LOGIQUE COMPUTATIONNELLE

COURS 2

CALCUL PROPOSITIONNEL II

Ch. Baskiotis

LAPI – EISTI

21 septembre 2009

Ce qu'on sait

– Atomes : $a, b, \ldots$

Ce qu'on sait

- Atomes : $a, b, \ldots$
- Propositions : $V_p = \{p, q, \ldots\}$

Ce qu'on sait

- Atomes : $a, b, \ldots$
- Propositions : $V_p = \{p, q, \ldots\}$
- Constantes : $\Xi = \{a, b, \ldots\}$

Ce qu'on sait

- Atomes : $a, b, \ldots$
- Propositions : $V_p = \{p, q, \ldots\}$
- Constantes : $\Xi = \{a, b, \ldots\}$
- Connecteurs : $L = \{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

Ce qu'on sait

- Atomes : $a, b, \ldots$
- Propositions : $V_p = \{p, q, \ldots\}$
- Constantes : $\Xi = \{a, b, \ldots\}$
- Connecteurs : $L = \{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
- (Séparateurs : (,), [,]) Éléments extra-logiques

Ce qu'on sait

- Atomes : $a, b, \ldots$
- Propositions : $V_p = \{p, q, \ldots\}$
- Constantes : $\Xi = \{a, b, \ldots\}$
- Connecteurs : $L = \{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
- (Séparateurs : (,), [,]) Éléments extra-logiques
- Formules bien formées (fbf) : Construite à partir des atomes et des propositions

Ce qu'on sait

- Atomes : $a, b, \ldots$
- Propositions : $V_p = \{p, q, \ldots\}$
- Constantes : $\Xi = \{a, b, \ldots\}$
- Connecteurs : $L = \{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
- (Séparateurs : (,), [,]) Éléments extra-logiques
- Formules bien formées (fbf) : Construite à partir des atomes et des propositions
- ***Alphabet*** $\Sigma_0 = \{V_p, \Xi, L\}$

Ce qu'on sait

- Atomes : $a, b, \ldots$
- Propositions : $V_p = \{p, q, \ldots\}$
- Constantes : $\Xi = \{a, b, \ldots\}$
- Connecteurs : $L = \{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
- (Séparateurs : (,), [,]) Éléments extra-logiques
- Formules bien formées (fbf) : Construite à partir des atomes et des propositions
- ***Alphabet*** $\Sigma_0 = \{V_p, \Xi, L\}$
- ***Plus petit ensemble des fbf*** F_0.

Ce qu'on sait

- Atomes : $a, b, \ldots$
- Propositions : $V_p = \{p, q, \ldots\}$
- Constantes : $\Xi = \{a, b, \ldots\}$
- Connecteurs : $L = \{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
- (Séparateurs : (,), [,]) Éléments extra-logiques
- Formules bien formées (fbf) : Construite à partir des atomes et des propositions
- ***Alphabet*** $\Sigma_0 = \{V_p, \Xi, L\}$
- ***Plus petit ensemble des fbf*** F_0.
- ***Langage formel d'ordre zéro*** $\mathcal{L}_0 = \{\Sigma_0, F_0\}$

Évaluation sémantique

Évaluation sémantique

Donner un sens aux fbf

Évaluation sémantique

Donner un sens aux fbf

$\Longrightarrow$ Connaître leur valeur de vérité.

Évaluation sémantique

Donner un sens aux fbf

$\Rightarrow$ Connaître leur valeur de vérité.

$\Rightarrow$ Tables de vérité.

Évaluation sémantique

Donner un sens aux fbf

$\Rightarrow$ Connaître leur valeur de vérité.

$\Rightarrow$ Tables de vérité.

Exemple : "***Le nombre 25 est un carré parfait***" est une proposition qui concerne la sémantique du nombre 25.

Satisfiabilité – Modèles

A fbf, I interprétation

A est ***satisfiable*** par I

Satisfiabilité – Modèles

A fbf, I interprétation

A est ***satisfiable*** par I

$\Rightarrow$ A est une ***conséquence sémantique*** de I

Satisfiabilité – Modèles

A fbf, I interprétation

A est ***satisfiable*** par I

$\Rightarrow$ A est une ***conséquence sémantique*** de I

$\Rightarrow$ si A prend la valeur « vraie » pour I

Satisfiabilité – Modèles

A fbf, I interprétation

A est ***satisfiable*** par I

$\Rightarrow$ A est une ***conséquence sémantique*** de I

$\Rightarrow$ si A prend la valeur « vraie » pour I

$\Rightarrow$ I est un ***modèle*** pour A.

$\Rightarrow$ Notation : $I \models A$

Définitions

A et B deux fbf.

– A est une ***tautologie*** $\Rightarrow$ A satisfiable par toute interprétation.

Définitions

A et B deux fbf.

- A est une ***tautologie*** $\Rightarrow$ A satisfiable par toute interprétation.
- A est ***falsifiable*** $\Rightarrow$ il y a au moins une interprétation qui ne la satisfait pas.

Définitions

A et B deux fbf.

- A est une ***tautologie*** $\Rightarrow$ A satisfiable par toute interprétation.
- A est ***falsifiable*** $\Rightarrow$ il y a au moins une interprétation qui ne la satisfait pas.
- A est ***insatisfiable*** $\Rightarrow$ il n'y a pas d'interprétation qui la satisfait.

Définitions

A et B deux fbf.

– A est une ***tautologie*** $\Rightarrow$ A satisfiable par toute interprétation.

– A est ***falsifiable*** $\Rightarrow$ il y a au moins une interprétation qui ne la satisfait pas.

– A est ***insatisfiable*** $\Rightarrow$ il n'y a pas d'interprétation qui la satisfait.

– A et B sont ***équivalentes*** (notation $A \equiv B$) ssi $A \leftrightarrow B$ est une tautologie.

En somme

Trois éléments essentiels :

– Le langage formel d'ordre zéro $\mathcal{L}_0 = \{\Sigma_0, F_0\}$.

En somme

Trois éléments essentiels :

– Le langage formel d'ordre zéro $\mathcal{L}_0 = \{\Sigma_0, F_0\}$.

– Les modèles d'une fbf $A \Rightarrow$ *Interprétations* qui rendent satisfiable A.

En somme

Trois éléments essentiels :

– Le langage formel d'ordre zéro $\mathcal{L}_0 = \{\Sigma_0, F_0\}$.

– Les modèles d'une fbf $A \Rightarrow$ *Interprétations* qui rendent satisfiable A.

– Conséquence sémantique $E \models A$ où E ensemble des fbf $\equiv$ conséquence logique fondée sur la satisfiabilité des fbf par des interprétations.

Évaluation syntaxique

Procédé mécanique

Évaluation syntaxique

Procédé mécanique

Fondé sur

– des axiomes ;

Évaluation syntaxique

Procédé mécanique

Fondé sur

- des axiomes ;
- des règles d'inférence

Évaluation syntaxique

Procédé mécanique

Fondé sur

- des axiomes ;
- des règles d'inférence

Établit la cohérence sémantique d'une fbf.

Évaluation syntaxique

Procédé mécanique

Fondé sur

- des axiomes ;
- des règles d'inférence

Établit la cohérence sémantique d'une fbf. $\Longrightarrow$ Méthodologie de démonstration

Évaluation syntaxique

Procédé mécanique

Fondé sur

– des axiomes ;
– des règles d'inférence

Établit la cohérence sémantique d'une fbf. $\Rightarrow$ Méthodologie de démonstration

Exemple : "***Le nombre 25 a deux chiffres***" est une proposition qui concerne la syntaxe du nombre 25.

Théorème

Une fbf A est un ***théorème*** si

– A est un axiome ;

Théorème

Une fbf A est un ***théorème*** si

– A est un axiome ;

– A est obtenu par application de la règle d'inférence sur d'autres théorèmes

Axiomes

A1 Introduction de l'implication

$$A \to (B \to A)$$

Axiomes

A1 Introduction de l'implication

$$A \longrightarrow (B \longrightarrow A)$$

A2 Distributivité de l'implication

$$(A \longrightarrow (B \longrightarrow C)) \longrightarrow ((A \longrightarrow B) \longrightarrow (A \longrightarrow C))$$

Axiomes

A1 Introduction de l'implication

$$A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

A2 Distributivité de l'implication

$$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

A3 Négation

$$(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow B)$$

Règle d'inférence

Modus ponens

$$\frac{\vdash A, \vdash A \rightarrow B}{\vdash B}$$

Système de déduction

Le couple

$$\mathcal{S} = (\mathcal{A}, \mathcal{R})$$

Système de déduction

Le couple

$$\mathcal{S} = (\mathcal{A}, \mathcal{R})$$

où

- $\mathcal{A}$ est un ensemble d'axiomes ;

Système de déduction

Le couple

$$\mathcal{S} = (\mathcal{A}, \mathcal{R})$$

où

- $\mathcal{A}$ est un ensemble d'axiomes ;
- $\mathcal{R}$ est un ensemble des règles d'inférence

Système de déduction

Le couple

$$\mathcal{S} = (\mathcal{A}, \mathcal{R})$$

où

- $\mathcal{A}$ est un ensemble d'axiomes ;
- $\mathcal{R}$ est un ensemble des règles d'inférence

s'appelle ***système de déduction*** ou ***système d'inférence***.

Théorie

Une ***théorie*** $\mathbf{T}$ est la donnée

– d'un système de déduction,

Théorie

Une ***théorie*** $\mathbf{T}$ est la donnée

– d'un système de déduction, et
– de tous les théorèmes qui peuvent être obtenus par le système de déduction.

Démonstration

La ***démonstration*** d'un théorème A dans une théorie T est une suite finie

$$(A_1, A_2, \ldots, A_n, A)$$

Démonstration

La ***démonstration*** d'un théorème A dans une théorie T est une suite finie

$$(A_1, A_2, \ldots, A_n, A)$$

où chaque A_i est

– soit un axiome ;

Démonstration

La ***démonstration*** d'un théorème A dans une théorie T est une suite finie

$$(A_1, A_2, \ldots, A_n, A)$$

où chaque A_i est

- soit un axiome ;
- soit le résultat dune règle d'inférence appliquée sur les éléments A_j précédemment obtenus (c-à-d $j < i$).

Démonstration

La ***démonstration*** d'un théorème A dans une théorie T est une suite finie

$$(A_1, A_2, \ldots, A_n, A)$$

où chaque A_i est

- soit un axiome ;
- soit le résultat dune règle d'inférence appliquée sur les éléments A_j précédemment obtenus (c-à-d $j < i$).

$\Rightarrow$ la démonstration est un procédé mécanisable.

La TGI (Très Grande Idée)

S'occuper de la
sémantique d'une fbf

La TGI (Très Grande Idée)

$$\begin{array}{l}\text{S'occuper de la}\\ \text{sémantique d'une fbf}\end{array} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{compliqué}\\ \text{fbf ambiguë}\end{array}\right.$$

La TGI (Très Grande Idée)

$$\begin{array}{l}\text{S'occuper de la}\\ \text{sémantique d'une fbf}\end{array} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{compliqué}\\ \text{fbf ambiguë}\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\ \text{Pénible à faire}\right.$$

La TGI (Très Grande Idée)

$$\begin{array}{l}\text{S'occuper de la}\\ \text{sémantique d'une fbf}\end{array} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{compliqué}\\ \text{fbf ambiguë}\end{array}\right. \Rightarrow \left\{ \text{Pénible à faire}\right.$$

S'occuper de la
syntaxe d'une fbf

La TGI (Très Grande Idée)

$$\begin{array}{l}\text{S'occuper de la}\\ \text{sémantique d'une fbf}\end{array} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{compliqué}\\ \text{fbf ambiguë}\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\ \text{Pénible à faire}\right.$$

$$\begin{array}{l}\text{S'occuper de la}\\ \text{syntaxe d'une fbf}\end{array} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{compliqué}\\ \text{mécanisable}\end{array}\right.$$

La TGI (Très Grande Idée)

$$\begin{array}{l}\text{S'occuper de la}\\ \text{sémantique d'une fbf}\end{array} \Rightarrow \begin{cases}\text{compliqué}\\ \text{fbf ambiguë}\end{cases} \Rightarrow \left\{\ \text{Pénible à faire}\right.$$

$$\begin{array}{l}\text{S'occuper de la}\\ \text{syntaxe d'une fbf}\end{array} \Rightarrow \begin{cases}\text{compliqué}\\ \text{mécanisable}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\text{Cool !}\\ \text{C'est la machine}\\ \text{qui travaille}\end{cases}$$

Oui, mais ...

Les résultats de l'interprétation sémantique doivent s'accorder avec les résultats de la démonstration syntaxique et vice versa.

Oui, mais ...

Les résultats de l'interprétation sémantique doivent s'accorder avec les résultats de la démonstration syntaxique et vice versa.

Logique adéquate

$\Rightarrow$ Tout théorème $\vdash A$ est une tautologie $\models A$

Oui, mais ...

Les résultats de l'interprétation sémantique doivent s'accorder avec les résultats de la démonstration syntaxique et vice versa.

Logique adéquate

$\Rightarrow$ Tout théorème $\vdash A$ est une tautologie $\models A$

Logique complète (faiblement)

$\Rightarrow$ Toute tautologie $\models A$ est un théorème $\vdash A$

Oui, mais ...

Les résultats de l'interprétation sémantique doivent s'accorder avec les résultats de la démonstration syntaxique et vice versa.

Logique adéquate

$\Rightarrow$ Tout théorème $\vdash A$ est une tautologie $\models A$

Logique complète (faiblement)

$\Rightarrow$ Toute tautologie $\models A$ est un théorème $\vdash A$

Logique syntaxiquement consistante

$\Rightarrow$ Il n'existe pas une fbf tq $\vdash (A \wedge \neg A)$

Le secret dévoilé

Il y a équivalence des concepts sémantiques et syntaxiques pour les logiques

– pour la logique d'ordre 0 ;

Le secret dévoilé

Il y a équivalence des concepts sémantiques et syntaxiques pour les logiques

– pour la logique d'ordre 0 ;
– pour la logique d'ordre 1,

Le secret dévoilé

Il y a équivalence des concepts sémantiques et syntaxiques pour les logiques

– pour la logique d'ordre 0 ;
– pour la logique d'ordre 1, et
– pour quelques autres logiques encore ...

Le secret dévoilé

Il y a équivalence des concepts sémantiques et syntaxiques pour les logiques

- pour la logique d'ordre 0 ;
- pour la logique d'ordre 1, et
- pour quelques autres logiques encore ...

Il y a deux façons pour décider que $E \vdash A$:

1. ***Model checking*** : $M \vdash A$ pour $\forall M$ modèle de E.

Le secret dévoilé

Il y a équivalence des concepts sémantiques et syntaxiques pour les logiques

– pour la logique d'ordre 0 ;
– pour la logique d'ordre 1, et
– pour quelques autres logiques encore ...

Il y a deux façons pour décider que $E \vdash A$:

1. ***Model checking*** : $M \vdash A$ pour $\forall M$ modèle de E.
2. ***Démonstration*** : Montrer que $E \vdash A$ dans un système de démonstration donné.

Quelques théorèmes

THÉORÈME 1 : $\vdash A \;\Leftrightarrow\; \models A$

Quelques théorèmes

Théorème 1 : $\vdash A \Leftrightarrow \models A$

Théorème 2 (de la réfutation) : Soient

- une fbf A, et
- un ensemble E des fbf.

Quelques théorèmes

THÉORÈME 1 : $\vdash A \Leftrightarrow \models A$

THÉORÈME 2 (de la réfutation) : Soient

- une fbf A, et
- un ensemble E des fbf.

On a $E \models A$ ssi $E \bigvee (\neg A)$ est insatisfiable, c'est-à-dire a comme conséquence la fbf fausse $\perp$.

Quelques théorèmes

THÉORÈME 1 : $\vdash A \Leftrightarrow \models A$

THÉORÈME 2 (de la réfutation) : Soient

– une fbf A, et

– un ensemble E des fbf.

On a $E \models A$ ssi $E \bigvee (\neg A)$ est insatisfiable, c'est-à-dire a comme conséquence la fbf fausse $\perp$.

Conséquence : Vérification de la validité d'un ensemble des fbf $\Rightarrow$ preuve de son incosistance.

Quelques théorèmes

Théorème 1 : $\vdash A \Leftrightarrow \models A$

Théorème 2 (de la réfutation) : Soient

– une fbf A, et

– un ensemble E des fbf.

On a $E \models A$ ssi $E \bigvee (\neg A)$ est insatisfiable, c'est-à-dire a comme conséquence la fbf fausse $\perp$.

Conséquence : Vérification de la validité d'un ensemble des fbf $\Rightarrow$ preuve de son incosistance.

(Pour les autres théorèmes se reporter au poly, pp. 33-35)

Preuve par réfutation

Problème : Montrer $E \models A$.

Preuve par réfutation

Problème : Montrer $E \models A$.

Solution :

1. On incorpore dans l'ensemble E la fbf $\neg A$.

Preuve par réfutation

Problème : Montrer $E \models A$.

Solution :

1. On incorpore dans l'ensemble E la fbf $\neg A$.
2. On démontre, en utilisant les axiomes de la logique d'ordre 0 et le modus ponens, que l'ensemble $E \bigcup \{\neg A\}$ est insatisfiable.

Preuve par réfutation

Problème : Montrer $E \models A$.

Solution :

1. On incorpore dans l'ensemble E la fbf $\neg A$.
2. On démontre, en utilisant les axiomes de la logique d'ordre 0 et le modus ponens, que l'ensemble $E \bigcup \{\neg A\}$ est insatisfiable.
3. On établit ainsi que $E \models A$.

Preuve par réfutation

Problème : Montrer $E \models A$.

Solution :

1. On incorpore dans l'ensemble E la fbf $\neg A$.
2. On démontre, en utilisant les axiomes de la logique d'ordre 0 et le modus ponens, que l'ensemble $E \bigcup \{\neg A\}$ est insatisfiable.
3. On établit ainsi que $E \models A$.

N.B. *La preuve par réfutation en logique est l'équivalent de la démonstration par contre-exemple en mathématique.*