, le grandiose, le démesuré, à un mot, l'infini !

Prenons toutes les constantes, absolument toutes

Un peu d'ordre ...

Herbrand regardant le maquis des combinaisons des constantes, a eu l'idée de mettre de l'ordre.

Faisons donc dans le grand, le grandiose, le démesuré, à un mot, l'infini !

Prenons toutes les constantes, absolument toutes

mais en les organisant.

Univers d'Herbrand

$\mathcal{L}$ un langage et E ensemble des clauses sur $\mathcal{L}$.

Univers d'Herbrand

$\mathcal{L}$ un langage et E ensemble des clauses sur $\mathcal{L}$.

Univers de Herbrand $\mathcal{U}_E$ construit en étapes :

Univers d'Herbrand

$\mathcal{L}$ un langage et E ensemble des clauses sur $\mathcal{L}$.

Univers de Herbrand $\mathcal{U}_E$ construit en étapes :

Étape 1 On place dans $\mathcal{U}_E$ les constantes

Univers d'Herbrand

$\mathcal{L}$ un langage et E ensemble des clauses sur $\mathcal{L}$.

Univers de Herbrand $\mathcal{U}_E$ construit en étapes :

Étape 1 On place dans $\mathcal{U}_E$ les constantes

Étape 2 On place dans $\mathcal{U}_E$ les foncteurs avec arguments les éléments de l'étape précédente (les constantes)

Univers d'Herbrand

$\mathcal{L}$ un langage et E ensemble des clauses sur $\mathcal{L}$.

Univers de Herbrand $\mathcal{U}_E$ construit en étapes :

Étape 1 On place dans $\mathcal{U}_E$ les constantes

Étape 2 On place dans $\mathcal{U}_E$ les foncteurs avec arguments les éléments de l'étape précédente (les constantes)

Étape 3 On place dans $\mathcal{U}_E$ les foncteurs avec arguments les éléments de l'étape précédente

Univers d'Herbrand

$\mathcal{L}$ un langage et E ensemble des clauses sur $\mathcal{L}$.

Univers de Herbrand $\mathcal{U}_E$ construit en étapes :

Étape 1 On place dans $\mathcal{U}_E$ les constantes

Étape 2 On place dans $\mathcal{U}_E$ les foncteurs avec arguments les éléments de l'étape précédente (les constantes)

Étape 3 On place dans $\mathcal{U}_E$ les foncteurs avec arguments les éléments de l'étape précédente

Étape 4 et suivantes On place dans $\mathcal{U}_E$ . . .

Base d'Herbrand

Base de Herbrand $\mathcal{B}_E$ construit comme suit :

Base d'Herbrand

Base de Herbrand $\mathcal{B}_E$ construit comme suit :

On place dans $\mathcal{B}_E$ tous les prédicats de E avec comme arguments les éléments de $\mathcal{U}_E$.

Base d'Herbrand

Base de Herbrand $\mathcal{B}_E$ construit comme suit :

On place dans $\mathcal{B}_E$ tous les prédicats de E avec comme arguments les éléments de $\mathcal{U}_E$.

Conclusion :

- ***L'univers de Herbrand contient tous les termes filtrés que nous pouvons construire à partir de*** E

Base d'Herbrand

Base de Herbrand $\mathcal{B}_E$ construit comme suit :

On place dans $\mathcal{B}_E$ tous les prédicats de E avec comme arguments les éléments de $\mathcal{U}_E$.

Conclusion :

- ***L'univers de Herbrand contient tous les termes filtrés que nous pouvons construire à partir de*** E
- ***La base de Herbrand contient tous les prédicats filtrés issus de*** E.

Exemple

$$E = \left\{ \begin{array}{l} p(a) \leftarrow \\ p(f(X)) \leftarrow p(X) \end{array} \right\}$$

Exemple

$$E = \left\{ \begin{array}{l} p(a) \leftarrow \\ p(f(X)) \leftarrow p(X) \end{array} \right\}$$

$\mathcal{U}_E = \{a,$

Exemple

$$E = \left\{ \begin{array}{l} p(a) \leftarrow \\ p(f(X)) \leftarrow p(X) \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{U}_E = \{a, f(a),$$

Exemple

$$E = \left\{ \begin{array}{l} p(a) \leftarrow \\ p(f(X)) \leftarrow p(X) \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{U}_E = \{a, f(a), f(f(a)),$$

Exemple

$$E = \left\{ \begin{array}{l} p(a) \leftarrow \\ p(f(X)) \leftarrow p(X) \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{U}_E = \{a, f(a), f(f(a)), f(f(fa))), \ldots\}$$

Exemple

$$E = \left\{ \begin{array}{l} p(a) \leftarrow \\ p(f(X)) \leftarrow p(X) \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{U}_E = \{a, f(a), f(f(a)), f(f(fa))), \ldots\} = \\ \{f^n(a) \mid n \geq 0\}$$

Exemple

$$E = \left\{ \begin{array}{l} p(a) \leftarrow \\ p(f(X)) \leftarrow p(X) \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{U}_E = \{a, f(a), f(f(a)), f(f(fa))), \ldots\} = \\ \{f^n(a) \mid n \geq 0\}$$

$$\mathcal{B}_E = \{p(a),$$

Exemple

$$E = \left\{ \begin{array}{l} p(a) \leftarrow \\ p(f(X)) \leftarrow p(X) \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{U}_E = \{a, f(a), f(f(a)), f(f(fa))), \ldots\} = \\ \{f^n(a) \mid n \geq 0\}$$

$$\mathcal{B}_E = \{p(a), p(f(a)),$$

Exemple

$$E = \left\{ \begin{array}{l} p(a) \leftarrow \\ p(f(X)) \leftarrow p(X) \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{U}_E = \{a, f(a), f(f(a)), f(f(fa))), \ldots\} = \\ \{f^n(a) \mid n \geq 0\}$$

$$\mathcal{B}_E = \{p(a), p(f(a)), p(f(f(a))), \ldots\}$$

Exemple

$$E = \left\{ \begin{array}{l} p(a) \leftarrow \\ p(f(X)) \leftarrow p(X) \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_E = \{a, f(a), f(f(a)), f(f(fa))), \ldots\} = \\ \{f^n(a) \mid n \geq 0\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_E = \{p(a), p(f(a)), p(f(f(a))), \ldots\} = \\ \{p(f^n(a)) \mid n \geq 0\} \end{aligned}$$

Exemple

$$E = \left\{ \begin{array}{l} p(a) \leftarrow \\ p(f(X)) \leftarrow p(X) \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{U}_E = \{a, f(a), f(f(a)), f(f(fa))), \ldots\} = \\ \{f^n(a) \mid n \geq 0\}$$

$$\mathcal{B}_E = \{p(a), p(f(a)), p(f(f(a))), \ldots\} = \\ \{p(f^n(a)) \mid n \geq 0\}$$

NB. S'il y a un foncteur dans E, l'univers et la base de Herbrand sont des ensembles infinis.

L'astuce : interprétation de Herbrand

L'interprétation I_E ***de Herbrand*** de l'ensemble E utilise comme univers du discours ... l'univers de Herbrand.

L'astuce : interprétation de Herbrand

L'interprétation I_E ***de Herbrand*** de l'ensemble E utilise comme univers du discours ... l'univers de Herbrand. Pour une interprétation fixée on n' a qu'à chercher parmi les prédicats de la base de Herbrand ceux qui retournent la valeur "vraie" pour cette interprétation et fabriquer ainsi un modèle.

L'astuce : interprétation de Herbrand

L'interprétation* I_E *de Herbrand de l'ensemble E utilise comme univers du discours ... l'univers de Herbrand. Pour une interprétation fixée on n' a qu'à chercher parmi les prédicats de la base de Herbrand ceux qui retournent la valeur "vraie" pour cette interprétation et fabriquer ainsi un modèle.

Donc au lieu de chercher on ne sait pas où pour construire un modèle, on peut piocher dans la base de Herbrand !

Théorème de base

THÉORÈME : ***Si** I'_E **est un modèle pour l'ensemble des clauses** E**, alors*** $\left\{ B \in \mathcal{B}_E \middle/ \models_{I'_E} B \right\}$ ***est un modèle de Herbrand pour*** E.

Théorème de base

THÉORÈME : ***Si I'_E est un modèle pour l'ensemble des clauses E, alors $\left\{ B \in \mathcal{B}_E \middle/ \models_{I'_E} B \right\}$ est un modèle de Herbrand pour E.***

$\Rightarrow$ On peut associer des interprétations de Herbrand avec des sous-ensembles de la base de Herbrand et obtenir un modèle de Herbrand.

Où on découvre pourquoi les clauses c'est important

Où on découvre pourquoi les clauses c'est important

PROPOSITION : ***Si un ensemble des clauses est satisfiable, alors il est un modèle de Herbrand.***

Où on découvre pourquoi les clauses c'est important

PROPOSITION : ***Si un ensemble des clauses est satisfiable, alors il est un modèle de Herbrand.***

Mieux encore

PROPOSITION : ***Si un ensemble des clauses n'a pas de modèle de Herbrand, alors il est insatisfiable.***

Modèle minimal de Herbrand

On a vu que tout modèle de Herbrand de l'ensemble des clauses E est un sous-ensemble de la base de Herbrand $\mathcal{B}_E$.

Modèle minimal de Herbrand

On a vu que tout modèle de Herbrand de l'ensemble des clauses E est un sous-ensemble de la base de Herbrand $\mathcal{B}_E$.

$\Rightarrow$ La base de Herbrand est un modèle de Herbrand de E.

Modèle minimal de Herbrand

On a vu que tout modèle de Herbrand de l'ensemble des clauses E est un sous-ensemble de la base de Herbrand $\mathcal{B}_E$.

$\Rightarrow$ La base de Herbrand est un modèle de Herbrand de E.

$$\Rightarrow \widetilde{I}_E = \bigcap_{I_i \in \mathcal{B}_E} I_i$$

est le ***modèle minimal de Herbrand*** pour E.

La programmation enfin dévoilée

THÉORÈME : *Le modèle minimal de Herbrand $\widetilde{I}_E$ d'un programme défini E est l'ensemble de toutes les conséquences logiques filtrées :*

$$\widetilde{I}_E = \{A \in \mathcal{B}_E \,/\, E \models A\}$$

La programmation enfin dévoilée

THÉORÈME : ***Le modèle minimal de Herbrand $\widetilde{I}_E$ d'un programme défini E est l'ensemble de toutes les conséquences logiques filtrées :***

$$\widetilde{I}_E = \{A \in \mathcal{B}_E \,/\, E \models A\}$$

- Le modèle minimal est une interprétation du programme E.

La programmation enfin dévoilée

Théorème : ***Le modèle minimal de Herbrand $\widetilde{I}_E$ d'un programme défini E est l'ensemble de toutes les conséquences logiques filtrées :***

$$\widetilde{I}_E = \{A \in \mathcal{B}_E \,/\, E \models A\}$$

• Le modèle minimal est une interprétation du programme E.

• Le modèle minimal contient les clauses qui sont vérifiées pour chaque modèle de E.

La programmation enfin dévoilée

THÉORÈME : ***Le modèle minimal de Herbrand $\widetilde{I}_E$ d'un programme défini E est l'ensemble de toutes les conséquences logiques filtrées :***

$$\widetilde{I}_E = \{A \in \mathcal{B}_E \,/\, E \models A\}$$

- Le modèle minimal est une interprétation du programme E.
- Le modèle minimal contient les clauses qui sont vérifiées pour chaque modèle de E.
- Tout ce que un programme peut faire se trouve dans le modèle minimal et vice-versa.

À la recherche du modèle minimal I

Le modèle minimal, malgré son nom, le plus souvent il est infini.

À la recherche du modèle minimal I

Le modèle minimal, malgré son nom, le plus souvent il est infini.
$\Longrightarrow$ Il faut se donner une méthode pour le construire.

À la recherche du modèle minimal I

Le modèle minimal, malgré son nom, le plus souvent il est infini.
$\Rightarrow$ Il faut se donner une méthode pour le construire.

Première idée : On va travailler avec des prédicats filtrés.

À la recherche du modèle minimal I

Le modèle minimal, malgré son nom, le plus souvent il est infini.
$\Rightarrow$ Il faut se donner une méthode pour le construire.

Première idée : On va travailler avec des prédicats filtrés.

$\Rightarrow$ On utilisera des ***substitutions filtrantes*** σ_f, c-à-d tq si A une clause, alors $A \circ \sigma_f$ est une clause filtrée.

À la recherche du modèle minimal II

Deuxième idée : Utiliser un opérateur ad hoc.

À la recherche du modèle minimal II

Deuxième idée : Utiliser un opérateur ad hoc.

$\Rightarrow$ ***Opérateur de la conséquence immédiate***

$\mathcal{T}_E : \mathcal{P}\left(\mathcal{B}_E\right) \longrightarrow \mathcal{P}\left(\mathcal{B}_E\right)$

À la recherche du modèle minimal II

Deuxième idée : Utiliser un opérateur ad hoc.

$\Rightarrow$ ***Opérateur de la conséquence immédiate***

$\mathcal{T}_E : \mathcal{P}\left(\mathcal{B}_E\right) \longrightarrow \mathcal{P}\left(\mathcal{B}_E\right)$

$$\mathcal{P}\left(\mathcal{B}_E\right) \ni \mathcal{I} \mapsto \mathcal{T}_E\left(\mathcal{I}\right) = \ \{A \circ \sigma_f \,/ A \circ \sigma_f \leftarrow B_1 \circ \sigma_f, \ldots, B_n \circ \sigma_f$$

À la recherche du modèle minimal II

Deuxième idée : Utiliser un opérateur ad hoc.
$\Rightarrow$ ***Opérateur de la conséquence immédiate***
$\mathcal{T}_E : \mathcal{P}\left(\mathcal{B}_E\right) \longrightarrow \mathcal{P}\left(\mathcal{B}_E\right)$

$$\mathcal{P}\left(\mathcal{B}_E\right) \ni \mathcal{I} \mapsto \mathcal{T}_E\left(\mathcal{I}\right) = \begin{array}{l} \{A \circ \sigma_f \,/ A \circ \sigma_f \leftarrow B_1 \circ \sigma_f, \ldots, B_n \circ \sigma_f \\ \quad \text{où } \left(A \leftarrow B_1, \ldots, B_n\right) \in E \end{array}$$

À la recherche du modèle minimal II

Deuxième idée : Utiliser un opérateur ad hoc.

$\Rightarrow$ ***Opérateur de la conséquence immédiate***

$\mathcal{T}_E : \mathcal{P}(\mathcal{B}_E) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{B}_E)$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\mathcal{B}_E) \ni \mathcal{I} \mapsto \mathcal{T}_E(\mathcal{I}) = \;& \{A \circ \sigma_f \,/\, A \circ \sigma_f \leftarrow B_1 \circ \sigma_f, \ldots, B_n \circ \sigma_f \\ & \text{ où } (A \leftarrow B_1, \ldots, B_n) \in E \\ & \text{et } \{B_1 \circ \sigma_f, \ldots, B_n \circ \sigma_f\} \subseteq \mathcal{I}\} \end{aligned}$$

À la recherche du modèle minimal III

Propriétés :

Monotonicité : $\mathcal{I}' \subseteq \mathcal{I} \Rightarrow \mathcal{T}_E(\mathcal{I}') \subseteq \mathcal{T}_E(\mathcal{I})$.

À la recherche du modèle minimal III

Propriétés :

Monotonicité : $\mathcal{I}' \subseteq \mathcal{I} \Rightarrow \mathcal{T}_E(\mathcal{I}') \subseteq \mathcal{T}_E(\mathcal{I})$.

Continuité : $\mathcal{I} \in \mathcal{P}(\mathcal{B}_E)$ tel que $\sup(\mathcal{I}) \in \mathcal{I} \Rightarrow \mathcal{T}_E(\sup(\mathcal{I})) = \sup(\mathcal{T}_E(\mathcal{I}))$.

À la recherche du modèle minimal III

Propriétés :

Monotonicité : $\mathcal{I}' \subseteq \mathcal{I} \Rightarrow \mathcal{T}_E(\mathcal{I}') \subseteq \mathcal{T}_E(\mathcal{I})$.

Continuité : $\mathcal{I} \in \mathcal{P}(\mathcal{B}_E)$ tel que $\sup(\mathcal{I}) \in \mathcal{I} \Rightarrow \mathcal{T}_E(\sup(\mathcal{I})) = \sup(\mathcal{T}_E(\mathcal{I}))$.

Modèle : L'interprétation de Herbrand $\mathcal{I}$ est un modèle de Herbrand ssi $\mathcal{T}_E(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{I}$.

À la recherche du modèle minimal IV

Exemple : $E = \left\{ \begin{array}{l} p(f(X)) \leftarrow q(X, g(X)), \\ q(a, g(b)) \leftarrow\ ,\ \ q(b, g(b)) \leftarrow \end{array} \right\}$

et l'interprétation $I = \{q(a, g(a))\}$.

À la recherche du modèle minimal IV

Exemple : $E = \left\{ \begin{array}{ll} p(f(X)) \leftarrow q(X, g(X)), & \\ q(a, g(b)) \leftarrow \ , \ \ q(b, g(b)) \leftarrow \end{array} \right\}$

et l'interprétation $I = \{q(a, g(a))\}$.

Alors $\mathcal{T}_E\,(I) = \{q(a, g(a)), p(f(a))\}$

À la recherche du modèle minimal IV

Exemple : $E = \left\{ \begin{array}{ll} p(f(X)) \leftarrow q(X, g(X)), & \\ q(a, g(b)) \leftarrow \ , & q(b, g(b)) \leftarrow \end{array} \right\}$

et l'interprétation $I = \{q(a, g(a))\}$.

Alors $\mathcal{T}_E\,(I) = \{q(a, g(a)), p(f(a))\}$

car si $\sigma_f = (X/a)\,,$

alors on a $p(f(X)) \circ \sigma_f \leftarrow q(X, g(X)) \circ \sigma_f$,

À la recherche du modèle minimal IV

Exemple : $E = \left\{ \begin{array}{l} p(f(X)) \leftarrow q(X, g(X)), \\ q(a, g(b)) \leftarrow \ , \ \ q(b, g(b)) \leftarrow \end{array} \right\}$

et l'interprétation $I = \{q(a, g(a))\}$.

Alors $\mathcal{T}_E(I) = \{q(a, g(a)), p(f(a))\}$

car si $\sigma_f = (X/a)$,

alors on a $p(f(X)) \circ \sigma_f \leftarrow q(X, g(X)) \circ \sigma_f$,

avec $q(X, g(X)) \circ \sigma_f = q(a, g(a)) \in I$

et $p(f(X)) \circ \sigma_f = p(f(a))$.

À la recherche du modèle minimal V

THÉORÈME (Caractérisation du modèle minimal de Herbrand)
Pour tout programme défini E, le modèle minimal de Herbrand $\widetilde{I}_E$ est un point fixe pour l'opérateur de la conséquence immédiate :

$$\mathcal{T}_E\left(\widetilde{I}_E\right) = \widetilde{I}_E$$

À la recherche du modèle minimal VI

Pb.- Comment construire $\widetilde{I}_E$?

À la recherche du modèle minimal VI

Pb.- **Comment construire** $\widetilde{I}_E$?

Il s'agit d'un ensemble en général infini

À la recherche du modèle minimal VI

Pb.- **Comment construire** $\widetilde{I}_E$?

Il s'agit d'un ensemble en général infini

$\Longrightarrow$ Il faut utiliser

– les puissances ordinales de $\mathcal{T}_E$;

À la recherche du modèle minimal VI

Pb.- **Comment construire** $\widetilde{I}_E$?

Il s'agit d'un ensemble en général infini

$\Longrightarrow$ Il faut utiliser

– les puissances ordinales de $\mathcal{T}_E$;

– l'induction transfinie (à la Peano) ;

À la recherche du modèle minimal VI

Pb.- **Comment construire** $\widetilde{I}_E$?

Il s'agit d'un ensemble en général infini

$\Rightarrow$ Il faut utiliser

- les puissances ordinales de $\mathcal{T}_E$;
- l'induction transfinie (à la Peano) ;
- la recursion transfinie.

Rappel : nombres ordinaux

- $0 = \emptyset$

Rappel : nombres ordinaux

- $0 = \emptyset$
- $1 = \{\emptyset\} = \{0\}$

Rappel : nombres ordinaux

- $0 = \emptyset$
- $1 = \{\emptyset\} = \{0\}$
- $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{0, 1\}$

Rappel : nombres ordinaux

- $0 = \emptyset$
- $1 = \{\emptyset\} = \{0\}$
- $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{0, 1\}$
- $3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{0, 1, 2\}$

Rappel : nombres ordinaux

- $0 = \emptyset$
- $1 = \{\emptyset\} = \{0\}$
- $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{0, 1\}$
- $3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{0, 1, 2\}$
- $\dots \dots$

Rappel : nombres ordinaux

- $0 = \emptyset$
- $1 = \{\emptyset\} = \{0\}$
- $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{0, 1\}$
- $3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{0, 1, 2\}$
- $\ldots \; \ldots$
- $\omega = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ldots\} = \{0, 1, 2, \ldots\}$

Rappel : nombres ordinaux

- $0 = \emptyset$
- $1 = \{\emptyset\} = \{0\}$
- $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{0, 1\}$
- $3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{0, 1, 2\}$
- $\ldots \; \ldots$
- $\omega = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ldots\} = \{0, 1, 2, \ldots\}$
- $\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\}$

Rappel : nombres ordinaux

- $0 = \emptyset$
- $1 = \{\emptyset\} = \{0\}$
- $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{0, 1\}$
- $3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{0, 1, 2\}$
- $\ldots \ \ldots$
- $\omega = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ldots\} = \{0, 1, 2, \ldots\}$
- $\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\}$
- $\omega + 2 = (\omega + 1) + 1$

Rappel : nombres ordinaux

- $0 = \emptyset$
- $1 = \{\emptyset\} = \{0\}$
- $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{0, 1\}$
- $3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{0, 1, 2\}$
- $\ldots \ \ldots$
- $\omega = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ldots\} = \{0, 1, 2, \ldots\}$
- $\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\}$
- $\omega + 2 = (\omega + 1) + 1$
- $\ldots \ \ldots$

À la recherche du modèle minimal VII

Construction du modèle minimal

À la recherche du modèle minimal VII

Construction du modèle minimal

– $\mathcal{T}_E \uparrow 0 = \emptyset$

À la recherche du modèle minimal VII

Construction du modèle minimal

- $\mathcal{T}_E \uparrow 0 = \emptyset$
- $\mathcal{T}_E \uparrow 1 = \mathcal{T}_E\,(\mathcal{T}_E \uparrow 0)$

À la recherche du modèle minimal VII

Construction du modèle minimal

- $\mathcal{T}_E \uparrow 0 = \emptyset$
- $\mathcal{T}_E \uparrow 1 = \mathcal{T}_E(\mathcal{T}_E \uparrow 0)$
- $\cdots\ \cdots$

À la recherche du modèle minimal VII

Construction du modèle minimal

- $\mathcal{T}_E \uparrow 0 = \emptyset$
- $\mathcal{T}_E \uparrow 1 = \mathcal{T}_E(\mathcal{T}_E \uparrow 0)$
- $\cdots \; \cdots$
- $\mathcal{T}_E \uparrow (\alpha + 1) = \mathcal{T}_E(\mathcal{T}_E(\alpha))$ si $\alpha + 1$ est l'ordinal successeur de α, i.e. si $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$

À la recherche du modèle minimal VII

Construction du modèle minimal

– $\mathcal{T}_E \uparrow 0 = \emptyset$
– $\mathcal{T}_E \uparrow 1 = \mathcal{T}_E(\mathcal{T}_E \uparrow 0)$
– $\cdots \; \cdots$
– $\mathcal{T}_E \uparrow (\alpha + 1) = \mathcal{T}_E(\mathcal{T}_E(\alpha))$ si $\alpha + 1$ est l'ordinal successeur de α, i.e. si $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$
– $\mathcal{T}_E \uparrow \omega = \bigcup \{\mathcal{T}_E \uparrow \alpha / \alpha < \omega\}$

Le modèle minimal.

$$\widetilde{\mathcal{I}}_E = \mathcal{T}_E \uparrow \omega$$

.