École Internationale des Sciences de Traitement de l'Information

ING2 Spécialisation **"Génie Mathématique"**

Orientations **SNHP-IAD**

Analyse Fonctionnelle. Espaces de Hilbert

Notes de cours. Version préliminaire.

par **Anya Désilles**

Année scolaire 2010/2011

L'étude des mathématiques est comme le Nil, qui commence en modestie et finit en magnificence.
Charles Caleb Colton

L'essence des mathématiques, c'est la liberté.
Georg Cantor

En mathématiques, on ne comprend pas les choses, on s'y habitue.
John von Neumann

Table des matières

Bibliographie

[1] J.-P. Aubin. *Analyse fonctionnelle appliquée, Tome 1.* Presses universitaires de France, 1979.

[2] D.H. Griffel. *Applied Functional Analysis.* Dover Publications, Inc, 1981.

[3] J-M. Rakotoson J-E. Rakotoson. *Analyse fonctionnelle appliquées aux équations aux dérivées partielles.* Presses universitaires de France, 1999.

[4] W. Rudin. *Functional analysis.*

[5] A.H. Zemanian. *Distribution theory and transform analysis.* Dover Publications, Inc, 1965.

Chapitre 1

Espaces de Hilbert. Définitions et généralités

Dans ce chapitre nous allons rappeler quelques notions essentielles de topologie générale. Nous allons énoncer les définitions et les propriétés directement dans le contexte des espaces vectoriels munis d'une distance, le plus souvent induite par une norme. Pour plus de détails sur la topologie générale ou peut consulter les notes de cours d'analyse de première année ingénieur de Marietta Manolessou.

1 Espaces vectoriels et applications. Rappels.

Définition 1.1 (Espace vectoriel)**.** On appelle **espace vectoriel** sur $\mathbb{R}$ (respectivement sur $\mathbb{C}$) un triplet $(E, +, \cdot)$ représentant un ensemble E muni d'une loi de composition interne $'+'$ et d'une loi de composition externe $\cdot$, vérifiant les propriétés suivantes :

1. $(E, +)$ est un groupe commutatif, c'est-à-dire
   (a) la loi $'+'$ est associative, commutative
   (b) possède un élément neutre, noté 0
   (c) tout élément de E est symmétrisable : $\forall x \in E, \quad \exists x\prime \in E, \quad \text{t.q.} \quad x + x\prime = 0$
2. la loi de composition externe vérifie les propriété
   (a) $\forall x \in E, \quad 1 \cdot x = x$, où 1 est l'élément neutre du corps (ici $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)
   (b) $\forall x \in E, \ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \ (x \cdot \lambda) \cdot \mu = x \cdot (\lambda\mu)$
   (c) $\forall (x, y) \in E^2, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$
   (d) $\forall x \in E, \ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \ x \cdot (\lambda + \mu) = x \cdot \lambda + x \cdot \mu$

On appelle les éléments de l'ensemble E **vecteurs** et les éléments du corps $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) **scalaires**.

Exemple 1.1. Voici quelques exemples des espaces vectoriels que nous allons rencontrer le plus souvent dans ce cours :
- $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$. Ici les vecteurs sont les n-uplets de nombres réels ou complexes respectivement.
- L'espace $M_n^p(\mathbb{R})$ de matrices $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{R}$.
- $\mathcal{F}(R)$ l'ensemble de toutes les fonctions réelles
- $C^k[a, b]$, l'ensemble de fonctions k fois continûment dérivables sur un intervalle $[a, b]$.

Définition 1.2 (Application)**.** Soient X et Y deux ensembles. On appelle **application** de X vers Y et on note $T : X \to Y$ la donnée d'une correspondance qui à tout élément $x \in X$ associe un unique élément $y \in Y$, noté Tx ou $T(x)$ et appelé image de x par T.

On appelle les ensembles X et Y respectivement ensembles de départ et d'arrivée de l'application.

On appelle **image** de T l'ensemble $I = T(X) = \{y \in Y \mid \exists x \in X,\ T(x) = y\}$.

Définition 1.3 (Application linéaire)**.** Soient E et F deux espaces vectoriels. On appelle **application linéaire** de E vers F toute application $f : E \to F$ qui vérifie les propriétés :

1. $\forall (x, y) \in E^2, \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$;
2. $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

2 Distances. Normes.

Définition 1.4 (Distance)**.** Soit X un ensemble. On appelle **distance** sur X toute application $d : X \times X \to \mathbb{R}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

1. $d(x, y) \geq 0, \quad d(x, y) = 0 \ \Leftrightarrow\ x = y$
2. $\forall x, y, \quad d(x, y) = d(y, x)$
3. $\forall x, y, z, \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Exemple 1.2.

1. La distance euclidienne dans $\mathbb{R}^n$ est définie par : $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}$
2. Dans $B[a, b]$, l'ensemble de fonctions bornées sur un intervalle donné, on définit une distance par :
$$d(f, g) = \sup_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)|$$
3. Dans $C[a, b]$, la distance entre deux fonctions peut être définie comme :
$$d(f, g) = \int_a^b |f(t) - g(t)| dt$$

Définition 1.5 (Norme)**.** Soit E un espace vectoriel. On appelle norme sur E toute application de E vers $\mathbb{R}$ qui vérifie :

1. $\forall x \in E,\ \|x\| \geq 0$ et $\|x\| = 0 \quad \Leftrightarrow\ x = 0$
2. $\forall x \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
3. $\forall (x, y) \in E^2, \quad \|x - y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Exemple 1.3. Voici quelques exemples de normes définies dans différents espaces vectoriels

- Dans $C[a,b]$
$$\|f\|_\infty = \max_{[a,b]} |f(x)|$$
- Dans $C[a,b]$
$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|dt$$
- Dans $L^p[a,b]$
$$\|f\|_p = \sqrt[p]{\int_a^b |f(t)|^p dt}$$

Proposition 1.1 (Distance induite par une norme)**.** *Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel. Si $\|\cdot\|$ est une norme sur E alors*
$$d(x,y) = \|x-y\|$$
définit une distance sur E. On l'appelle distance induite par la norme.

Définition 1.6 (Distances équivalentes)**.** On dit que deux distances d_1 et d_2 définies sur le même ensemble X sont équivalentes ssi
$$\exists \alpha > 0, \beta > 0, \quad \forall (x,y) \in X^2, \quad \alpha d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq \beta d_1(x,y)$$

Définition 1.7 (Normes équivalentes)**.** On dit que deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ définies sur le même espace E sont équivalentes ssi
$$\exists \alpha > 0, \beta > 0, \quad \forall x \in E, \quad \alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1$$

3 Topologie des espaces métriques

Définition 1.8 (Boule ouverte)**.** On appelle boule ouverte de centre $a \in X$ et de rayon $r > 0$ l'ensemble suivant
$$B(a,r) = \{x \in X, \quad d(x,a) < r\}$$

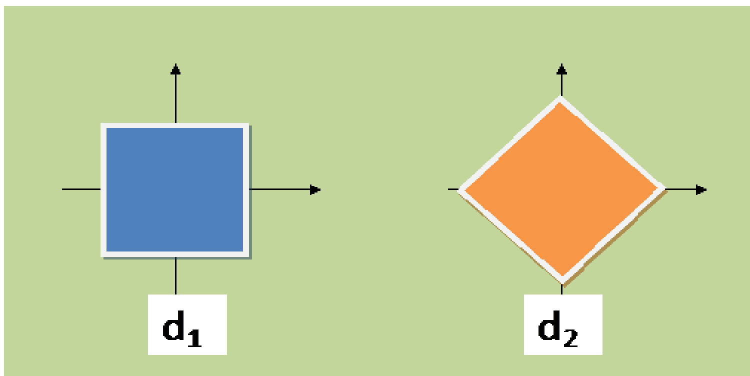
Définition 1.9 (Boule fermée)**.** On appelle boule fermée de centre $a \in X$ et de rayon $r > 0$ l'ensemble suivant

$$B_f(a,r) = \{x \in X, \quad d(x,a) \leq r\}$$

Exemple 1.4. Voici deux distances dans $\mathbb{R}^2$:

$$d_1(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|, \quad d_2(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

et les boules unité centrées en zéro associées



Définition 1.10 (Ensemble ouvert)**.** Une partie $A \subset X$ est un ouvert ssi

$$\forall a \in A, \quad \exists r > 0, \quad B(a,r) \subset A$$

Définition 1.11 (Ensemble fermé)**.** Une partie $F \subset X$ est un fermé ssi son complémentaire est un ouvert.

Définition 1.12 (Partie bornée)**.** On dit qu'une partie $U \subset X$ est bornée ssi

$$\exists x_0 \in X, \ \exists r > 0, \quad U \subset B(x_0, r)$$

Définition 1.13. Soit $x \in X$. On appelle voisinage de x toute partie $V \subset X$ telle que $\exists r > 0, \quad B(x,r) \subset V$.

Définition 1.14. Soit $A \subset X, \quad x \in X$. On dit que

1. x est un point adhérent de A ssi pour tout voisinage de x V on a $V \cap A \neq \emptyset$
2. x est un point d'accumulation de A ssi pour tout voisinage de x V on a $(V \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$
3. $x \in A$ est un point isolé de A ssi il existe un voisinage de x, V, tel que $A \cap V = \{x\}$

Définition 1.15. On appelle adhérence de $A \subset X$ l'ensemble $\overline{A}$ de tous ses points adhérents.

Proposition 1.2 (propriétés d'adhérence)**.** *1.* $\forall A \subset X, \; A \subset \overline{A}$

2. $F \subset X$ *est un fermé ssi* $F = \overline{F}$

Définition 1.16. On dit que $A \subset X$ est dense dans X ssi $\bar{A} = X$.

Définition 1.17. On appelle intérieur de $A \subset X$ l'ensemble

$$Int(A) = \{x \in A, \quad \exists r > 0, \quad B(x, r) \subset A\}$$

4 Convergence dans les espaces métriques

Définition 1.18. Soit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments d'un espace métrique (X, d). On dit que cette suite converge vers un élément $l \in X$ ssi

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, l) = 0$$

Proposition 1.3 (Caractérisation séquentielle de l'adhérence)**.** *Soit* $A \subset X$. $x \in \bar{A}$ *ssi*

$$\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A, \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x$$

Corollaire 1.1. *Un ensemble $F \subset X$ dans un espace métrique (X, d) est fermé ssi toute suite convergente $(x_n) \subset F$ d'éléments de F converge vers un élément de F.*

Exemple 1.5 (Limite uniforme d'une suite de fonctions)**.** Soit $E = \mathcal{F}[a, b]$ l'espace de toutes les fonctions sur $[a, b]$ muni de la distance uniforme

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in [a,b]} |f(t) - g(t)|$$

Soit une suite de fonctions $(f_n) \subset \mathcal{F}[a, b]$. On dit qu'elle converge uniformément vers une fonction $f \in E$ ssi elle converge par rapport à la distance d_∞ :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\quad \forall n > N_\varepsilon \ \ d_\infty(f_n, f) < \varepsilon$$

$$d_\infty(f_n, f) < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \sup_{x \in [a,b]} |f(t) - f_n(t)| < \varepsilon \ \Leftrightarrow \ \ \forall t \in [a, b],\ |f(t) - f_n(t)| < \varepsilon$$

Ainsi, la caractérisation de la convergence uniforme d'une suite de fonctions se formule ainsi :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\quad \forall n > N_\varepsilon \ \ \forall t \in [a, b],\ |f(t) - f_n(t)| < \varepsilon$$

Définition 1.19 (Limite d'une application en un point)**.** Soient deux espaces métriques (X, d_X) et (Y, d_Y) et une application $f : X \to Y$. On dit que f admet une limite $l \in Y$ au point $x_0 \in X$ ssi

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\quad \forall x \in X,\quad (d_X(x, x_0) < \alpha \quad \Rightarrow \ d_Y(f(x), l) < \varepsilon$$

Proposition 1.4 (Caractérisation séquentielle)**.** *Dans les hypothèses de la définition ci-dessus on a* $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ *ssi*

$$\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X,\ (\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \ \Rightarrow \ \lim_{n\to\infty} f(x_n) = l)$$

5 Continuité

Définition 1.20 (Applications continues)**.** Soient deux espaces métriques (X, d_X) et (Y, d_Y) et une application $f : X \to Y$. On dit que f est continue au point $x_0 \in X$ ssi

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\quad \forall x \in X,\quad (d_X(x, x_0) < \alpha \quad \Rightarrow \ d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

Autrement dit, ssi $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Proposition 1.5 (Caractérisation séquentielle)**.** *f est continue en x_0 ssi*

$$\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X,\quad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \ \Rightarrow \ \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

Définition 1.21 (Continuité globale)**.** On dit que f est continue sur une partie $K \subset X$ ssi elle est continue en tout point de K. On note $C^0(X,Y)$ l'ensemble d'applications continues de X dans Y.

Proposition 1.6 (Continuité et convergence uniforme)**.** *Soit $(f_n) \subset C^0(X,Y)$ une suite d'applications continues. Si (f_n) converge par rapport à la distance uniforme sur $C^0(X,Y)$ vers une application f alors $f \in C^0(X,Y)$.*

Théorème 1.1 (Caractérisation à l'aide d'ouverts)**.** *Soient deux espaces métriques (X, d_X) et (Y, d_Y) et une application $f : X \to Y$. Les trois assertions ci-dessous sont équivalentes :*

1. *f est continue sur X*
2. *l'image réciproque par f de tout ouvert est un ouvert*
3. *l'image réciproque par f de tout fermé est un fermé*

Définition 1.22 (Continuité uniforme)**.** Soient deux espaces métriques (X, d_X) et (Y, d_Y) et une application $f : X \to Y$. On dit que f est uniformément continue sur X ssi

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha_\varepsilon > 0,\ \ \forall (x,y) \in X^2,\ \ (d_X(x,y) < \alpha \ \ \Rightarrow\ d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Définition 1.23 (Fonction Lipschitzienne)**.** Soient deux espaces métriques (X, d_X) et (Y, d_Y) et une application $f : X \to Y$. On dit que f est Lipschitzienne sur X ssi

$$\exists K > 0,\ \forall (x,y) \in X^2,\ \ d_Y(f(x), f(y)) < K d(x,y)$$

6 Espaces complets.

6.1 Définitions

Définition 1.24 (Suites de Cauchy)**.** On dit qu'une suite (x_n) d'éléments d'un espace métrique (X, d) est de Cauchy ssi

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall m, n \geq N,\ \ d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Proposition 1.7. *Toute suite de Cauchy est bornée*

Preuve de Proposition 1.7

Choisissons un $\varepsilon > 0$. D'après la définition, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que au-delà de ce rang, tous les éléments de la suite se trouve dans une boule de rayon ε centrée en x_N :

$$\forall m > N,\ d(x_N, x_m) < \varepsilon$$

Donc l'ensemble d'éléments de la suite $\{x_m,\ m \geq N\}$ est borné. Les éléments restants de la suite forment un ensemble fini et donc borné lui aussi. Ainsi toute la suite se trouve être réunion de deux ensembles bornés. On en déduit que la suite est bornée.
C.Q.F.D

Proposition 1.8. *Toute suite qui converge est de Cauchy.*

Remarque 1.1. *Attention ! La réciproque est fausse !*

Définition 1.25. On dit qu'un espace métrique (X, d) est complet ssi toute suite de Cauchy converge.

Définition 1.26 (Espace de Banach)**.** On appelle espace de Banach tout espace normé complet par rapport à la distance induite par la norme.

Exemple 1.6. Voici quelques exemples d'espaces usuels complets :
- $\mathbb{R}$ muni de distance $d(x, y) = |x - y|$ est complet
- $\mathcal{L}^2[a, b]$ muni de la norme $\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}$ est complet
- $\mathbb{R}^n$ muni de distance euclidienne est complet.

Exemple 1.7. Montrons que $C[0, 1]$ muni de distance de convergence uniforme est complet. Soit $(f_n) \subset C[0, 1]$ une suite de Cauchy par rapport à la distance de convergence uniforme :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\quad \forall n, m > N_\varepsilon,\ d_\infty(f_n, f_m) = \sup_{[0,1]} |f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon$$

Tout d'abord montrons que la suite (f_n) converge simplement. En effet, de la relation précédente on déduit :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\quad \forall n, m > N_\varepsilon,\ \forall t \in [0, 1],\quad |f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon$$

Cela signifie que pour tout $t \in [0, 1]$ la suite de réels $(f_n(t))$ est de Cauchy. Comme $\mathbb{R}$ est complet, la suite $(f_n(t))$ converge. Notons $f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t)$. Ainsi la suite de fonctions $f_n(t)$ converge simplement vers la fonction $f(t)$. Montrons que cette convergence est en réalité uniforme.

Reprenons la définition de la suite de Cauchy, formulée de façon différente :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\quad \forall n > N_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N},\ \sup_{[0,1]} |f_n(t) - f_{n+p}(t)| < \varepsilon$$

Soient $t \in [0, 1]$ et $n > N_\varepsilon$. On a

$$|f_n(t) - f(t)| \leq |f_n(t) + f_{n+p}(t)| + |f_{n+p}(t) - f(t)| \leq \varepsilon + |f_{n+p}(t) - f(t)|$$

Comme la suite $(f_n(t))$ converge simplement vers $f(t)$ on a

$$\lim_{p\to\infty} |f_{n+p}(t) - f(t)| = 0$$

Il existe alors un P suffisamment grand tel que $\forall p > P,\ |f_{n+p}(t) - f(t)| \leq \varepsilon$ Ainsi, pour tout $n > N_\varepsilon$ et pour tout $t \in [0,1]$

$$|f_n(t) - f(t)| \leq 2\varepsilon$$

et donc

$$d(f_n, f) = \sup_{[0,1]} |f_n(t) - f(t)| \leq 2\varepsilon$$

C.Q.F.D.

6.2 Propriétés générales des espaces métriques complets

Tout d'abord nous allons établir quelques propriétés relatives aux ensembles fermés dans des espaces complets.

Théorème 1.2. *Dans un espace métrique (X,d) complet les sous-espaces complets sont des fermés.*

Preuve de théorème 1.2

On utilise ici la caractérisation séquentielle d'un fermé (voir la proposition 1.3 et son corollaire).

- $\Rightarrow$ Soit $F \subset X$ un ensemble fermé dans X. Soit $(x_n) \subset F \subset X$ une suite de Cauchy d'éléments de F. Comme X est complet, la suite (x_n) converge. Et comme F est fermé, la suite (x_n) converge vers un élément de F. Donc F est complet.
- $\Leftarrow$ Soit $F \subset X$ un sous espace complet de X. Soit (x_n) une suite convergente d'éléments de F. C'est donc une suite de Cauchy et comme F est complet, elle converge vers un élément de F. Donc F est fermé.

C.Q.F.D

Théorème 1.3. *Soit un espace métrique (X,d) complet. Alors*

1. *Toute intersection d'une famille quelconque de sous-espaces complets est complète.*
2. *Toute union finie de sous-espaces complets est complète.*

6.3 Une application de complétude

Définition 1.27 (Application contractante)**.** Soient deux espaces métriques (X, d_X) et (Y, d_Y) et une application $f : X \to Y$. On dit que f est contractante sur X ssi

$$\exists 0 < \alpha < 1,\ \forall (x,y) \in X^2,\quad d(f(x), f(y)) < \alpha d(x,y)$$

Théorème 1.4 (Théorème du point fixe)**.** *Soient deux espaces métriques* (X, d_X) *et* (Y, d_Y) *et* $f : X \to Y$ *une application contractante sur* X*. Alors* f *admet un unique point fixe* $a \in X, \quad f(a) = a$*.*
De plus, $\forall x_0 \in X$ *la suite récurrente définie par* $x_{n+1} = f(x_n)$ *converge vers* a*.*

7 Compacité

7.1 Définitions

Définition 1.28 (Borel-Lebesgue)**.** Soit (X, d) un espace métrique. On dit qu'une partie $K \subset X$ est compacte ssi de tout recouvrement ouvert de K on peut extraire un sous-recouvrement fini :

$$\forall\ (O_i)_{i\in I},\ \text{tel que}\ \ K \subset \bigcup_{i\in I} O_i,\ \ \exists J \subset I,\ \ \text{tel que}\ \ J\ \text{est fini}\ \mathit{et}\ \ K \subset \bigcup_{j\in J} O_j$$

Remarque 1.2. *On dit que l'espace* (X, d) *est compact si* X *lui même est un compact par rapport à* d*.*

$$\forall\ (O_i)_{i\in I},\ \mathit{tel\ que}\ \ X = \bigcup_{i\in I} O_i,\ \ \exists J \subset I,\ \ \mathit{tel\ que}\ \ J\ \mathit{est\ fini\ et} X = \bigcup_{j\in J} O_j$$

En passant aux complémentaires on formuler une caractérisation équivalente de compacité :

Proposition 1.9. *Un espace métrique* (X, d) *est compact ssi de toute famille de fermés à intersection vide*

$$(F_i)_{i\in I},\quad t.q.\ \ \bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$$

on peut extraire une sous-famille finie à intersection vide :

$$\exists J \subset I,\ \ \mathit{tel\ que}\ \ J\ \mathit{est\ fini\ et} \bigcap_{j\in J} F_j = \emptyset$$

Remarque 1.3. ***Attention !*** ***La compacité d'un ensemble dépend de la métrique choisie !*** *Considérons par exemple l'ensemble* $A = [0, 1] \subset \mathbb{R}$*. Avec la distance euclidienne cet ensemble est compact (on y reviendra plus loin). Mais avec la métrique discrète*

$$d(x, y) = \begin{cases} 0\ \ si x = y \\ 1\ \ sinon \end{cases}$$

le même ensemble A *n'est pas compact. En effet, il est facile de voir que avec cette distance, les seules suites convergentes sont les suites stationnaires (constantes). Alors la suite* $x_n = \dfrac{1}{n}$ *ne converge pas et ne peut avoir de sous-suite convergente.*

Une autre caractérisation de compacité est souvent utilisée et peut même être donnée comme définition par certains auteurs. Il s'agit de caractérisation séquentielle de compacité.

Théorème 1.5 (Caractérisation séquentielle de compacité)**.** *Une partie $K \subset X$ dans un espace métrique (X, d) est compacte ssi de toutes suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ d'éléments de K on peut extraire une suite convergente dans K.*

Enfin, une troisième caractérisation, plus générale que la précédente, appelée "propriété de Bolzano-Weierstrasse"

Théorème 1.6 (Caractérisation de Bolzano-Weierstrasse)**.** *Une partie $K \subset X$ dans un espace métrique (X, d) est compacte ssi toute partie infinie $A \subset K$ de K admet un point d'accumulation dans K.*

7.2 Propriétés de base

Proposition 1.10. *Dans un espace métrique (X, d) tout compact est* ***complet****.*

Preuve de la Proposition 1.10

Soit $K \subset X$ un compact. Soit $(x_n) \subset K$ une suite de Cauchy d'éléments de K. Puisque K est compact, on peut extraire de (x_n) une sous-suite convergente (d'après le théorème 1.6) dont la limite $l \in K$. Or, toute suite de Cauchy qui admet une sous-suite convergente converge vers la même limite. Ainsi toute suite de Cauchy dans K converge dans K. Donc K est complet. **C.Q.F.D**

Proposition 1.11. *Dans un espace métrique (X, d) tout compact est* ***fermé****.*

Preuve de la Proposition 1.11

Soit $K \subset X$ un compact. d'après la proposition précédente K est complet. Soit $(x_n) \subset K$ une suite convergente d'éléments de K. Soit $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Toute suite convergente est une suite de Cauchy. Donc (x_n) est une suite de Cauchy. Et comme K est complet, on a $x = \lim_{n\to\infty} x_n \in K$.

C.Q.F.D

Proposition 1.12. *Dans un espace métrique (X, d) tout compact est* ***borné****.*

Preuve de la Proposition 1.12

Raisonnement par absurde. Soit $K \subset X$ un compact. Supposons que K n'est pas borné. Soit $a \in K$ un élément quelconque. Alors pour tout naturel $n \in \mathbb{N}$ il existe $x_n \in K$ tel que $d(a, x_n) > n$. On en déduit que $d(a, x_n) \to \infty, \quad n \to \infty$. Il est alors évident qu'il est impossible d'extraire une suite convergente de la suite (x_n). Ceci est contraire à la compacité de K.

C.Q.F.D

Proposition 1.13. *Dans un espace métrique (X, d) compact un ensemble $K \subset X$ est compact **ssi** il est fermé.*

Preuve de la Proposition 1.13

$\Rightarrow$ Vrai. Tout compact est un fermé, d'après la proposition 1.11.

$\Leftarrow$ Soit $K \subset X$ une partie fermée d'un espace métrique compact. Soit $(x_n) \subset K$ une suite d'éléments de K. Puisque $K \subset X$ et que X est compact, il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergente dans X. Mais comme K est un fermé, la sous-suite extraite converge dans K.

C.Q.F.D

Théorème 1.7 (Hein-Borel-Lebesgue)**.** *Tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ est compact par rapport à la distance euclidienne.*

Corollaire 1.2. *Tous les compacts de $\mathbb{R}$ sont fermés et bornés.*

Théorème 1.8 (Union, intersection)**.**
1. *Dans un espace métrique (X, d) toute union finie de compacts est un compact.*
2. *Dans un espace métrique (X, d) toute intersection de compacts est un compact.*

Théorème 1.9 (Tychonoff)**.** *Le produit d'espaces topologiques compacts est espace compact.*

Corollaire 1.3. *Une partie $K \subset \mathbb{R}^n$ de $\mathbb{R}^n$ muni de distance $\max\limits_{1 \le i \le n} |x_i - y_i|$ est compacte ssi elle fermée et bornée.*

Proposition 1.14. *Tout espace métrique compact admet une partie dénombrable dense.*

7.3 Applications continues et compacts

Théorème 1.10 (Image continue d'un compact)**.** *Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques. Alors l'image d'un compact par une application continue de X vers Y est un compact.*

La démonstration est basée sur la caractérisation de continuité par les images réciproques d'ouverts (voir théorème 1.1) et sur les propriétés de base d'images et d'images réciproques. En particulier, rappelons que

$$\begin{cases} \forall A \subset X, \quad A \subset f^{-1}(f(A)) \\ \forall A \subset X, \forall B \subset X, \quad (A \subset B \;\Rightarrow f(A) \subset f(B)) \\ \forall A \subset X, \forall B \subset X, \quad f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B) \\ \forall C \subset Y, \quad f(f^{-1}(C)) \subset C \\ \forall C \subset Y, \forall D \subset Y, \quad (C \subset D \;\Rightarrow f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)) \\ \forall C \subset Y, \forall D \subset Y, \quad f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \end{cases}$$

Preuve de Théorème 1.10

Soient $f : X \to Y$ une application continue et $K \subset X$ un compact. Considérons un recouvrement d'ouverts de l'image $f(K)$. Soit $(O_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de Y telle que

$$f(K) \subset \bigcup_{i \in I} O_i$$

Alors, en utilisant les propriétés des images réciproques on a

$$K \subset f^{-1}(f(K)) \subset f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} O_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(O_i)$$

Comme l'application f est continue, l'image réciproque de tout ouvert de Y par f est un ouvert dans X. Ainsi on a obtenu un recouvrement d'ouverts de K :

$$K \subset \bigcup_{i \in I} f^{-1}(O_i)$$

Comme K est un compact, d'après la caractérisation de Borel-Lebesgue (voir la définition 1.28), il est possible d'extraire un sous-recouvrement fini de K :

$$\exists J \subset I, \quad \text{t.q.} \quad J \text{ est fini et } \quad K \subset \bigcup_{j \in J} f^{-1}(O_j)$$

il ne nous reste qu'à revenir dans l'espace des images :

$$f(K) \subset f\left(\bigcup_{j \in J} f^{-1}(O_j)\right) = \bigcup_{j \in J} f\left(f^{-1}(O_j)\right) \subset \bigcup_{j \in J} O_j$$

Nous avons ainsi obtenu un sous-recouvrement fini de $f(K)$ par des ouverts. Donc $f(K)$ est compact. **C.Q.F.D**

Théorème 1.11 (Prolongement d'une application continue). *Soient (X, d_X) un espace métrique et (Y, d_Y) un espace métrique complet. Soit $A \subset X$ une partie dense dans X. Alors pour toute application $f : A \to Y$ uniformément continue sur A il existe une unique application continue $g : X \to Y$ qui prolonge f sur X :*

$$\forall x \in A, \quad f(x) = g(x)$$

De plus, ce prolongement est uniformément continu.

7.4 Compacité dans les espaces normés. Théorème de Riesz

Nous avons déjà établi (propositions 1.11 et 1.12) que tout ensemble compact est fermé et borné. Nous allons maintenant montrer que la réciproque est fausse en général.

Il existe néanmoins des espaces dans lesquels la réciproque est vraie. En particulier, le corollaire 1.3 stipule que dans $\mathbb{R}^n$ tout ensemble fermé et borné est compact. Le théorème de Riesz que nous allons démontrer dans cette partie du cours montre que cette propriété est spécifique aux **espaces de dimension finie** et devint donc fausse dans un espace de dimension infinie.

Nous commençons par rappeler quelques faits concernant les espaces normés de dimension finie, utiles à la démonstration du théorème de Riesz.

Lemme 1.1 (Compacité de la boule unité en dimension finie). *Soit (E) un espace vectoriel de dimension finie n. Soit $(e_i)_{i=1}^n$ une base de E. On associe à cette base la norme*

$$\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$$

Alors la boule unité fermée $B_f(0,1)$ est un compact par rapport à la distance induite par cette norme.

Preuve de Lemme 1.1

Nous savons déjà qu'une boule fermée unité dans $\mathbb{R}^n$ est un compact (car ensemble fermé et borné). Or, l'application

$$L : \mathbb{R}^n \to E, \quad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

est un homéomorphisme (application bijective continue dont la réciproque est continue). Remarquons que la boule unité $B_f(0,1)$ de E est l'image par L de la boule unité de $\mathbb{R}^n$. Alors, $B_f(0,1)$ est un compact en tant qu'image d'un compact par une application continue.

C.Q.F.D

Ce dernier lemme permet d'établir le théorème important suivant :

Théorème 1.12. *Soit E un espace de dimension finie. Alors*

1. *Toutes les normes sont équivalentes dans E.*
2. *Pour toute norme, les compacts sont les fermés bornés.*

Enfin, la proposition suivante sera utile pour la démonstration du théorème de Riesz

Proposition 1.15. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. Alors tout sous-espace $F \subset E$ de dimension finie est un fermé.*

Ainsi, dans un espace de dimension finie, quelle que soit la norme, un ensemble est compact ssi il est fermé et borné. Nous terminons le chapitre par le théorème de Riesz qui montre que cette propriété n'est plus vérifiée dans un espace de dimension infinie.

Théorème 1.13 (de Riesz)**.** *Soit E un espace vectoriel normé. La boule unité fermée $B_f(0,1)$ est compacte ssi E est de dimension finie.*

Preuve de Théorème 1.13

- $\Leftarrow$ Vrai. Cette partie de l'assertion est déjà établie sous forme de lemme 1.1.
- $\Rightarrow$ Il nous reste donc à montrer que si $B_f(0,1)$ est compacte alors E est de dimension finie. Considérons la famille de boules ouvertes $\left\{B\left(x, \frac{1}{2}\right),\ x \in B_f(0,1)\right\}$. Il est évident que

$$B_f(0,1) \subset \bigcup_{x \in B_f(0,1)} B\left(x, \frac{1}{2}\right)$$

Comme $B_f(0,1)$ est compacte il existe un sous-recouvrement fini : $\exists \{x_1, \ldots, x_n\} \subset B_f(0,1)$ tels que

$$B_f(0,1) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B\left(x_i, \frac{1}{2}\right) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_f\left(x_i, \frac{1}{2}\right)$$

Notons $F = Vect(x_1, \ldots, x_n)$ le sous-espace vectoriel engendré par la famille de vecteurs $(x_i)_{i=1}^n$. F est un sous-espace de dimension finie et donc F est fermé (voir la proposition 1.15).

Nous allons maintenant établir par récurrence l'inclusion suivante :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad B_f(0,1) \subset F + \frac{1}{2^p} B_f(0,1) \tag{1.1}$$

Tout d'abord rappelons les notations :

$$A+B = \{a+b \mid a \in A,\ b \in B\},\ \ \lambda A = \{\lambda a \mid a \in A\},\ \ \text{si } x \in E,\ \ x+A = \{x\}+A = \{x+a,\ \mid a \in A\}$$

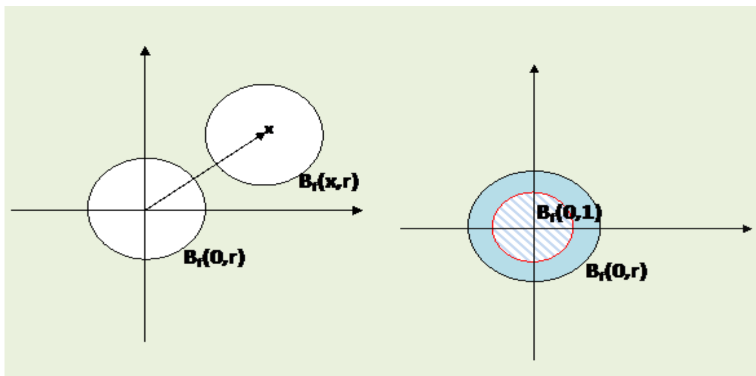
L'inclusion (1.1) signifie

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in B_f(0,1),\quad \exists y \in F,\quad \|x-y\| \leq \frac{1}{2^p}$$

$p=1$. Montrons que

$$B_f(0,1) \subset F + \frac{1}{2}B_f(0,1) \tag{1.2}$$

Pour tout $x \in\ B_f(0,1)$ on a $x \in \bigcup_{i=1}^{n} B\left(x_i, \frac{1}{2}\right)$. Donc $\exists\ 1 \leq i \leq n$ tel que $x \in B(x_i, \frac{1}{2})$. Sachant que $x_i \in F$ et que $B(y,r) = y + B(0,r)$ et $B(0,r) = rB(0,1)$ (voir la figure ci-dessous pour explications)



on a

$$x \in B(x_i, \frac{1}{2}) = x_i + \frac{1}{2}B(0,1) \subset F + \frac{1}{2}B_f(0,1)$$

$p \mapsto p+1$. Supposons que $B_f(0,1) \subset F + \frac{1}{2^p}B_f(0,1)$. Comme nous avons déjà montré, on a $B_f(0,1) \subset\ dsF + \frac{1}{2}B_f(0,1)$. Alors

$$B_f(0,1) \subset F + \frac{1}{2^p}B_f(0,1) \subset F + \frac{1}{2^p}(F + \frac{1}{2}B_f(0,1)) = (F + \frac{1}{2^p}F) + \frac{1}{2^{p+1}}B_f(0,1)$$

Comme F est un sous-espace vectoriel, on a $\forall \lambda \in \mathbb{R},\quad F + \lambda F = F$. Donc

$$B_f(0,1) \subset (F + \frac{1}{2^p}F) + \frac{1}{2^{p+1}}B_f(0,1) = F + \frac{1}{2^{p+1}}B_f(0,1)$$

Ainsi nous avons démontré par récurrence l'inclusion (1.1).
Soit $x \in B_f(0,1)$. D'après l'inclusion que l'on vient de démontrer, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ $x \in F + \frac{1}{2^p}B_f(0,1)$. Cela signifie que

$$\exists x_p \in F,\quad \exists y_p \in B_f(0,1)\quad x = x_p + \frac{1}{2^p}y_p$$

Comme

$$\|2^{-p}y_p\| = 2^{-p}\|y_p\| \leq 2^{-p} \to O,\ p \to \infty$$

on a

$$\lim_{p\to\infty} \|x_p - x\| = \lim_{p\to\infty} \|2^{-p}y_p\| = 0 \ Rightarrow \quad \lim_{p\to\infty} x_p = x$$

Ainsi, la suite (x_p) d'éléments de F converge vers l'élément $x \in B_f(0,1)$. Or, le sous espace F est de dimension finie et donc il est fermé. Donc $x \in F$ en tant que le limite d'une suite d'éléments de F.

Nous venons de montrer que

$$B_f(0,1) \subset F$$

Mais pour tout $y \in E$, $\dfrac{y}{\|y\|} \in B_f(0,1) \subset F$. Donc $y \in F$. Alors on a $E \subset F$.

Comme F est de dimension finie, E l'est aussi.

C.Q.F.D

8 Espaces de Hilbert. Rappels.

Dans cette section nous rappelons brièvement quelques faits essentiels sur les espaces préhilbertiens et de Hilbert. Pour plus de détails on peut consulter les notes de cours d'Analyse de première année ingénieur ou bien de nombreuses références disponibles sur le sujet.

8.1 Produit scalaire

Définition 1.29 (Produit scalaire)**.** On appelle produit scalaire sur un espace vectoriel **réel** ou complexe E toute forme bilinéaire définie sur $E \times E$ qui vérifie les propriétés suivantes :

1. $\forall x \in E,\ < x, x > \geq 0,$ et $< x, x >= 0 \ \Leftrightarrow \ x = 0$
2. $\forall (x, y) \in E^2,\ < x, y >= \overline{< y, x >}$
3. $\forall (x, y, z) \in E^3,\ \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ < \alpha x + \beta y, z >= \alpha < x, z > +\beta < y, z >$

Exemple 1.8. 1. Dans $\mathbb{R}^n$ le produit scalaire euclidien

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

2. Dans $L^2[a, b]$

$$< f, g >= \int_a^b f(t)g(t)dt$$

Proposition 1.16 (Propriétés de produit scalaire)**.** *1. Un produit scalaire induit une norme en posant*

$$\|x\| =< x, x >$$

2. *Inégalité de Schwarz*

$$| < x, y > |^2 \leq < x, x > \cdot < y, y >$$

Proposition 1.17 (Propriété de Pythagore)**.** *Si $x \perp y$ alors*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Proposition 1.18 (Continuité de produit scalaire)**.** *Pour tout $v \in E$ l'application $L : E \to \mathbb{R}$, définie par*

$$L(x) = < v, x >, \quad x \in E$$

est linéaire et continue. En particulier, pour toute suite convergente $(x_n) \subset E$ si $x_0 = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$ on a

$$\lim_{k\to\infty} < v, x_k > = < v, x_0 >$$

Preuve de de la Proposition 1.18

La linéarité du produit scalaire découle directement de sa définition. Il nous reste à prouver la continuité. Soient $x_0 \in E$ et $x \in E$. En utilisant l'inégalité de Schwarz on obtient

$$|L(x) - L(x_0)| = | < x - x_0, v > | \leq \|x - x_0\|\|v\|$$

Alors pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver $\delta = \dfrac{\varepsilon}{\|v\|}$ tel que pour tout $x \in B(x_0, \varepsilon)$ on a

$$|L(x) - L(x_0)| < \varepsilon$$

C.Q.F.D

8.2 Espace de Hilbert

Définition 1.30 (Espace de Hilbert)**.** Un espace de Hilbert est un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire et complet par rapport à la norme induite par ce produit scalaire.

Définition 1.31 (Espace de Hilbert séparable)**.** Un espace de Hilbert est dit séparable ssi il admet une partie dénombrable dense.

Définition 1.32 (Base orthonormée)**.** Une base orthonormée dans un espace de Hilbert est une famille dénombrable de vecteurs $\{e_n\}$ deux à deux orthogonaux : $< e_i, e_j >= \delta_{ij}$ et telle que pour tout $x \in E$ il existe une série de coefficients (c_n) tels que $x = \sum_n c_n e_n$

Proposition 1.19. *Un espace de Hilbert admet une base orthonormée ssi il est séparable*

Soit (e_n) une base orthogonale dans un espace préhilbertien H. Alors pour tout $x \in E$

$$x = \sum_n c_n e_n$$

où

$$c_n = \frac{< x, e_n >}{\|e_n\|^2}$$

1. **Bessel**

$$\sum_n |c_n|^2 \leq \|x\|^2$$

2. **Parseval.** Une famille (e_n) est une base orthonormée ssi pour tout $x \in E$

$$\sum_n |c_n|^2 = \|x\|^2$$

9 L'orthogonalité et le Théorème de meilleure approximation

La topologie induite dans un espace de Hilbert par le produit scalaire lui confère des propriété géométriques particulières qui le rapprochent des espaces euclidiens. Nous allons aborder ici une notion fondamentale pour un espace de Hilbert, l'orthogonalité. Avec cette notion vient le théorème de meilleure approximation.

Définition 1.33. Soit E un e.v. muni d'un produit scalaire $< \cdot, \cdot >$. On dit que deux vecteurs x et y sont orthogonaux et on note $x \perp y$ ssi

$$< x, y >= 0$$

Définition 1.34. Si $M \subset E$ est un ensemble on appelle **complément orthogonal** de M l'ensemble

$$M^\perp = \{y \in E,\ y \perp x,\ \forall x \in M\}$$

Définition 1.35. Un sous ensemble $M \subset E$ d'un espace de Hilbert E est un cône ssi

$$\forall \lambda \geq 0, \quad \forall x \in M, \quad \lambda x \in M$$

Définition 1.36. Soit un sous ensemble $M \subset E$ d'un espace de Hilbert E. On appelle cône polaire négatif hilbertien de M le sous-ensemble

$$M^{\ominus} = \{y \in E, \quad \text{t.q. } \langle x, y\rangle \leq 0, \quad \forall x \in M\}$$

Remarque 1.4. *Remarquons que l'ensemble*

$$-M^{\ominus} = \{y \in E, \quad t.q. \ \langle x, y\rangle \geq 0, \quad \forall x \in M\}$$

est aussi un cône. Alors le complémentaire orthogonal de M peut s'écrire comme intersection de deux cônes :

$$M^{\perp} = M^{\ominus} \cap (-M^{\ominus})$$

Nous allons établir une propriété importante du complémentaire orthogonal et du cône polaire négatif d'un ensemble M.

Proposition 1.20. *Soit un sous ensemble $M \subset E$ d'un espace de Hilbert E. Alors*
- *$M^{\ominus}$ est un cône convexe fermé.*
- *$M^{\perp}$ est un sous-espace fermé de E*

Preuve de de la Proposition 1.20

$M^{\ominus}$ **est un cône.** Soient $y \in M^{\ominus}$ et $\lambda \geq 0$ alors pour tout $x \in M$

$$< \lambda y, x >= \lambda < y, x > \leq 0$$

$M^{\ominus}$ **est convexe.** Soient $u \in M^{\ominus}$, $v \in M^{\ominus}$ et $\theta \in [0, 1]$. On cherche à montrer que $\theta u + (1-\theta)v \in M^{\ominus}$. Pour tout $x \in M$ on a

$$\langle \theta u + (1-\theta)v, x\rangle = \theta\langle u, x\rangle + (1-\theta)\langle v, x\rangle \leq 0$$

$M^{\ominus}$ **est fermé.** Soit une suite convergente d'éléments de $M^{\ominus}$: $\{u_n\} \subset M^{\ominus}$. Soit $y = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$ la limite de cette suite. On cherche à montrer que $y \in M^{\ominus}$. On utilise ici la continuité du produit scalaire. Pour tout $x \in M$ on a

$$\langle y, x\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle u_n, x\rangle \leq 0$$

car pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\langle u_n, x\rangle \leq 0$.

$M^\perp$ **est est un sous-espace vectoriel de** E Soient $u \in M^\perp$ et $v \in M^\perp$ deux vecteurs de $M^\perp$. Alors pour toute combinaisons linéaire $\alpha u+\beta v$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ de ces deux vecteurs et pour tout $x \in M$ on a

$$\langle \alpha u + \beta v, x\rangle = \alpha\langle u, x\rangle + \beta\langle v, x\rangle = 0$$

Donc

$$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall \beta \in \mathbb{R},\quad \alpha u + \beta v \in M^\perp$$

$M^\perp$ **est fermé** Nous avons remarqué dans (1.4) que

$$M^\perp = M^\ominus \cap (-M^\ominus)$$

Comme $M^\ominus$ est fermé, $-M^\ominus$ l'est aussi. Alors $M^\perp$ est fermé comme intersection de deux fermés.

C.Q.F.D

Nous allons maintenant énoncer le théorème de meilleure approximation dans un espace de Hilbert et en tirer un certain nombre de conséquences utiles.

Théorème 1.14 (Théorème de meilleure approximation)**.** *Soient E un espace de Hilbert, M un sous-ensemble de E, convexe et fermé.*

I. *Soit $x \in E$. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

- **(i)** $y \in M$ *vérifie* $\|y - x\| = \min_{y \in M} \|x - y\|$
- **(ii)** $y \in M$ *vérifie* $\langle y - x, y^* - y\rangle \leq 0,\quad \forall y \in M$

II. *Pour tout $x \in E$ il existe un unique élément noté $P_M(x) \in M$ vérifiant l'une des deux propriétés ci-dessus.*

Ce théorème est une généralisation du théorème de projection orthogonale, vu en cours d'Optimisation. Sa démonstration suit le même plan. C'est pourquoi nous l'omettons ici. Nous allons nous intéresser dans la suite à l'application qui, d'après le théorème, associe à tout $x \in E$ le point de M le plus proche.

Définition 1.37 (projecteur de meilleure approximation)**.** Soit M un ensemble convexe fermé dans un espace de Hilbert E. On appelle projecteur de meilleure approximation sur M l'application

$$P_M : E \to M,\quad P_M : x \mapsto P_M(x) \in M,\ \text{t.q}\ \|x - P_M(x)\| = \inf_{y \in M} \|x - y\|$$

L'application P_M ainsi définie n'est pas linéaire dans le cas général. Elle vérifie des propriétés suivantes :

Proposition 1.21. *Soit M un ensemble convexe fermé dans un espace de Hilbert E. Alors le projecteur P_M vérifie les propriétés :*

1. $P_M^2 = P_M$
2. P_M *est contractant :* $\forall x, y \in E,\quad \|P_M(x) - P_M(y)\| \leq \|x - y\|$
3. P_M *est monotone :* $\forall x, y \in E,\quad \langle P_M(x) - P_M(y), x - y\rangle \geq 0$

Preuve de de la Porposition 1.21

1. $P_M^2 = P_M$. Pour tout $x \in M$ on a $y = P_M(x) \in M$. Il est alors évident que $P_M(y)P_M^2(x) = y = P_M(x)$.
2. P_M est contractant : $\forall x, y \in E, \quad \|P_M(x) - P_M(y)\| \leq \|x - y\|$. D'après le point (I.ii) de théorème 1.14 on a pour tout $z \in M$

$$\langle P_M(x) - x, P_M(x) - z \rangle \leq 0$$

Or $P_M(y) \in M$ d'où

$$\langle P_M(x) - x, P_M(x) - P_M(y) \rangle \leq 0$$

Le même argument permet de montrer que

$$\langle P_M(y) - y, P_M(y) - P_M(x) \rangle \leq 0$$

On en déduit alors que

$$\langle (x - y) - (P_M(x) - P_M(y)), P_M(x) - P_M(y) \rangle \geq 0 \tag{1.3}$$

puis que

$$\langle (x - y), P_M(x) - P_M(y) \rangle \geq \|P_M(x) - P_M(y)\|^2$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on trouve :

$$\|P_M(x) - P_M(y)\|^2 \leq \|(x - y)\| \cdot \|P_M(x) - P_M(y)\|$$

3. P_M est monotone : $\forall x, y \in E, \quad \langle P_M(x) - P_M(y), x - y \rangle \geq 0$. Cette propriété est la conséquence directe de l'inégalité (1.3).

C.Q.F.D

Dans le cas particulier où M est un sous-espace vectoriel d'un espace de Hilbert et, plus généralement, dans le cas où M est un cône convexe fermé le projecteur de meilleure approximation possède une propriété d'orthogonalité établie par la proposition suivante.

Proposition 1.22. *Soit $M \subset E$ un cône convexe fermé dans un espace de Hilbert E. Alors P_M est le projecteur de meilleure approximation sur M ssi :*

$$\langle x - P_M(x), P_M(x) \rangle = 0 \tag{1.4}$$

et

$$\langle x - P_M(x), z \rangle \leq 0, \quad \forall z \in M \tag{1.5}$$

Preuve de de la Proposition 1.22

Nous allons utiliser ici la propriété (I.ii) qui définit l'opérateur de meilleure approximation dans le théorème (1.14) et montrer que quand M est un cône convexe fermé cette propriété est équivalent à (1.4) et (1.5).

$\Rightarrow$ Supposons que (1.4) et (1.5) sont vraies. Alors la propriété (I.ii) s'obtient en soustrayant (1.4) de (1.5).

$\Leftarrow$ Supposons que la propriété (I.ii) est vraie :

$$\forall z \in M, \quad \langle P_M(x) - x, P_M(x) - z \rangle \leq 0$$

Posons $z_1 = 0 \in M$ et $z_2 = 2P_M(x) \in M$ car M est un cône . Alors on a

$$\langle P_M(x) - x, P_M(x) \rangle \leq 0 \quad \text{et} \quad - \langle P_M(x) - x, P_M(x) \rangle \leq 0$$

Donc (1.4) est vrai. En tenant compte de (1.4) dans (I.ii) on obtient (1.5).

C.Q.F.D

Proposition 1.23. *Soit $M \subset E$ un sous-espace vectoriel fermé dans un espace de Hilbert E. Alors P_M est le projecteur de meilleure approximation sur M ssi :*

$$\langle x - P_M(x), z \rangle = 0, \quad \forall z \in M \tag{1.6}$$

Preuve de de la Proposition 1.23

La démonstration est analogue à celle de la proposition précédente. Nous allons utiliser ici la propriété (I.ii) qui définit l'opérateur de meilleure approximation dans le théorème (1.14).

$\Rightarrow$ Supposons que (1.6) est vrai.

$$\forall z \in M, \quad \langle P_M(x) - x, P_M(x) - z \rangle = 0$$

car on sait que $P_M(x) \in M$ et M est un sous-espace vectoriel. Donc si $z \in M$ alors $P_M(x) - z \in M$ et l'égalité ci-dessus est vérifiée en vertu de (1.6).

$\Leftarrow$ Supposons que la propriété (I.ii) est vraie :

$$\forall z \in M, \quad \langle P_M(x) - x, P_M(x) - z \rangle \leq 0$$

Posons $z_1 = 0 \in M$ et $z_2 = 2P_M(x) \in M$ car M est un cône . Alors on a

$$\langle P_M(x) - x, P_M(x) \rangle \leq 0 \quad \text{et} \quad - \langle P_M(x) - x, P_M(x) \rangle \leq 0$$

Donc

$$\langle P_M(x) - x, P_M(x) \rangle = 0$$

Pour tout autre $z \in M$ on utilise encore le fait que M est un sous-espace vectoriel. Donc $P_M(x) - z \in M$ et $z - P_M(x) \in M$. On déduit alors de (I.ii) que

$$\forall z \in M, \quad \langle P_M(x) - x, P_M(x) - z \rangle = 0$$

C.Q.F.D

Dans le cas où M est un cône convexe fermé et en particulier si M ets un sous-espace vectoriel de E on appelle P_M projecteur orthogonal sur M. Nous allons maintenant énoncer le théorème principal qui établit les propriétés des projecteurs orthogonaux sur un sous-espace vectoriel.

Théorème 1.15. *Soit M un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert E. Alors le projecteur orthogonal sur M $P = P_M$ est un opérateur linéaire et continu vérifiant les propriétés suivantes*

(i) $\forall x \in E, \quad \|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|(I-P)x\|^2$

(ii) *On notera $Q = I - P$. On a*

$$\|P_M x\| \leq \|x\|, \quad \|Qx\| \leq \|x\|$$

(iii) $M = Im(P) = Ker(Q)$ *et* $M^\perp = Im(Q) = Ker(P)$

(iv) *Pour tout $(x, y) \in E$*

$$\langle Px, y\rangle =< x, Py >$$

(v) *Pour tout $x \in E$ il existe un unique couple d'éléments (y, z) tels que*

$$y \in M,\ z \in M^\perp, \quad x = y + z,\ \text{et}\ \langle y, z\rangle = 0$$

de plus

$$y = Px, \quad z = Qy$$

Chapitre 2

Opérateurs linéaires dans les espaces de Hilbert

1 Applications linéaires dans les espaces de Banach

Rappelons d'abord la définition d'une application linéaire.

Définition 2.1 (Application linéaire)**.** Soient E et F deux espaces vectoriels. On appelle application linéaire de E vers F toute application $f : E \to F$ qui vérifie les propriétés :

1. $\forall (x,y) \in E^2, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$;
2. $\forall x \in E, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Définition 2.2 (Cas particuliers d'applications linéaires)**.** Soit E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

1. On appelle opérateur linéaire sur E toute application linéaire de E vers E.
2. On appelle fonctionnelle sur E toute application linéaire de E vers $\mathbb{R}$.

Définition 2.3 (Une application bornée)**.** Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. On dit qu'une application $T : E \to F$ est bornée ssi il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\forall x \in E, \quad \|T(x)\|_F \leq M \|x\|_E$$

Exemple 2.1. Soit $E = C[0,1]$ muni de la norme de convergence uniforme

$$\|f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f(t)|$$

Soit

$$T : C[0,1] \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto f(0)$$

Il est facile de vérifier que T est une application linéaire. Montrons que T est bornée :

$$\forall f \in C[0,1],\ |T(f)| = |f(0)| \leq \sup_{[0,1]} |f(t)| = \|f\|_\infty$$

Donc T est borné avec la constante $M = 1$.

Exemple 2.2. Soit $E = L^2[0,1]$ muni de la norme

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2 dt}$$

Soit $\phi \in C[0,1]$ une fonction continue donnée. On lui associe un opérateur sur $L^2[0,1]$:

$$[T(f)](t) = \phi(t)f(t)$$

Montrons que T est borné. Soit $f \in L^2[0,1]$.

$$\|T(f)\|_2^2 = \int_0^1 |\phi(t)f(t)|^2 dt$$

Puisque $\phi(t)$ est continue sur $[0,1]$ elle est bornée sur $[0,1]$. Notons $M = \sup_{0,1} |\phi(t)|$. On a alors $\forall t \in [0,1],\ |\phi(t)| \leq M$ et donc

$$\|T(f)\|_2^2 = \int_0^1 |\phi(t)f(t)|^2 dt \leq M^2 \int_0^1 |f(t)|^2 dt = M^2 \|f\|_2^2$$

Donc T est borné.

Exemple 2.3. Soit $E = L^2[0,1]$ muni de la norme

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2 dt}$$

Dans E soit F le sous-espace vectoriel de fonctions dérivables dont la dérivée $f' \in L^2[0,1]$. Soit

$$T : F \to E,\quad f \mapsto f'$$

Montrons que T n'est pas borné. Pour cela nous allons choisir une suite de fonctions dérivables $(f_n(t))$ telle que

$$\|f_n\|_2 \to 0,\ n \to \infty \text{ et } \|T(f_n)\|_2 = \|f_n'\|_2 \to \infty,\ n \to \infty$$

Soit

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < -\dfrac{1}{n} \\ 2(nt+1)^2 & \text{si} \quad -\frac{1}{n} \leq t < -\dfrac{1}{2n} \\ 1 - 2n^2t^2 & \text{si} \quad -\frac{1}{2n} \leq t < \dfrac{1}{2n} \\ 2(nt-1)^2 & \text{si} \quad \frac{1}{2n} \leq t < -\dfrac{1}{n} \\ 0 & \text{si} \quad \frac{1}{n} \leq t \end{cases}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \|f_n\|_2^2 &= 4\int_{-1/n}^{-1/2n}(nt+1)^4dt + \int_{-1/2n}^{1/2n}(1-2n^2t^2)^2dt + 4\int_{1/2n}^{1/n}(nt-1)^4dt \\ &= \left[\frac{4}{5n}(nt+1)^5\right]_{-1/n}^{-1/2n} + \left[t - \frac{4n^2}{3}t^3 + \frac{4n^4}{5}t^5\right]_{-1/2n}^{1/2n} + \left[\frac{4}{5n}(nt-1)^5\right]_{1/2n}^{1/n} \\ &= \frac{23}{30}\frac{1}{n} \to 0,\ n \to \infty \end{aligned}$$

Calculons la dérivée

$$T(f_n) = f_n'(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < -\dfrac{1}{n} \\ 4n(nt+1) & \text{si} \quad -\frac{1}{n} \leq t < -\dfrac{1}{2n} \\ 4n^2t & \text{si} \quad -\frac{1}{2n} \leq t < \dfrac{1}{2n} \\ 4n(nt-1) & \text{si} \quad \frac{1}{2n} \leq t < -\dfrac{1}{n} \\ 0 & \text{si} \quad \frac{1}{n} \leq t \end{cases}$$

Sa norme est alors égale à

$$\begin{aligned} \|f_n'\|_2^2 &= 16n^2\int_{-1/n}^{-1/2n}(nt+1)^2dt + 16n^4\int_{-1/2n}^{1/2n}t^2dt + 16n^2\int_{1/2n}^{1/n}(nt-1)^2dt \\ &= \left[\frac{16n^2}{3n}(nt+1)^3\right]_{-1/n}^{-1/2n} + \left[\frac{16n^4}{3}t^3\right]_{-1/2n}^{1/2n} + \left[\frac{16n^2}{3n}(nt-1)^3\right]_{1/2n}^{1/n} \\ &= \frac{8}{3}n \to \infty,\ n \to \infty \end{aligned}$$

Supposons maintenant que T est borné avec une constante M. Alors le long de cette suite de fonctions on a l'inégalité

$$\|T(f_n)\| \leq M\|f_n\|$$

Comme $\|f_n\|_2 \to 0,\ n \to \infty$ on a $\|T(f_n)\|_2 \to 0,\ n \to \infty$ ce qui est impossible car $\|T(f_n)\|_2 \to \infty,\ n \to \infty$

1.1 Continuité d'applications linéaires

Théorème 2.1. *Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Alors pour toute application linéaire $T : E \to F$ les cinq assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *T est continue sur E*
2. *T est continue en O*
3. *T est bornée*
4. *T est bornée sur la boule unité centrée en zéro*
5. *T est bornée sur la sphère unité centrée en zéro*

Remarque 2.1. *En utilisant ce théorème, très puissant, nous pouvons aussitôt conclure sur la continuité des trois applications linéaires étudiées dans les exemples 2.1, 2.2 et 2.3. En effet, dans les deux premiers exemples nous avons établi que les applications étudiée étaient bornées. Elles sont donc toutes les continues car elles sont linéaires. Dans les dernier exemple, nous avons montré que l'application dérivée n'était pas bornée. Etant linéaire, elle ne peut donc pas être continue. Ceci est un exemple important qui montre qu'**une application linéaire peut ne pas être continue.***

1.2 Espace vectoriel d'applications linéaires continues.

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. On note $L(E, F)$ l'ensemble de toutes les applications linéaires de E dans F. On note $B(E, F) \subset L(E, F)$ l'ensemble de toutes les applications linéaires continues.

Rappelons que $L(E, F)$ est un espace vectoriel et que $B(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $L(E, F)$. Lorsque les espaces de départ et d'arrivée sont normés on peut définir également une norme sur $B(E, F)$.

Définition 2.4 (Norme d'une application linéaire continue)**.** Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. Pour toute application linéaire $T \in L(E, F)$ on pose

$$\|T\| = \sup_{0<\|u\|_F\leq 1} \frac{\|Tu\|_F}{\|u\|_E} = \sup_{0<\|u\|_F} \frac{\|Tu\|_F}{\|u\|_E} = \sup_{\|u\|_F=1} \|Tu\|_F$$

Ceci définit une norme sur l'espace vectoriel $B(E, F)$.

Remarque 2.2. *C'est un bon exercice que l'on laisse aux lecteurs que de vérifier que l'expression ci-dessus définit correctement une norme.*

Voici un théorème important qui établit les conditions de complétude de $B(E,F)$:

Théorème 2.2. *Si $(E, \|.\|_E)$ est un espace de Banach et $(F, \|.\|_F)$ un espace vectoriel normé alors $B(E,F)$ est un espace de Banach.*

1.3 Théorèmes de prolongement par continuité

Nous avons déjà vu que dans le cadre d'espaces métriques il est possible de prolonger par continuité une application continue définie et uniformément continue sur un ensemble dense. Dans ce chapitre, nous travaillons avec des espaces vectoriels normés et des applications linéaires. Cela donne lieu aux théorèmes de prolongement spécifiques.

Théorème 2.3 (prolongement par continuité d'une application linéaire)**.** *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ un e.v.n. et $(F, \|\cdot\|_F)$ un espace de Banach. Soient $G \subset E$ un sous-espace vectoriel dense de E et $T \in B(G,F)$ une application linéaire continue sur G.*
Alors il existe une unique application linéaire continue sur E : $U \in B(E,F)$ qui prolonge T sur E :

$$\forall x \in G,\ U(x) = T(x)$$

De plus

$$\|U\| = \|T\|$$

Théorème 2.4. *Soit f une fonctionnelle linéaire sur $(E, \|\cdot\|_E)$. Alors f est continue ssi $Ker\ f$ est fermé.*

Corollaire 2.1. *Une forme linéaire sur un e.v.n. E est continue ssi son noyau n'est pas dense dans E.*

Chapitre 3

Dualité. Théorème de Lax-Milgramm

1 Espaces duals. Définitions et généralités.

Dans ce chapitre, pour simplifier les considérations, nous allons énoncer tous les résultats dans le cas d'espaces vectoriels réels. Les théorèmes les plus importants sont valables dans le cas d'espaces complexes.

Définition 3.1 (Fonctionnelle linéaire). Soit E un espace vectoriel normé **réel**. On appelle fonctionnelle linéaire sur E toute application linéaire de E vers $\mathbb{R}$.

Exemple 3.1. Si $E = C[0,1]$ muni de norme de convergence uniforme et si $g \in C[0,1]$ est une fonction donnée alors

$$l : E \to \mathbb{R},\ l : f \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

est une fonctionnelle linéaire

Définition 3.2 (Espace dual). Soit E un espace vectoriel. On appelle le dual de E et on note E^* l'espace vectoriel $B(E,\mathbb{R})$ de fonctionnelles linéaires continues.

Remarque 3.1 (Attention). *La continuité d'une fonctionnelle linéaire définie sur un espace vectoriel peut dépendre de la norme choisie. Par exemple, la fonctionnelle*

$$T : C[0,1] \to \mathbb{R},\ f \mapsto f(0)$$

est continue par rapport à la norme $\|\cdot\|_\infty$ de convergence uniforme mais elle ne l'est pas par rapport à la norme

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$$

1.1 Exemple des espaces L^P

Nous rappelons ici la définition des espaces L^p et de quelques propriétés importantes. On trouvera des détails dans le cours "Mesure et Intégration de Lebesgue" de Marietta Manolessou.

Définition 3.3. Soit $p > 0$. On note $L^p(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel de toutes les fonctions dont la p-ème puissance est intégrable selon Lebesgue :

$$L^p(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \text{ t.q. } \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^p dt < \infty \right\}$$

Proposition 3.1. *Pour tout $p > 0$ l'espace $L^p(\mathbb{R})$ muni de la norme*

$$\|f\|_p = \sqrt[p]{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^p dt < \infty}$$

est un espace de Banach.

Proposition 3.2 (Inégalité de Hölder). *Soient $(p, q, r) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$ tels que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$$

Si $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $g \in L^q(\mathbb{R})$ alors $f \cdot g \in L^r(\mathbb{R})$ et

$$\|f \cdot g\|_r \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

Nous allons maintenant essayer de montrer que le dual d'un espace L^p est un espace L^q avec q à déterminer.

Soient $p > 1$ et q tel que $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Soit $g \in L^q$. Alors la fonctionnelle

$$G : L^p \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t)dt < \infty$$

est bien définie, linéaire et continue. En effet, d'après l'inégalité de Hölder $f \cdot g \in L^1$ et donc l'intégrale ci-dessus a un sens. De plus,

$$\forall f \in L^p, \ |G(f)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t)dt \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)g(t)| \, dt = \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

On peut même montrer que $\|G\| = \|g\|_q$.

Ainsi, à tout $g \in L^q$ on associe une fonctionnelle linéaire continue sur L^p. La réciproque est vraie : toute fonctionnelle linéaire continue sur $\mathcal{L}^p$ est de la forme

$$G : L^p \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t)dt < \infty$$

Nous avons ainsi un résultat très important en analyse :

Proposition 3.3 (Le dual de L^p)**.** *Pour tout* $p > 1$

$$(L^p)^* = L^q$$

où $p^{-1} + q^{-1} = 1$

Remarque 3.2. *En permutant* p *et* q *on a*

$$((L^p)^*)^* = (L^q)^* = L^p$$

Remarque 3.3. *Le cas de* $p = 2$ *est particulier. En effet, on constate rapidement que si* $p = 2$ *alors* $q = 2$ *aussi pour que* $p^{-1} + q^{-1} = 1$*. Alors*

$$(L^2)^* = L^2$$

2 Dual d'un espace de Hilbert. Théorème de représentation de Riesz

Théorème 3.1 (de Riesz)**.** *Soit* H *un espace de Hilbert. Alors pour toute fonctionnelle* $L \in H^*$ *il existe* $l \in H$ *tel que*

$$\forall x \in H,\ L(x) =< l, x >$$

Preuve de de théorème ??

Soit $L \in H^*$ une fonctionnelle linéaire continue sur H. Notons

$$N = Ker(L) = \{x \in H,\ L(x) = 0\}$$

Si $N = H$ L est nulle. Il suffit alors de prendre $l = 0$.
Supposons que $N \neq H$ et montrons que $N^\perp$ est de dimension 1.
Soient $(x, y) \in N^\perp$. On cherche à montrer que x et y sont colinéaires. Comme N est un sous-espace vectoriel (c'est le noyau d'une application linéaire) on sait que $N^\perp$ est alors aussi un sous espace vectoriel. Alors pour tout $(\alpha,\ \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha x + \beta y \in N^\perp$.
On choisit $\alpha = L(y)$ et $\beta = -L(x)$. Soit

$$z = L(y)x - L(x)y \in N^\perp$$

On peut alors remarquer que

$$L(z) = L(y)L(x) - L(x)L(y) = 0 \ \Rightarrow\ z \in N$$

Ainsi on a $z = L(y)x - L(x)y \in N^\perp \cap N$. Donc $z = 0$ (voir proposition **??**, N et $N^\perp$ sont en somme directe) :

$$L(y)x = L(x)y$$

On a montré que $N^\perp$ est de dimension 1. Donc il admet une base orthonormée composée d'un seul vecteur, e. Pour tout $u \in N^\perp$ on a $u =< e, u > e$. D'après le théorème de décomposition orthogonale (proposition **??**) on a

$$\forall x \in H,\ \exists!(u, v) \in N \times N^\perp,\ x = u + v$$

Alors pour tout $x \in H$

$$L(x) = L(u) + L(v) = 0+ < e, v > L(e) =< e, v > L(e)$$

Comme pour tout $u \in N$ on a $< e, u >= 0$ car $e \in N^\perp$ on a

$$< e, v >=< e, u + v >=< e, x >$$

Finalement pour tout $x \in H$

$$L(x) ==< e, x > L(e)$$

Ainsi, on posant $l = eL(x)$ on obtient le résultat du théorème.
C.Q.F.D

3 Convergence faible

Définition 3.4 (Convergence faible)**.** Soient H un espace de Hilbert et (x_n) une suite dans H.
- On dit que la suite (x_n) converge faiblement ssi pour tout $L \in H^*$ la suite réelle $L(x_n)$ converge. Autrement dit, ssi pour tout $l \in H$ la suite $< l, x_n >$ converge.
- On dit que la suite (x_n) converge faiblement vers un élément $x_0 \in H$ ssi

$$\forall l \in H,\ \lim_{n\to\infty} < l, x_n >=< l, x_0 >$$

On note alors

$$x_n \rightharpoonup x_0,\ n \to \infty$$

Proposition 3.4 (Propriétés de suites faiblement convergentes)**.**
- *Si une suite (x_n) converge faiblement alors il existe un $x_O \in H$ tel que*

$$x_n \rightharpoonup x_0$$

- *Toute suite faiblement convergente est bornée*
- *La limite faible est unique*
- *Si $x_n \rightharpoonup x_0$ et $y_n \rightharpoonup y_0$ alors pour tout α, β*

$$\alpha x_n + \beta y_n \rightharpoonup \alpha x_0 + \beta y_0$$

3.1 Convergence faible et convergence forte

Proposition 3.5. *La convergence forte implique la convergence faible.*

Preuve de de la proposition 3.5

Soit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge fortement vers un élément $x \in H$:

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$$

On a alors pour tout $h \in H$

$$| < x_n, h > - < x, h > | = | < x_n - x, h > | \leq \|x_n - x\| \|h\| \to 0$$

On a utilisé ici l'inégalité de Schwarz. **C.Q.F.D**

Remarque 3.4 (Attention)**.** *La réciproque est généralement fausse. La proposition suivante montre que la réciproque est vraie ssi l'espace H est de dimension finie.*

Proposition 3.6. *La convergence faible implique la convergence forte ssi l'espace H est de dimension finie.*

Preuve de de la proposition 3.6

$\Rightarrow$ Supposons que dans l'espace de Hilbert H

$$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H,\ x_n \rightharpoonup x \ \Rightarrow\ x_n \to x$$

et que H est de dimension infinie. Considérons une base orthonormée $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans H. Les vecteurs de la base $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une suite qui ne converge pas fortement car pour tout $n \neq m$ $\|e_n - e_m\| = \sqrt{2}$ (conséquence immédiate de l'égalité de Pytagore, car $e_n \perp e_m$). Pourtant, pour tout $l \in H$ la série

$$\sum_{n=1} \infty | < e_n, l > |^2 \leq \|l\|^2$$

est convergente. Donc

$$\lim_{n\to\infty} < l, e_n >= 0$$

$\Leftarrow$ Supposons que H est de dimension finie. Alors il existe une base orthonormée finie de H $\{e_k,\ k = 1, \ldots, p\}$. Soit $x(_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ une suite faiblement convergente : $x_n \rightharpoonup x$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$x_n - x = \sum_{k=1}^{p} < x_n - x, e_k > e_k$$

et

$$\|x_n - x\|^2 = \sum_{k=1}^{p} | < x_n - x, e_k > |^2 \to 0$$

car la convergence faible implique que pour tout $k = 1, \dots, p$

$$< x_n - x, e_k > \to 0, \; n \to \infty$$

C.Q.F.D

Proposition 3.7. *Si $K \subset H$ est un compact alors pour tout suite $(x_n) \subset K$ d'éléments de K la convergence faible implique la convergence forte :*

$$x_n \rightharpoonup x_0 \;\Rightarrow\; x_n \to x_0$$

En utilisant la notion de la convergence faible il est possible d'introduire quelques notions de topologie faible à travers leurs caractérisation séquentielles.

Définition 3.5 (Ensemble faiblement fermé)**.** Un ensemble $A \subset H$ est faiblement fermé ssi la lite faible de toute suite faiblement convergente d'éléments de A appartient à A :

$$x_n \rightharpoonup x_0 \;\Rightarrow\; x_0 \in A$$

Définition 3.6 (Ensemble faiblement compact)**.** Un ensemble $K \subset H$ est faiblement compact ssi toute suite d'éléments de K contient une sous-suite faiblement convergente.

Définition 3.7 (Application faiblement continue)**.** Soit $T : H \to G$ une application d'un espace de Hilbert H vers un autre espace de Hilbert G. L'application T est faiblement continue sur H ssi pour toute suite $(x_n) \in H$ on a

$$x_n \rightharpoonup x_0 \;\Rightarrow T(x_n) \rightharpoonup T(x_0)$$

Théorème 3.2 (Compacité faible)**.** *Toute suite bornée dans un espace de Hilbert contient une sous-suite* ***faiblement convergente****.*

3.2 Convergence faible dans L^2

La proposition suivante établit un critère important de convergence faible dans l'espace $L^2[0,1]$.

Proposition 3.8. *Soit $H = L^2$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $L^2[0,1]$. Alors $f_n \rightharpoonup f$ ssi*

1. *la suite f_n est bornée*
2. *Pour tout $x \in [0,1]$*

$$\int_0^x f_n(t)dt \to \int_0^x f(t)dt$$

Preuve de de la proposition 3.8

$\Rightarrow$ Soit une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ faiblement convergente dans $L^2[0,1]$:

$$\forall h \in L^2, < f_n, h >= \int_0^1 f_n(t)h(t)dt \to < f, h >= \int_0^1 f(t)h(t)dt$$

Nous savons déjà (voir proposition 3.4) que toute suite faiblement convergente est bornée. Donc (1) est vraie.
Pour tout $x \in [0,1]$ posons

$$h_x(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq t \leq x \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

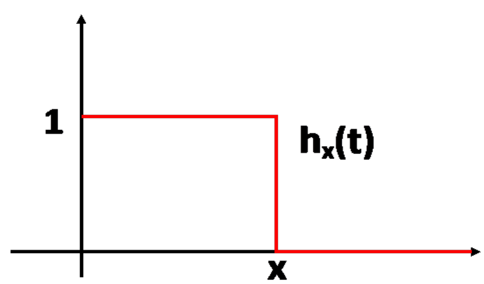


FIGURE 3.1 – La fonction h_x

On a $h_x \in L^2$ et donc

$$< f_n, h_x >= \int_0^x f_n(t)h_x(t)dt \to < f, h >= \int_0^x f(t)h_x(t)dt$$

$\Leftarrow$ On utilise le fait que l'ensemble de fonctions en escalier est dense dans L^2. Il suffit alors de montrer que pour toute fonction en escalier h

$$< f_n, h > \to < f, h >$$

Soit h fonction en escalier
Alors il existe une subdivision de l'intervalle $[0,1]$

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_p = 1$$

telle que pour tout $i = 1, \ldots, p$ $h(t) = c_i, \quad \forall t \in]x_{i-1}, x_i[$ Alors sur chaque intervalle de subdivision on a

$$h(t) = c_i(h_{x_i}(t) - h_{x_{i-1}}(t))$$

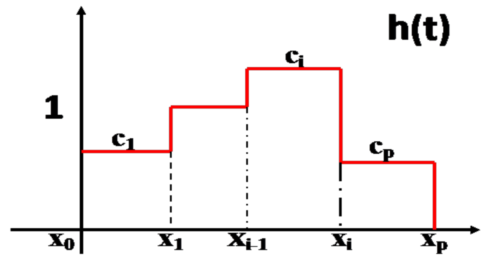


FIGURE 3.2 – Une fonction en escalier

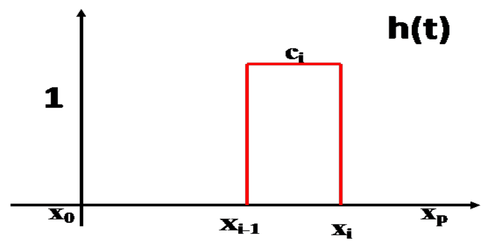


FIGURE 3.3 – Représentation d'une fonction en escalier

et on a sur tout l'intervalle

$$h(t) = \sum_{i=1}^{p} c_i(h_{x_i}(t) - h_{x_{i-1}}(t))$$

Alors

$$< f_n, h >= \sum_{i=1}^{p} c_i(< f_n, h_{x_i} > - < f_n, h_{x_{i-1}} >)$$

Or, pour tout x_i on a

$$< f_n, h_{x_i} >= \int_0^{x_i} f_n(t)dt \to \int_0^{x_i} f(t)dt =< f, h_{x_i} >$$

Donc

$$< f_n, h >= \sum_{i=1}^{p} c_i(< f_n, h_{x_i} > - < f_n, h_{x_{i-1}} >) \to< f, h >, \ n \to \infty$$

C.Q.F.D

4 Théorème de Lax-Milgramm

Définition 3.8. On appelle forme bilinéaire toute application

$$a : H \times H \to \mathbb{R}$$

telle que

- Pour tout $u \in H$ l'application $a(u, \cdot)$ est une fonctionnelle linéaire sur H
- Pour tout $v \in H$ l'application $a(\cdot, v)$ est une fonctionnelle linéaire sur H

Définition 3.9. On dit qu'une forme bilinéaire $a : H \times H \to \mathbb{R}$ est coercive ssi

$$\exists \alpha > 0, \quad \forall u \in H, \quad a(u,u) \geq \alpha \|u\|$$

On dit aussi dans ce cas que la forme a est elliptique.

Proposition 3.9. *Une forme bilénéaire $a : H \times H \to \mathbb{R}$ est continue sur H ssi elle est bornée :*

$$\forall u \in H, \forall v \in H, \quad |a(u,v)| \leq C\|u\| \cdot \|v\|$$

Théorème 3.3 (de Lax-Milgram)**.** *Soit $a : H \times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue sur un espace de Hilbert H :*

$$\exists C, \ \forall u \in H, \forall v \in H, \quad |a(u,v)| \leq C\|u\| \cdot \|v\| \tag{3.1}$$

On suppose que a est coercive

$$\forall u \in H, \forall v \in H, \quad |a(u,v)| \leq C\|u\| \cdot \|v\| \tag{3.2}$$

Alors pour tout $L \in H^*$ il existe un unique élément $u \in H$ tel que pour tout $v \in H$

$$a(u,v) = L(v) \tag{3.3}$$

Preuve de du Théorème 3.3

Remarquons d'abord que pour tout $u \in H$ $a(u, \cdot)$ est une fonctionnelle linéaire et continue sur un espace de Hilbert, H. Par conséquent, en vertu du théorème de représentation de Riez, il existe un unique élément $w \in H$ tel que

$$a(u,v) = \langle w, v \rangle, \quad \forall v \in H$$

Notons $A : H \to H, \ \ u \mapsto w$ l'application qui associe à tout $u \in H$ l'élément $w = Au$ tel que

$$a(u,v) = \langle w, v \rangle = \langle Au, v \rangle \ \ \forall v \in H$$

D'autre part, pour la fonctionnelle linéaire et continue L il existe également un unique élément $l \in H$ tel que

$$L(v) = \langle l, v \rangle \ \forall v \in H$$

Alors chercher un $u \in H$ solution de (3.3) équivaut à chercher la solution de

$$Au = l$$

Pour montrer l'existance et unicité de cette solution nous allons montrer que $A : H \to H$ est une application bijective.

Tout d'abord remarquons que A est linéaire (conséquence directe d'unicité dans le théorème de Riez).
De plus A est continue :

$$\|Au\|^2 = \langle Au, Au\rangle = a(u, Au) \leq C\|u\| \cdot \|Au\|$$

donc

$$\|Au\| \leq C\|u\|$$

Montrons que A est **injective**. Comme A est linéaire il suffit pour cela de montrer que $Ker(A) = \{0\}$. Soit $u \in H$ tel que $Au = 0$. On a alors

$$0 = \langle Au, u\rangle = a(u, u)$$

Or, la forme a est coercive. Donc

$$\alpha\|u\|^2 \leq a(u, u) = 0$$

Donc $u = 0$.
Montrons que A est surjective, c'est à dire que $Im(A) = H$. Pour cela nous allons montrer que $Im(A)$ est fermé et dense dans H.

$Im(A)$ **est fermé.** Soit $(y_n) \subset Im(A)$ une suite de Cauchy dans $Im(A)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$y_n \in Im(A) \;\Rightarrow\; \exists x_n \in H, \quad y_n = Ax_n$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N}$

$$\alpha\|x_n - x_m\|^2 \leq a(x_n - x_m, x_n - x_m) = \langle A(x_n - x_m), x_n - x_m\rangle = \langle y_n - y_m, x_n - x_m\rangle \leq \|y_n - y_m\| \cdot \|x_n - x_m\|$$

d'où on déduit

$$\|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{\alpha}\|y_n - y_m\|$$

Donc la suite (x_n) est de Cauchy. Comme H est un espace de Hilbert, la suite (x_n) converge. Soit $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$. Alors, par continuité de A on a

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} Ax_n = Ax_0 = y_0 \in Im(A)$$

Donc la suite (y_n) converge dans $Im(A)$.

$Im(A)$ **est dense dans** H**.** Il suffit de montrer que

$$(Im(A))^{\perp} = \{0\}$$

Soit $u_0 \in (Im(A))^{\perp}$. Donc pour tout $v \in H, \quad \langle Av, u_0\rangle = 0$. Alors, en utilisant la coercivité de a on a

$$\alpha\|u_0\|^2 \leq a(u_0, u_0) = \langle Au_0, u_0\rangle = 0$$

Donc $u_0 = 0$.

Ainsi nous venons de démontrer que l'application A est bijective et donc que l'équation

$$Au = l$$

admet une unique solution $u \in H$ pour tout $l \in H$. **C.Q.F.D**

Nous allons déduire du théorème de Lax-Milgram un corollaire important pour l'étude de l'existance et unicité des solutions de problèmes aux limites pour les équations aux dérivées partielles elliptiques.

Corollaire 3.1. *Soit $a : H \times H \to H$ une forme bilinéaire continue et coercive (voir théorème de Lax-Milgram). Supposons que a est symétrique. Alors pour tout $L \in H^*$ l'élément $\hat{u} \in H$ défini dans le théorème de Lax-Milgram comme l'unique solution de*

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in H \tag{3.4}$$

est l'unique solution du problème de minimisation suivant

$$\min_{u \in H} J(u), \quad \text{où} \quad J(u) = \left\{ \frac{1}{2} a(u, u) - L(u) \right\} \tag{3.5}$$

Preuve de du corollaire 3.1

Notre démonstration se fait en deux étapes :

1. Montrer que si $\hat{u}$ est solution du problème (3.4) alors il est solution de (3.5)
2. Montrer que le problème (3.5) ne peut admettre qu'une solution unique

Soit $\hat{u}$ la solution du problème (3.4). Montrons que pour tout $v \in H$

$$J(\hat{u}) \leq J(v)$$

Notons $w = v - \hat{u}$. Alors

$$J(v) = J(\hat{u}+w) = \frac{1}{2} a(\hat{u}+w, \hat{u}+w) - L(\hat{u}+w) = \frac{1}{2} a(\hat{u}, \hat{u}) - L(\hat{u}) + (a(\hat{u}, w) - L(w)) + \frac{1}{2} a(w, w)$$

Selon la définition de $\hat{u}$ on a

$$a(\hat{u}, w) - L(w) = 0, \quad \forall w \in H$$

Donc

$$J(v) = J(\hat{u}) + \frac{1}{2} a(w, w) \geq J(\hat{u}$$

car $a(u, v)$ est coercive.

Montrons maintenant que le problème (3.5) ne peut admettre qu'une solution unique. Supposons qu'il existe une autre solution que $\hat{u}$. Notons la $z \in H$. Soit $w \in H$ tel que $z = \hat{u} + w$. Alors on a

$$J(z) = J(\hat{u}) + \frac{1}{2} a(w, w) = J(\hat{u})$$

donc

$$a(w, w) = O$$

Comme a est coercive ceci implique que $w = 0$. **C.Q.F.D**

Chapitre 4

Eléments de la théorie spectrale des opérateurs linéaires

1 Opérateurs adjoints

Théorème 4.1 (Définition de l'opérateur adjoint). *Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et $T : H_1 \to H_2$ un opérateur linéaire continu. Alors il existe un unique opérateur $T^* : H_2 \to H_1$ tel que*

$$\forall (x, y) \in H_1 \times H_2, \ < Tx, y >=< x, T^* y >$$

L'opérateur T^* s'appelle ***opérateur adjoint*** *de T et l'on a*

$$\|T^*\|_{B(H_2,H_1)} = \|T\|_{B(H_1,H_2)}$$

Preuve de du Théorème 4.1

Soit $g \in H_2$. On peut lui associer une fonctionnelle en posant

$$L_g : H_1 \to \mathbb{R}, \ f \mapsto L_g(f) =< T(f), g >$$

L_g est linéaire car T est linéaire et le produit scalaire l'est aussi. Montrons que L_g est continue. Pour tout $f \in H_1$ on a

$$|L_g(f)| = | < T(f), g > | \leq \|T(f)\|\|g\| \leq \|T\| \cdot \|f\| \cdot \|g\| = \|T\| \cdot \|g\| \cdot \|f\|$$

Ainsi L_g est bornée, donc continue, et l'on a

$$\|L_g\| \leq \|T\| \cdot \|g\|$$

D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique élément $h_g \in H_1$ tel que

$$\forall f \in H_1, \ L_g(f) =< f, h_g >$$

et que

$$\|h_g\| = \|L_g\|$$

On peut ainsi construire l'opérateur $T^* : H_2 \to H_1$ en posant

$$T * (g) = h_g, \text{ t.q. } \forall f \in H_1, \ L_g(f) =< f, h_g >$$

On a alors

$$\forall f \in H_1, \ < T(f), g >=< f, T^*(g) >$$

De plus l'opérateur T^* est borné car

$$\forall g \in H_2, \quad \|T^*(g)\| = \|h_g\| = \|L_g\| \leq \|T\| \cdot \|g\|$$

Montrons que T^* est linéaire. Soient $g_1, \ g_2$ deux éléments de H_2 et $\alpha, \ \beta$ deux réels. On a alors $\forall f \in H_1$

$$\begin{aligned}
< f, T^*(\alpha g_1 + \beta g_2) > &= < T(f), \alpha g_1 + \beta g_2 > && (4.1)\\
&= \alpha < T(f), g_1 > +\beta < T(f), g_2 > && (4.2)\\
&= \alpha < f, T^*(g_1) > +\beta < f, T^*(g_2) > && (4.3)\\
&= < f, \alpha T^*(g_1) \beta T^*(g_2) > && (4.4)
\end{aligned}$$

Donc

$$T^*(\alpha g_1 + \beta g_2) = \alpha T^*(g_1) \beta T^*(g_2)$$

Il reste à montrer que

$$\|T^*\|_{B(H_2,H_1)} = \|T\|_{B(H_1,H_2)}$$

On a déjà montré plus haut que

$$\forall g \in H_2, \quad \|T^*(g)\| =\leq \|T\| \cdot \|g\|$$

Donc

$$\|T^*\|_{B(H_2,H_1)} \leq \|T\|_{B(H_1,H_2)}$$

Remarquons alors que

$$\|T(f)\|^2 =< T(f), T(f) >=< f, T^*(T(f)) >\leq \|f\| \cdot \|T^*\| \cdot \|T(f)\|$$

Et on a

$$\|T\|_{B(H_1,H_2)} \leq \|T^*\|_{B(H_2,H_1)}$$

On en déduit aussitôt que

$$\|T^*\|_{B(H_2,H_1)} = \|T\|_{B(H_1,H_2)}$$

C.Q.F.D

Proposition 4.1 (Propriétés de l'opérateur adjoint)**.** *Soit $T : H \to H$ un opérateur linéaire continu sur un espace de Hilbert.*

–
$$(T^*)^* = T$$
–
$$KerT = (ImT^*)^\perp$$
–
$$\overline{ImT} = (KerT^*)^\perp$$

Preuve de de la proposition 4.1

[¡+-¿]

$$(T^*)^* = T$$

– Pour montrer que
$$KerT = (ImT^*)^\perp$$
nous allons démontrer les deux inclusions

$KerT \subset (ImT^*)^\perp$ Soient $x \in KerT$ et $y \in ImT^*$. On cherche à montrer que $x \perp y$. Notons que $x \in KerT$ signifie $T(x) = 0$ et que $y \in ImT^*$ signifie qu'il existe un $h \in H,\ T^*(h) = y$ Alors
$$< x, y >=< x, T^*(h) >=< T(x), h >= 0$$

$(ImT^*)^\perp \subset KerT$ Soit $x \in (ImT^*)^\perp$ On cherche à montrer que $T(x) = 0$. $x \in (ImT^*)^\perp$ signifie $\forall h \in H_2,\ < x, T^*(h) >= 0$ Alors $\forall h \in H_2$
$$0 =< x, T^*(h) >=< T(x), h > \Rightarrow\ T(x) = 0$$

–
$$\overline{ImT} = (KerT^*)^\perp$$

C.Q.F.D

Théorème 4.2 (Applications linéaires faiblement continues)**.** *Soit $T : H \to G$ une application linéaire d'un espace de Hilbert H vers un autre espace de Hilbert G. Alors T est faiblement continue ssi T est fortement continue.*

Preuve de du théorème 4.2

Continuité forte $\Rightarrow$ faible Soit $T : H \to G$ linéaire et continue fortement.

Soit une suite (x_n) faiblement convergente : $x_n \rightharpoonup x$. On cherche à montrer que $Tx_n \rightharpoonup Tx$:
$$\forall h \in G,\ < Tx_n, h >\to< Tx, h >$$

$$| < Tx_n, h > - < Tx, h > | = | < T(x_n - x), h > | = | < (x_n - x), T^*h > | \to 0$$
car
$$\forall y \in H,\ < x_n - x, y >\to 0$$

Continuité faible ⇒ forte On utilise le théorème de graphe fermé **??**. En vertu de ce théorème il suffit de montrer que le graphe de T est fermé : pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ telle que $(x_n, Tx_n) \to (x, y),\ n \to \infty$ on a $y = Tx$.
Soit une suite (x_n) telle que $x_n \to x$ et $Tx_n \to y$ fortement. La convergence forte implique la convergence faible :

$$x_n \rightharpoonup x \text{ et } Tx_n \rightharpoonup y$$

Or, comme T est faiblement continue, on a

$$x_n \rightharpoonup x \ \Rightarrow\ Tx_n \rightharpoonup Tx$$

par unicité de la limite faible on a

$$Tx = y$$

C.Q.F.D

1.1 Opérateurs auto-adjoints

Définition 4.1 (Opérateur auto-adjoint)**.** On dit qu'un opérateur $T : H \to H$ est auto-adjoint ssi

$$T = T^*$$

Autrement dit, ssi

$$\forall (u, v) \in H^2,\ < Tu, v >=< u, Tv >$$

Exemple 4.1. Soit $A : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$

$$[Af](x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)dy$$

où $K : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue. On peut montrer facilement que A est un opérateur linéaire et continu. Cherchons l'adjoint de A.

$$\begin{aligned}
< Af, g > &= \int_0^1 [Af](x)\overline{g(x)}dx = \\
&= \int_0^1 \left[\int_0^1 K(x,y)f(y)dy\right]\overline{g(x)}dx \\
&= \int_0^1 \int_0^1 K(x,y)f(y)\overline{g(x)}dydx \\
&= \int_0^1 f(y)\overline{\left[\int_0^1 \overline{K(x,y)}g(x)dx\right]}dy =< f, [A^*g] >
\end{aligned}$$

Donc

$$(A^*g)(x) = \int_0^1 \overline{K(y,x)}g(y)dx$$

A est auto-adjoint ssi $K(x,y) = \overline{K(y,x)}$

Proposition 4.2 (Propriétés d'opérateurs auto-adjoints)**.** *Soit $T : H \to H$ un opérateur linéaire continu et auto-adjoint.*

Alors

- *Pour tout $x \in H$, $< Tx, x >$ est réel ;*
- $$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} | < Ax, x > |$$
- *Si ImT est dense dans H alors $T : H \to ImT$ est bijectif.*

2 Opérateurs compacts

Définition 4.2 (Opérateur compact)**.** Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et $T : H_1 \to H_2$ un opérateur linéaire. On dit que T est compact si l'image par T de tout ensemble borné de H_1 est relativement compact dans H_2, c'est à dire ssi

$$\overline{T(\overline{B}_{H_1})} \text{ est compact}$$

où $T(\overline{B}_{H_1})$ désigne la boule unité fermée de H_1.

Théorème 4.3 (Caractérisation séquentielle)**.** *Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et $T : H_1 \to H_2$ un opérateur linéaire. T est compacte ssi pour toute suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H_1$ la suite $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H_2$ contient une sous-suite convergente.*

Proposition 4.3. *Tout opérateur linéaire compact est continu*

Preuve de de la proposition 4.3

Soit $T : H_1 \to H_2$ un opérateur linéaire compact. Alors, d'après la définition 4.2 l'ensemble $T(\overline{B}_{H_1})$ est relativement compact. Donc c'est un ensemble borné (voir proposition **??**). Ainsi T est borné sur la boule unité fermée. ceci équivaut à dire que T est continu (voir le théorème 2.1). **C.Q.F.D**

Remarque 4.1 (Attention!). *La réciproque de la proposition ci-dessus est fausse. Soit H un espace de Hilbert de dimension infinie. Alors l'application identité $I : H \to H$ est linéaire et continue. Par contre, elle n'est pas compacte car l'image de la boule unité fermée par I est la boule unité et elle n'est pas relativement compact (voir le théorème de Riesz 1.13).*

La proposition ci-dessus peut être élargie jusqu'au théorème suivant

Théorème 4.4 (L'ensemble d'opérateirs compacts). *L'ensemble $K(H_1, H_2)$ d'opérateurs compacts est un sous-espace vectoriel fermé de l'espace $B(H_1, H_2)$ d'opérateurs linéaires bornés.*
Autrement dit,
- *l'opérateur nul est compact;*
- *toute combinaison linéaire d'opérateurs compacts et un opérateur compact;*
- *la limite d'une suite d'opérateurs compacts est un opérateur compact.*

Proposition 4.4. *La composée d'un opérateur compact et d'une application linéaire continue est compacte.*

Le théorème suivant nous sera utile dans plusieurs démonstrations.

Théorème 4.5. *Soit $T : H_1 \to H_2$ un opérateur linéaire continu. T est compact ssi pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H_1$*

$$x_n \rightharpoonup x \quad \Rightarrow \quad Tx_n \to Tx$$

2.1 Cas particulier : opérateurs de rang fini

Définition 4.3 (Opérateur de rang fini). On dit qu'un opérateur $T : H_1 \to H_2$ est de rang fini ssi

$$dim Im(T) < \infty$$

Théorème 4.6. *Tout opérateur linéaire continu de rang fini est compact.*

Preuve de du théorème 4.6

Soit $T : H_1 \to H_2$ un opérateur linéaire continu de rang fini. Donc $Im(T) \subset H_2$ est un s.e.v. de dimension fini de H_2. puisque T est linéaire et borné, l'image par T de la boule unité fermée de H_1 est un ensemble borné dans un sous-espace vectoriel de dimension finie. Donc, c'est un ensemble relativement compact (voir **??**). Ainsi T est un opérateur compact. **C.Q.F.D**

Les opérateurs de rang fini jouent un rôle important grâce au théorème suivant :

Théorème 4.7 (Approximation d'un opérateur compact par un opérateur de rang fini)**.** *Tout opérateur compact est limite d'une suite d'opérateurs de rang fini.*

Exemple 4.2. Nous allons étudier un exemple important pour les applications, d'opérateur intégral dans L^2. Soit $A : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$

$$[Af](x) = \int_0^1 K(x,y) f(y) dy$$

où $K : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $L^2([0,1]^2)$. Nous allons montrer ici dans un cas particulier de fonctions K qu'un tel opérateur est compact. L'étude du cas général sera faite plus loin, dans la section consacrée aux opérateurs de Hilbert-Schmidt.

Supposons que le noyau d'intégration $K(x,y)$ est séparable. C'est-à-dire qu'il s'écrit sous la forme

$$K(x,y) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x) r_i(y)$$

où les fonctions $\{p_i(x),\ i = 1, dots, n\}$ et $\{r_i(y),\ i = 1, dots, n\}$ sont des fonctions de classe $L^2[0,1]$. Montrons que l'opérateur A est alors de rang fini. En effet, pour tout $f \in L^2[0,1]$

$$\begin{aligned} Af &= = \int_0^1 K(x,y) f(y) dy \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{n} p_i(x) r_i(y) \right) f(y) dy \\ &= \sum_{i=1}^{n} p_i(x) \left(\int_0^1 r_i(y) f(y) dy \right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i(x) \end{aligned}$$

Ainsi on constate que pour tout vecteur $g \in Im(A)$ il existe des coefficients $\alpha_i,\ i = 1, \ldots, n$ tels que

$$g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i(x)$$

Donc le sous-espace image de A admet une famille génératrice finie. On a montré que A est de rang fini. Donc il est compact.

Théorème 4.8 (Alternative de Fredholm)**.** *Soit $T : H \to H$ un opérateur linéaire compact. Alors*
- *$Ker\ (I - T)$ est de dimension finie ;*
- *$Im\ (I - T)$ est fermé ;*
- *$Ker(I - T) = \{0\} \ \Leftrightarrow\ Im\ (I - T) = H$*

3 Eléments de théorie spectrale des opérateurs dans les espaces de Hilbert

Définition 4.4 (Valeurs propres d'un opérateur linéaire)**.** Soit $A : H \to H$ un opérateur linéaire sur un espace de Hilbert H. On appelle valeur propre de A tout nombre complexe λ tel qu'il existe un vecteur non nul $u \in H$ tel que

$$Au = \lambda u$$

Tout vecteur vérifiant l'égalité ci-dessus s'appelle vecteur propre associé à la valeur propre λ.

Proposition 4.5 (Sous-espace propre)**.** *L'ensemble de vecteurs propres d'un opérateur linéaire associés à la même valeur propre λ auquel on ajoute 0 est un sous-espace vectoriel de H. On l'appelle sous-espace propre associé à la valeur propre λ.*

$$V_\lambda = \{u \in H,\ Au = \lambda u\}$$

La dimension de ce sous-espace s'appelle multiplicité de la valeur propre λ.

Définition 4.5 (Opérateur positif)**.** Soit A un opérateur auto-adjoint. On dit que A est positif ssi

$$\forall x \in H, < Ax, x > \geq 0$$

On dit que A est défini positif ssi l'inégalité ci-dessus est stricte.

Proposition 4.6 (Valeurs propres d'opérateurs auto-adjoints)**.** *Si $A : H \to H$ est un opérateur auto-adjoint alors toutes ses valeurs propres sont réelles.*

Si en plus il est défini positif alors elles sont positives.

Théorème 4.9 (Théorème spectral)**.** *Soit $A : H \to H$ un opérateur auto-adjoint et compact. Alors il existe une base orthogonale (e_n) de vecteurs propres de A, correspondant aux valeurs propres (λ_n). Si H est de dimension infinie alors*

$$\lambda_n \to 0, \ n \to 0$$

et pour tout $x \in H$ si $x = \sum_{n=1} \infty c_n e_n$ alors

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \lambda_n e_n$$

Exemple 4.3 (le spectre d'un opérateur intégral)**.** Soit $H = L^2[0, 2\pi]$. Considérons l'opérateur linéaire

$$T : L^2 \to L^2, \quad (Tf)(x) = \int_0^{2\pi} \cos(x-y) f(y) dy$$

remarquons que son noyau d'intégration

$$K(x,y) = \cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y = \cos(y-x) = K(y,x)$$

est séparable (voir l'exemple 4.2) et symétrique (voir l'exemple 4.1). En s'appuyant sur les résultats que l'on a obtenus dans les deux exemples cités, on peut déduire immédiatement que T est compact et auto-adjoint.

En appliquant le théorème spectral 4.9, on sait qu'il existe une base hilbertienne de fonctions propres de T. trouvons les valeurs propres de cet opérateur et les sous-espaces propres associés.

Par définition, une valeur propre de T est un nombre complexe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que l'équation

$$Tf = \lambda f$$

admet au moins une solution non nulle f, appelée fonction propre de T. Une telle fonction vérifie donc pour tout $x \in [0, 2\pi]$

$$\begin{aligned} \lambda f(x) &= \int_0^{2\pi} \cos(x-y) f(y) dy && (4.5) \\ &= \cos(x) \int_0^{2\pi} \cos(y) f(y) dy + \sin(x) \int_0^{2\pi} \sin(y) f(y) dy && (4.6) \\ &= \cos(x) < f, \cos > + \sin(x) < f, \sin > && (4.7) \end{aligned}$$

Si $\lambda \neq 0$ on en déduit que toute fonction propre associée à λ doit être combinaison linéaire des fonctions $\{\cos(x), \ \sin(x)\}$.

Substituons alors $f = \alpha \cos(x) + \beta \sin(x)$ dans (4.17) et notons que les fonctions $\sin(x)$ et $\cos(x)$ sont orthogonales sur $[0, 2\pi]$: $< \sin, \cos >= 0$ et que $< \cos, \cos >=< \sin, \sin >= \pi$:

$$\lambda(\alpha \cos(x) + \beta \sin(x)) = \cos(x) \alpha < \cos, \cos > + \sin(x) \beta < \sin, \sin >= \alpha\pi \cos(x) + \beta\pi \sin(x)$$

On en déduit aussitôt que $\lambda \neq 0$ est une valeur propre ssi

$$\alpha\lambda = \alpha\pi, \quad \beta\lambda = \beta\pi$$

Ainsi la seule valeur possible est $\lambda = \pi$ et les constantes α et β peuvent prendre toutes les valeurs réelles.

Donc l'opérateur T a une seule valeur propre non nulle, $\lambda = \pi$ est que le sous-espace propre associé est

$$V(\pi) = \{\alpha\cos(x) + \beta\sin(x), \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$$

de dimension 2.

Il nous reste à étudier le cas $\lambda = 0$. On peut utiliser ici le théorème spectral. D'après ce théorème, il existe une base hilbertienne de fonctions propres de T. Comme T n'a qu'une seule valeur propre non nulle de multiplicité 2 ; $\lambda = 0$ est obligatoirement une valeur propre, de multiplicité infinie et le sous-espace propre associé est le complément orthogonal de $V(\pi)$.

3.1 Cas d'étude : problème de Sturm-Liouville pour le laplacien.

Considérons le problème de Sturm-Liouville suivant

$$\begin{cases} u''(x) + u(x) = \lambda u(x), \ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ u(0) = u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

Il s'agit d'un problème spectral pour l'opérateur différentiel

$$L = D^2 + I$$

où D est l'opérateur dérivée. L'opérateur L est défini et linéaire sur l'espace de fonctions $C^2\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ mais il n'est pas borné. On ne peut donc pas appliquer le théorème spectral tel quel à l'opérateur L. Nous allons donc transformer d'abord le problème initial, en montrant que l'inverse de L est un opérateur intégral dont on va calculer le noyau d'intégration.

Considérons le problème au limites suivant

$$\begin{cases} u''(x) + u(x) = f(x), \ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ u(0) = u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

En utilisant la méthode de variation de la constante pour les équations linéaires d'ordre 2 à coefficients constant, on recherche la solution sous la forme

$$u(x) = \alpha(x)\cos(x) + \beta(x)\sin(x)$$

où $\sin(x)$ et $\cos(x)$ sont deux solutions non colinéaires de l'équation sans second membre $u''+u = 0$.

Pour que $u(x)$ vérifie les conditions aux limites il faut

$$0 = u(0) = \alpha(0), \quad 0 = u\left(\frac{\pi}{2}\right) = \beta\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

et pour que $u(x)$ soit solution de l'équation avec second membre $f(t)$ les coefficients $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ doivent vérifier le système d'équations

$$\begin{cases} \alpha'(x)\cos(x) + \beta'(x)\sin(x) = 0 \\ -\alpha'(x)\sin(x) + \beta'(x)\cos(x) = f(x) \end{cases}$$

On en déduit facilement que

$$\begin{cases} \alpha'(x) = -f(x)\sin(x) \\ \alpha(0) = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} \beta'(x) = f(x)\cos(x) \\ \beta\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

Donc on a

$$\alpha(x) = -\int_0^x f(t)\sin(t)dt, \quad \beta(x) = \int_{\pi/2}^x f(t)\cos(t)dt$$

et

$$u(x) = -\cos(x)\int_0^x f(t)\sin(t)dt - \sin(x)\int_x^{\pi/2} f(t)\cos(t)dt$$

Transformons la dernière égalité :

$$\begin{aligned} u(x) &= -\int_0^x \cos(x)\sin(t)f(t)dt - \int_x^{\pi/2} \sin(x)\cos(t)f(t)dt & (4.8) \\ &= \int_0^{\pi/2} K(x,t)f(t)dt & (4.9) \\ & & (4.10) \end{aligned}$$

où

$$K(x,t) = \begin{cases} -\cos(x)\sin(t) \text{ si } t \leq x \\ -\sin(x)\cos(t) \text{ si } t > x \end{cases}$$

Soit $T : L^2 \to L^2$ l'opérateur qui associe à $f \in L^2$

$$(Tf)(x) = \int_0^{\pi/2} K(x,t)f(t)dt$$

Alors

$$Lu = f \quad \Leftrightarrow \quad u = Tf$$

et donc

$$Lu = \lambda u \;\Leftrightarrow\; u = \lambda T u$$

Et si $\lambda \neq 0$ alors λ est une valeur propre de L ssi $\dfrac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de T.

Il est facile de constater que $\lambda = 0$ n'est pas une valeur propre de l'opérateur L. En effet, l'équation différentielle

$$u'' + u = 0$$

admet des solutions sous la forme

$$u = \alpha\cos(x) + \beta\sin(x)$$

Les conditions aux bords donnent alors

$$0 = u(0) = \alpha, \quad 0 = u\left(\frac{\pi}{2}\right) = \beta$$

Donc, le problème aux limites

$$\begin{cases} u''(x) + u(x) = 0, \ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ u(0) = u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

n'admet pas de solutions non nulles. Ceci signifie que $\lambda = 0$ n'est pas une valeur propre de $L = D^2 + I$.

Nos considérations ont donc permis d'établir une équivalence entre deux problèmes spectraux

$$Lu = \lambda u$$

et

$$Tu = \frac{1}{\lambda} u$$

Remarquons alors que le noyau de T est symétrique : $K(s,t) = K(t,s)$. Donc T est auto-adjoint. De plus, la fonction K étant de classe L^2, l'opérateur T est compact. (voir la section sur les opérateurs de Hilbert-Schmidt). Donc, il admet une base hilbertienne de fonctions propres. Pour les trouver, on résout le problème aux limites à l'aide des méthodes classiques pour EDO. L'analyse fonctionnelle permet ici de s'assurer que la famille de fonctions trouvée forme une base orthonormale dans L^2.

Cet exemple traite d'un cas particulier de problème de Sturm-Liouville. Il est possible de le généraliser à tous les problèmes de Sturm-Liouville en suivant les mêmes étapes.

4 Opérateurs de Hilbert-Schmidt

Définition 4.6 (Opérateur de Hilbert-Schmidt)**.** Soit H un espace de Hilbert séparable. On dit qu'un opérateur linéaire continu $T : H \to H$ est de Hilbert-Schmidt ssi il existe une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\sum_n \|Te_n\|^2 < \infty$$

Nous allons dans ce qui suit établir que tout opérateur de Hilbert-Schmidt est compact.
Nous aurons besoin pour cela d'un résultat intermédiaire.

Proposition 4.7. *Soit T un opérateur de Hilbert-Schmidt sur un espace de Hilbert séparable H. Alors la quantité*

$$S_T^2 = \sum_n \|Te_n\|^2$$

ne dépend pas de choix de la base hilbertienne.

Preuve de la proposition 4.7

Soit T^* l'adjoint de T et soient (f_k) et (e_n) deux bases hilbertiennes dans H. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ on peut décomposer le vecteur Tf_k sur la base (e_n) :

$$Tf_k = \sum_n < Tf_k, e_n > e_n$$

Alors d'après l'égalité de Parseval on a

$$\|Tf_k\|^2 = \sum_n | < Tf_k, e_n > |^2$$

Donc

$$\sum_k \|Tf_k\|^2 = \sum_k \sum_n | < Tf_k, e_n > |^2 = \sum_k \sum_n | < f_k, T^* e_n > |^2 \quad (4.11)$$
$$= \sum_n \sum_k | < f_k, T^* e_n > |^2 = \sum_n \|T^* e_n\|^2 \quad (4.12)$$
$$(4.13)$$

On a changé l'ordre de sommation et utilisé l'égalité de Parseval pour les vecteurs $T^* e_n$ décomposés sur la base (f_k).
On a ainsi

$$\sum_k \|Tf_k\|^2 = \sum_n \|T^* e_n\|^2$$

On va maintenant appliquer un raisonnement analogue à la somme de droite

$$\sum_n \|T^* e_n\|^2 = \sum_n \sum_k | < T^* e_n, e_k > |^2 = \sum_n \sum_k | < e_n, Te_k > |^2 \quad (4.14)$$
$$= \sum_k \sum_n | < e_n, Te_k > |^2 = \sum_k \|Te_k\|^2 \quad (4.15)$$
$$(4.16)$$

Finalement, on obtient

$$\sum_k \|Tf_k\|^2 = \sum_n \|T^* e_n\|^2 = \sum_k \|Te_k\|^2$$

C.Q.F.D

Proposition 4.8. *Tout opérateur de Hilbert-Schmidt sur un espace de Hilbert séparable H est compact.*

Preuve de la proposition 4.8

Soit $T : H \to H$ un opérateur de Hilbert-Schmidt. Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne dans H et

$$S_T^2 = \sum_n \|Te_n\|^2$$

Nous allons utiliser le théorème 4.5. Pour montrer que T est compact il suffit de montrer que pour toute suite (u_n) faiblement convergente dans H la suite Tu_n converge fortement :

$$u_n \rightharpoonup u \;\Rightarrow\; \|Tu_n - Tu\| \to 0$$

Soit une suite (u_n) faiblement convergente vers un élément $u \in H$. Décomposons les éléments de la suite et le vecteur limite sur la base hilbertienne (e_n) :

$$\forall k \in \mathbb{N},\; u_k = \sum_n \alpha_{k,n} e_n, \quad \alpha_{k,n} =< u_k, e_n >$$

et

$$u = \sum_n \alpha_n e_n, \quad \alpha_n =< u, e_n >$$

Par convergence faible nous avons donc

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n\to\infty} \alpha_{k,n} = \lim_{n\to\infty} < u_k, e_n >=< u, e_n >= \alpha_n$$

On retient donc

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n\to\infty} \alpha_{k,n} = \alpha_n \tag{4.17}$$

Puisque la suite de vecteurs $(u_n - u)$ est faiblement convergente (vers 0) elle est bornée (voir la proposition 3.4). Il existe donc une constante $C \leq 0$ telle que

$$\forall k \in \mathbb{N},\; \|u_k - u\|^2 = \sum_n |\alpha_{k,n} - \alpha_n|^2 \leq C \tag{4.18}$$

Puisque l'opérateur T est continu on a

$$Tu_k = T\left(\sum_n \alpha_{k,n} e_n\right) = \sum_n \alpha_{k,n} Te_n, \quad Tu = T\left(\sum_n \alpha_n e_n\right) = \sum_n \alpha_n Te_n$$

Nous souhaitons montrer que $\|Tu_k - Tu\| \to 0,\; k \to \infty$. Remarquons que

$$\|Tu_k - Tu\|^2 = \left\|\sum_n (\alpha_{k,n} - \alpha_n) Te_n\right\|^2 \leq \sum_n |(\alpha_{k,n} - \alpha_n)|^2 \|Te_n\|^2 \tag{4.19}$$

Dans cette série, chaque coefficient $|(\alpha_{k,n} - \alpha_n)|^2 \to 0,\; k \to \infty$. Mais cela ne suffit pas évidemment à justifier que la série toute entière tends vers zéro. Pour arriver à le montrer nous allons séparer la série en deux parties, en choisissant de façon convenable l'indice de séparation N.

En effet, nous avons supposé que T est un opérateur de Hilbert-Schmidt. Cela signifie que la série

$$\sum_n \|Te_n\|^2 < \infty$$

converge. Donc

$$\sum_{n>N} \|Te_n\|^2 \to 0,\ N \to \infty$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$ on peut choisir un $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{n>N_\varepsilon} \|Te_n\|^2 < \varepsilon \tag{4.20}$$

En revenant à l'inégalité (4.19) on peut alors décomposer la série en deux sommes : une finie et une infinie :

$$\sum_n |(\alpha_{k,n}-\alpha_n)|^2 \|Te_n\|^2 = \sum_{n=0}^{N_\varepsilon} |(\alpha_{k,n}-\alpha_n)|^2 \|Te_n\|^2 + \sum_{n>N_\varepsilon} |(\alpha_{k,n}-\alpha_n)|^2 \|Te_n\|^2 = S_1(k)+S_2(k)$$

La première somme, $S_1(k)$ est finie et pour tout $0 \le k \le N_\varepsilon$ on a $|(\alpha_{k,n}-\alpha_n)|^2 \to 0,\ k \to \infty$. Donc, de toute évidence $S_1(k) \to 0,\quad k \to \infty$. Donc il est possible de trouver un $K_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall k > K_\varepsilon,\ S_1(k) = \sum_{n=0}^{N_\varepsilon} |(\alpha_{k,n}-\alpha_n)|^2 \|Te_n\|^2 < \varepsilon$$

Pour majorer la seconde somme, $S_2(k)$, nous utilisons (4.18) et ensuite (4.20).

$$S_2(k) = \sum_{n>N_\varepsilon} |(\alpha_{k,n}-\alpha_n)|^2 \|Te_n\|^2 \le C \sum_{n>N_\varepsilon} \|Te_n\|^2 \le C\varepsilon$$

Maintenant, on peut revenir à l'inégalité (4.19). Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $K_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$\begin{aligned} |Tu_k - Tu\|^2 &\le \sum_n |(\alpha_{k,n}-\alpha_n)|^2 \|Te_n\|^2 \\ &= \sum_{n=0}^{N_\varepsilon} |(\alpha_{k,n}-\alpha_n)|^2 \|Te_n\|^2 + \sum_{n>N_\varepsilon} |(\alpha_{k,n}-\alpha_n)|^2 \|Te_n\|^2 \\ &\le \varepsilon + C\varepsilon \end{aligned}$$

Donc $|Tu_k - Tu\| \to 0,\quad k \to \infty$. **C.Q.F.D**

4.1 Opérateurs de Hilbert-Schmidt dans L^2

Proposition 4.9 (Opérateurs de Hilbert-Schmidt dans L^2). *Soit $T : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ un opérateur linéaire continu. T est un opérateur de Hilbert-Schmidt ssi il existe une fonction*

$$K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R},\quad K \in L^2([0,1] \times [0,1])$$

telle que pour tout $f \in L^2[0,1]$

$$(Tf)(x) = \int_0^1 K(x,y) f(y) dy$$

Preuve de la proposition 4.9

$\Rightarrow$ Montrons que tout opérateur intégral dont la fonction $K(x, y)$ est de classe L^2 est un opérateur de Hilbert-Schmidt. *Pour simplifier, nous nous plaçons dans l'espace de fonctions **réelles.***

Soit $K \in L^2([0, 1] \times [0, 1])$. Choisissons une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans l'espace $L^2[0, 1]$. Alors la famille de fonctions

$$f_{ij}(x, y) = e_i(x)e_j(y)$$

forme une base hilbertienne de $L^2([0, 1] \times [0, 1])$. On peut donc décomposer K sur cette base :

$$K(x, y) = \sum_i \sum_j \alpha_{i,j} e_i(x)e_j(y)$$

et

$$\begin{aligned} \alpha_{i,j} &= < K, f_{i,j} >_{L^2([0,1]\times[0,1])} = \int_0^1 \int_0^1 K(x, y)e_i(x)e_j(y)dxdy \\ &= \int_0^1 e_i(x) \left(\int_0^1 K(x, y)e_j(y)dy \right) dx \\ &= \int_0^1 e_i(x) \left(Te_j\right)(x)dx =< e_i, Te_j > \end{aligned}$$

D'après l'égalité de Parseval on a

$$\|K\|^2 = \sum_i \sum_j |\alpha_{i,j}|^2 = \sum_j \sum_i | < Te_j, e_i > |^2 = \sum_j \|Te_j\|^2$$

Nous avons utilisé dans le dernier calcul l'égalité de Parseval une deuxième fois, en décomposant chaque vecteur Te_j sur la base (e_i) :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \sum_j = \sum_i | < Te_j, e_i > |^2$$

Ainsi nous avons montré que pour toute base hilbertienne dans $L^2[0, 1]$ on a

$$\sum_j \|Te_j\|^2 = \|K\|^2 < \infty$$

Donc T est un opérateur de Hilbert-Schmidt.

$\Leftarrow$ Montrons maintenant que tout opérateur de Hilbert-Schmidt est un opérateur intégral.

Soit T un opérateur de Hilbert-Schmidt sur $L^2[0, 1]$. Choisissons une base $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $L^2[0, 1]$. Pour tout $j \in \mathbb{N}$ on peut décomposer le vecteur Te_j sur la base :

$$Te_j = \sum_i \alpha_{i,j} e_i, \quad \alpha_{i,j} =< Te_j, e_i >$$

Posons

$$K(x,y) = \sum_i \sum_j \alpha_{i,j} e_i(x) e_j(y)$$

Sachant que T est un opérateur de Hilbert-Schmidt, on a

$$\sum_i \sum_j |\alpha_{i,j}|^2 = \sum_j \left(\sum_i | < Te_j, e_i > |^2 \right) = \sum_j \|Te_j\|^2 < \infty$$

Donc $K \in L^2([0,1] \times [0,1])$ et définit alors un opérateur intégral

$$(T_K f)(x) = \int_0^1 K(x,y) f(y) dy$$

Montrons que $T = T_K$. Il est évident, par définition des coefficients $\alpha_{i,j}$ et de la fonction $K(x,y)$ que pour i et pour tout j

$$< Te_j, e_i >= \alpha_{i,j} =< T_K e_j, e_i >$$

Donc pour tout j $Te_j = T_K e_j$. Les opérateurs T et T_K coïncident sur la base hilbertienne (e_i). Donc, ils coïncident sur le sous-espace dense $Vect(e_i,\ i \in \mathbb{N})$ de combinaisons linéaires finies des vecteurs de cette base. Comme ils sont tous les deux continus ils coïncident donc sur $L^2[0,1]$.

$$T = T_K$$

C.Q.F.D

Index