EISTI - DÉPARTEMENT MATHÉMATIQUES

EXAMEN DE LOGIQUE COMPUTATIONNELLE

21 janvier 2009 – **DURÉE 2h00**

La consultation et l'échange des documents, et l'utilisation des calculatrices sont interdits.
L'utilisation des 3 feuilles manuscrites recto-verso, format A4 est autorisée

- **Ne pas détacher les feuilles.**
- **Utiliser l'espace blanc pour vos réponses et le verso pour brouillon.**
- **Pensez à indiquer votre nom sur chaque feuille**

Exercice 1 – Calcul propositionnel

Pour chaque formule ci-dessous, déterminer par la méthode de votre choix si elle est valide, satisfiable ou insatisfiable :

1. $(p \land (q \lor r)) \rightarrow ((p \land q) \lor \neg r)$
   SOL.-

2. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \land \neg q)$
   SOL.-

Exercice 2 – Calcul des prédicats

Soit l'énoncé suivant :

“ *Un élève qui travaille dans toutes les matières a des bons résultats.*
Celui qui ne travaille pas une matiére a des mauvais résultats.
Jean travaille dans toutes les matières.
Jean ou Marie ne travaillent pas la logique. ”

1. Modéliser l'énoncé ci-dessus en utilisant les prédicats :
   - `matiere(x)` : x est une matière
   - `travaille(x,y)` : x travaille y
   - `avoirbr(x)` : x a de bon rśultats

   et les constantes : `Jean, Marie` et `logique`
   SOL.-

2. Écrire l'ensemble des formules obtenues sous forme clausale
   SOL.-

3. En utilisant la méthode de votre choix, prouver que “ *Marie ne travaille pas la logique* ” est une conséquence logique de l'énoncé précédent.
   SOL.-

Exercice 3 – Unification

Dans les formules suivantes, x, y, v, w sont des variables, f, g sont des foncteurs et a est une constante.
Trouver, s'il existe, l'unificateur le plus général pour chaque couple de formules.

1. $A_1 = p(y, f(g(x)))$ et $A_2 = p(f(a), y)$
   SOL.-

2. $A_1 = p(x, y, w)$ et $A_2 = p(f(g(v, y)), g(v, w), f(a))$
   SOL.-

Exercice 4 – Forme conjonctive normale
Soit la fbf

$$\forall x \, \forall y \, \exists z \ \ (p\,(x, y, z) \wedge (\forall u \ q\,(x, u) \rightarrow \exists u \ q\,(y, u)))$$

Calcule sa forme conjonctive normale.

SOL.-

$$\begin{array}{l}
\forall x \forall y \exists z\,(p\,(x, y, z) \wedge (\neg\,(\forall u q\,(x, u)) \vee \exists u q\,(y, u))) \\
\forall x \forall y \exists z\,(p\,(x, y, z) \wedge (\exists u \neg q\,(x, u) \vee \exists u q\,(y, u))) \\
\forall x \forall y \exists z\,(p\,(x, y, z) \wedge (\exists u\,(\neg q\,(x, u) \vee q\,(y, u)))) \\
\forall x \forall y\,(p\,(x, y, S_z\,(x, y)) \wedge (\neg q\,(x, S_u\,(x, y)) \vee q\,(y, S_u\,(x, y)))) \\
(p\,(x, y, S_z\,(x, y)) \wedge (\neg q\,(x, S_u\,(x, y)) \vee q\,(y, S_u\,(x, y)))) \\
(p\,(x, y, S_z\,(x, y)) \vee \neg q\,(x, S_u\,(x, y))) \wedge (p\,(x, y, S_z\,(x, y)) \vee q\,(y, S_u\,(x, y)))
\end{array}$$

Exercice 5 – Modèle minimal d'Herbrand & Résolution SLD
Soit le programme défini suivant :

$p(X, Y) \leftarrow q(X), r(Y).$
$q(X) \leftarrow m(X).$
$r(f(X)) \leftarrow .$
$r(b) \leftarrow .$
$m(f(f(X))) \leftarrow .$

1. Calculer l'univers et la base d'Herbrand.
   SOL.-

2. Calculer le modèle minimal d'Herbrand et en déduire une réponse correcte au but : $\leftarrow \ \ p(X, X)$.
   SOL.-
3. Trouver un but pour lequel le programme ne produit pas de réponse. Justifier votre réponse. Quel est le rapport avec le modèle minimal d'Herbrand ?
   SOL.-

4. En utilisant les dérivations SLD, trouver toutes les réponses calculées au but : $\leftarrow \ \ p(X, X)$ et ensuite au but : $\Leftarrow$ $p(f(X), X)$.
   SOL.-

5. Comment relier les réponses calculées trouvées dans l'exercice précédent, avec les réponses correctes associées au même but ?
   SOL.-

Exercice 6 – Logique de Hoare

1. Donner, en le justifiant, pour le triplet suivant, la postcondition :

$$\{x - y \geq 0\} \;\; y \leftarrow y + x \;\; \{??\}$$

SOL.- Postcondition : $\{x - y_0 \geq 0 \, \wedge \, y = y_0 + x\}$

2. Donner, en le justifiant, pour le triplet suivant, la precondition :

$$\{??\} \;\; a \leftarrow 0, \; b \leftarrow x \;\; \{a + b \geq 0\}$$

SOL.- Precondition : $\{x \geq 0\}$.