LOGIQUE COMPUTATIONNELLE & PROLOG – 5

MODÈLES DE HERBRAND

5.1 Introduction

Le calcul des prédicats est utilisé dans des problèmes concernant la satisfaction des contraintes ou les bases de données déductives ou, encore, la vérification formelle du logiciel.

Ce calcul a toujours la même forme :

on se donne un ensemble E des fbf, vérifier si, pour une fbf A, on a $E \models A$.

Nous avons déjà rencontré et résolu ce problème dans le cas du calcul des propositions. En effet dans ce cas précis le problème de la satisfiabilité des fbf propositionnelles est décidable. Mais dans le cas du calcul des prédicats nous pouvons montrer que le même problème est indécidable [1] !

Afin de surmonter ces difficultés nous avons déjà établi quelques simplifications syntaxiques :

- passage d'une fbf en fnc et transformation de cette dernière en clauses de Horn. ;
- de plus le théorème de la réfutation du chapitre précédent nous montre que si on veut démontrer que l'ensemble des clauses de Horn E fournit la preuve de la clause A, il suffit de démontrer que l'ensemble des clauses $E \cup \{\neg A\}$ est insatisfiable. Autrement dit il suffit de montrer qu'il n'y a pas d'interprétation qui est un modèle pour $E \cup \{\neg A\}$. Il est évident que sous cette forme la tâche de démonstration est quasiment impossible, sauf à réduire la taille de l'espace de recherche.

1. c'est-à-dire étant donné un ensemble E des fbf on ne peut pas, dans tous les cas, conclure qu'il soit satisfiable ni qu'il soit insatisfiable

L'objectif de ce chapitre est de présenter la méthode pour opérer cette réduction qui est composée de deux étapes :

- Établir un lien entre la logique des prédicats et celle des propositions. Ce lien est obtenu grâce à l'univers et la base de Herbrand.
- En utilisant l'univers et la base de Herbrand, construire une énumération récursive des modèles de E.

5.2

La preuve dans la logique des prédicats

Considérons l'ensemble de fbf $E = \{B_1, \ldots, B_n\}$.

Le problème de la déduction est de montrer que la fbf A est une conséquence logique de E.

En reformulant ce problème en termes de validité on a le problème suivant :

Est-ce que la formule

$$(\omega) \quad B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \rightarrow A$$

est une formule valide ?

On peut aussi reformuler le même problème en termes de satisfiabilité.

Est-ce que l'ensemble

$$E \cup \{\neg A\}$$

est un ensemble insatisfiable ?

Par conséquent, la preuve, du point de vue sémantique, dans la logique des prédicats consiste à établir que chaque interprétation qui est un modèle pour l'ensemble E des fbf closes, l'est aussi pour la fbf close A. En général il y a une infinité d'interprétations et donc l'approche sémantique ne peut pas s'appliquer. Sauf si on arrive à réduire de manière drastique le nombre d'interprétations à prendre en considération lors d'une procédure de déduction.

Une méthode pour effectuer cette reduction a été introduite par Löwenheim en 1915. Elle était fondée sur la possibilité de substituer dans une formule logique les variables par des constantes, de sorte que la formule ne contenait plus de variables. Herbrand en 1930 a élaboré une extension de cette méthode, pour faire la démonstration des théorèmes du point de vue syntaxique. Cette semaine nous présentons la méthode de Herbrand. On continuera la semaine prochaine avec la présentation de l'unification et avec la discussion du modèle minimal de Herbrand.

5.3

Univers et base de Herbrand

On rappelle une définition que nous avons vu en calcul des prédicats et on en profite pour faire une extension.

DÉFINITION 5.0.26 *Une fbf sans variables est appelée* fbf filtrée.
Un terme sans variables est appelé terme filtré *(ou* terme de base *ou* terme clos*).*
Une formule atomique ou atome sans variables est appelé atome filtré *(ou* atome de base *ou* atome clos*).*

Comme on cherche à réduire le nombre d'interprétations possibles pour un ensemble donné des fbf, il est évident qu'il faut modifier notre fade voir l'univers du discours. Pour ce faire, nous allons d'abord construire un univers du discours à partir d'un langage de la logique du 1er ordre.

Soit $\mathcal{L} = (A, \mathbb{T}, \mathbb{F})$ un langage du premier ordre. Considérons un ensemble des fbf E qui a comme langage sous-jacent $\mathcal{L}$, c'est-à-dire que ses prédicats, foncteurs, variables et constantes font partie de $\mathcal{L}$. Dans la suite on supposera toujours que E est

- un ensemble des clauses sans éléments contradictoires, et
- contenant seulement de la connaissance positive, c'est-à-dire contenant seulement des règles et des faits et ne contenant pas des questions. Un tel programme s'appellera *programme défini*.

L'importance des programmes définis vient du fait qu'ils ont au moins un modèle. Pour établir ce modèle nous allons introduire l'univers et la base de Herbrand.

DÉFINITION 5.0.27 (UNIVERS DE HERBRAND) *Soit un ensemble de clauses E qui a comme langage sous-jacent $\mathcal{L}$. L'*univers de Herbrand *$\mathcal{U}_E$ de l'ensemble E est l'ensemble de tous les termes filtrés que l'on peut former en utilisant les constantes et les foncteurs de E.*
Si E ne contient pas un symbole de constante, alors on y ajoute arbitrairement un symbole de constante a_H (la constante de Herbrand), afin de pouvoir former des termes filtrés.

Ainsi défini, l'univers de Herbrand est composé des tous les termes filtrés que nous pouvons construire à partir de E.

DÉFINITION 5.0.28 (BASE DE HERBRAND) *Soit un ensemble de clauses E qui a comme langage sous-jacent $\mathcal{L}$. La* base de Herbrand *$\mathcal{B}_E$ de l'ensemble E est l'ensemble de tous les atomes filtrés que l'on peut former en utilisant les symboles de prédicats de E, appliqués aux termes filtrés de $\mathcal{U}_E$, en prenant ces derniers comme des arguments.*

On voit donc que la base de Herbrand est constitué de tous les prédicats filtrés que nous pouvons construire en utilisant les éléments de E.

De faprécise l'univers de Herbrand $\mathcal{U}_E$ se construit comme suit :

- À chaque constante a de E correspond la même constante dans $\mathcal{U}_E$.
- S'il n'existe aucune constante dans E, alors on introduit dans $\mathcal{U}_E$ la constante de Herbrand a_H.

– À chaque foncteur f d'arité n, correspond dans $\mathcal{U}_E$ le même foncteur avec comme arguments des termes clos de $\mathcal{U}_E$, e.g. $f(t_1,\ldots,t_n)$, $t_i \in \mathcal{U}_E$.

Pour la construction de la base de Herbrand $\mathcal{B}_E$, nous avons

– À chaque prédicat p d'arité n correspond dans $\mathcal{B}_E$ le même prédicat avec comme arguments des termes clos de $\mathcal{U}_E$, e.g. $p(t_1,\ldots,t_n)$, $t_i \in \mathcal{U}_E$.

Nous voyons ainsi que $\mathcal{U}_E$ et $\mathcal{B}_E$ sont définis pour un programme E et contiennent exactement les symboles qui sont dans le programme.

EXEMPLE 5.0.4 *Soit le programme défini*

$$E = \{\texttt{arc(a,b)},\ \texttt{arc(a,c)},\ \texttt{arc(X,Z)},\texttt{chemin(Z,Y)} \rightarrow \texttt{chemin(X,Y)}\}$$

. *On a univers de Herbrand* $\mathcal{U}_E = \{\ \texttt{a,b,c}\}$ *et base de Herbrand*

$$\mathcal{B}_E = \left\{ \begin{array}{c} \texttt{arc(a,b), arc(a,c), arc(b,c), arc(b,a), arc(c,a), arc(c,b),} \\ \texttt{chemin(a,b), chemin(a,c), chemin(b,c), chemin(b,a), chemin(c,a), chemin(c,b)} \end{array} \right\}$$

EXEMPLE 5.0.5 *Soit le programme défini*

$$E = \{\texttt{plus(zero,N,N)},\texttt{plus(K, L, M))} \rightarrow \texttt{plus(s(K), L, s(M))}\}$$

On a $\mathcal{U}_E = \{\texttt{zero},\texttt{s(zero)},\texttt{s(s(zero))},\ldots\} = \{\texttt{s}^n\texttt{(zero)}, n \geq 0\}$

$\mathcal{B}_E = \left\{\texttt{plus(s}^n\texttt{(zero),s}^m\texttt{(zero),s}^k\texttt{(zero))}\right\}$.

5.4 Interprétations de Herbrand

En suivant cette construction, on peut comprendre que l'univers de Herbrand est plus « pauvre » qu'un univers de discours tel que nous l'avions examiner au chapitre précédent, car il n'a pas des variables. Il est donc plus facile de calculer la valeur de vérité d'un ensemble de clauses E et de savoir ainsi s'il est satisfiable ou pas, car, en absence des variables, d'une part il n'est pas nécessaire de procéder à une assignation de variables et, d'autre part, la signification des termes se simplifie. Néanmoins il faut savoir que l'univers de Herbrand peut être infini comme le stipule la proposition suivante :

PROPRIÉTÉ 5.0.5 *Si dans éléments d'un programme il y a un foncteur, alors l'univers de Herbrand correspondant est de cardinal infini.*

Ainsi pour l'interprétation de Herbrand, l'univers du discours est l'univers de Herbrand $\mathcal{U}_E$. Pour l'interprétation d'un prédicat, il suffit de spécifier la relation à associer avec chaque symbole de prédicat, c'est-à-dire la valeur des arguments pour lesquelles le prédicat retourne la valeur "vraie". Dans la mesure où tous ces prédicats se trouvent, sous forme filtré, dans la base de Herbrand $\mathcal{B}_E$, il suffit d'en extraire un sous-ensemble $\mathcal{B}_E'$ des prédicats qui retournent la valeur "vraie" pour l'interprétation.

Par conséquent une interprétation de Herbrand peut s'identifier à un sous-ensemble de la base de Herbrand. En effet étant donné que, pour un ensemble de clauses E, l'interprétation des constantes et des foncteurs soit fixée, une interprétation de Herbrand est la détermination du sous-ensemble de la base de Herbrand $\mathcal{B}_E$ dont les éléments ont comme valeur de vérité 1 (vrai) pour cette interprétation. Réciroquement si on considère un sous-ensemble quelconque B de la base de Herbrand $\mathcal{B}_E$ et si pour chaque prédicat de E qui est aussi dans B avec les mêmes arguments, on associe la valeur de vérité 1 (vrai), alors on obtient une interprétation de Herbrand issue de B. Nous avons donc que si I_E est une intePrétation de Herbrand, alors elle est équivalente au sous-ensemble $\{B_i \in \mathcal{B}_E \ / \models_{I_E} B_i\} \subseteq \mathcal{B}_E$. L'interprétation, donc, de Herbrand est l'interprétation la plus générale que nous pouvons donné au langage $\mathcal{L}$.

DÉFINITION 5.0.29 (MODÈLE DE HERBRAND) *Soit un ensemble de clauses E qui a comme langage sous-jacent $\mathcal{L}$. Considérons une interprétation de Herbrand I_E . Si cette interprétation est un modèle pour chaque clause de E, alors elle est un* modèle de Herbrand *pour E.*

Notons aussi que toute interprétation de Herbrand est une interprétation au sens de la définition donnée au chapitre précédent mais le contraire n'est pas toujours vrai.

Nous avons les résultats suivants :

PROPRIÉTÉ 5.0.6 *(1) Soit I'_E un modèle pour l'ensemble de clauses E. Alors l'ensemble $I_E = \left\{B \in \mathcal{B}_E \ \middle/ \models_{I'_E} B\right\}$ est un modèle de Herbrand pour E.*

(2) Nous pouvons associer des interprétations de Herbrand avec des sous-ensembles de la base de Herbrand et décrire ainsi l'interprétation par les éléments de $\mathcal{B}_E$ qui sont vrais pour cette interprétation.

(3) Si un ensemble de clauses E est satisfiable, alors cet ensemble possède un modèle de Herbrand.

(4) pour prouver qu'un ensemble de clauses E est satisfiable, on doit chercher de trouver un modèle de Herbrand, c'est-à-dire il faut examiner les sous-ensembles de la base de Herbrand $\mathcal{B}_E$ de E. (NB. Nous voyons que de cette façon l'espace de recherche se réduit fortement.)

(5) Si l'ensemble de clauses E n'a pas de modèle de Herbrand, alors il est insatisfiable.

THÉORÈME 5.0.9 (THÉORÈME DE HERBRAND) *Un ensemble E de clauses est insatisfiable si et seulement si n'a pas de modèle de Herbrand.*

Rappelons avant de terminer ce paragraphe que les résultats obtenus ici ne sont valables que si E est un ensemble de clauses.

5.5

Modèle minimal de Herbrand

Nous avons vu à la fin du § **??** qu'un ensemble des clauses peut ne pas avoir un modèle de Herbrand. Le théorème suivant montre que tout modèle non-Herbrand d'un programme défini peut produire un modèle de Herbrand.

THÉORÈME 5.0.10 *Soit E un programme défini*[2] *et I' un modèle non-Herbrand de E. Alors l'ensemble*

$$I = \{A \in \mathcal{B}_E / \models_{I'} A\}$$

est un modèle de Herbrand.

Comme conséquence de ce théorème nous avons un fait déjà connu :

COROLLAIRE 5.0.1 *Soit E un programme défini. La base de Herbrand $\mathcal{B}_E$ de E est un modèle de Herbrand de E.*

Soient E un programme défini, $\mathcal{M}_E = \{I_1, I_2, \ldots\}$ la famille de tous les modèles de Herbrand de E.Cette famille existe pour tout E, car il y a au moins un modèle de Herbrand pour E à savoir la base $\mathcal{B}_E$ de Herbrand. L'intersection $I = \bigcap_{I_i \in \mathcal{M}_E} I_i$ représente le *modèle minimal de Herbrand* (ou encore le *plus petit modèle de Herbrand*) pour E. Ce modèle sera noté par $\widetilde{I}_E$.

Nous avons le théorème suivant :

THÉORÈME 5.0.11 *Le modèle minimal de Herbrand $\widetilde{I}_E$ d'un programme défini E est l'ensemble de toutes les conséquences logiques filtrées :*

$$\widetilde{I}_E = \{A \in \mathcal{B}_E / E \models A\}$$

Ce théorème nous montre que pour un programme défini donné E, le modèle minimal de Herbrand constitue une interprétation du programme. Mais il y a plus. On avait vu précédemment que les modèles de Herbrand sont, dans un certain sens, des interprétation les plus générales, c'est-à-dire des modèles les plus généraux. Donc le modèle minimal de Herbrand contient les clauses qui sont vraies pour chaque modèle de E, c'est-à-dire les clauses filtrés qui sont des conséquences logiques de E. On pourrait donc aller plus loin et suggérer qu'un programmeur aura tout intérêt à ce que l'interprétation qui fait de son programme soit exactement le modèle minimal de Herbrand.

Toutefois il faut se garder d'extrapoler ces résultats pour n'importe quelle fbf.

L'existence d'un modèle minimal permet de structurer la famille de toutes les interprétations de E. Cette famille est en fait l'ensemble $\mathcal{P}(\mathcal{B}_E)$ des parties de $\mathcal{B}_E$. On peut démontrer

2. Un *programme défini* est un programme qui contient uniquement des *clauses définies*, c'est-à-dire des règles ou, encore, des *clauses de Horn strictes*, et aussi des faits, c'est-à-dire ce qu'on appelle des *clauses de Horn positives*.

que cet ensemble, muni de l'ordre partiel $\subseteq$, est un treillis complet[3]. Pour ce treillis nous avons $\bot = \emptyset$ et $\top = \mathcal{B}_E$. Pour tout ensemble d'interprétations de Herbrand la borne inférieure est l'interprétation de Herbrand qui est l'intersection de toutes les interprétations de Herbrand de l'ensemble et la borne supérieure est la réunion de ces mêmes interprétations.

5.6 Opérateur de la conséquence immédiate

Étant donnée une clause A de E on peut déterminer des substitutions particulières σ_f, appelées *substitutions filtrantes*, telles que $A\circ\sigma_f$ soient des clauses filtrées, c'est-à-dire sans occurrence des variables. En réalité $A\circ\sigma_f$ est une exemplification (instaciation) du fait A.

Soit maintenant une règle $A \leftarrow B_1,\ldots,B_n$ de E avec $n>0$ qui signifie, entre autre, que si les faits $B_1,\ldots,B_n$ sont vrais, il en de même pour A. Par conséquent si nous avons une substitution filtrante σ_f pour $B_1,\ldots,B_n$, A est vrai pour la même substitution filtrante, i.e. $A\circ\sigma_f \leftarrow B_1\circ\sigma_f,\ldots,B_n\circ\sigma_f$. Donc si I contient $B_1\circ\sigma_f,\ldots,B_n\circ\sigma_f$, il doit aussi contenir $A\circ\sigma_f$ sinon il ne serait pas un modèle. Notons que $A\circ\sigma_f \leftarrow B_1\circ\sigma_f,\ldots,B_n\circ\sigma_f$ est une exemplification (instanciation) de la règle $A \leftarrow B_1,\ldots,B_n$. Cette discussion permet de voir la manière dont nous pouvons enrichir en termes filtrés le programme E. En effet soit $I_1(E)$ l'ensemble des faits filtrés de E. Il est possible de lui adjoindre des nouveaux éléments en utilisant toutes les exemplifications (instanciations) des toutes les règles de E. On engendre ainsi l'ensemble $I_2(E)$ sur-ensemble de $I_1(E)$. Ce processus peut être répété tant qu'on peut engendrer des nouveaux éléments. Ces nouveaux éléments s'ajoutent à l'ensemble $I_k(E)$ afin de former l'ensemble $I_{k+1}(E)$ qui suit immédiatement $I_k(E)$.

Afin de formaliser ce processus on donne d'abord la définition suivante :

DÉFINITION 5.0.30 (Opérateur de la conséquence immédiate) *Soit E un programme défini. L'application $\mathcal{T}_E : \mathcal{P}(\mathcal{B}_E) \to \mathcal{P}(\mathcal{B}_E)$ définie par*

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\mathcal{B}_E) \ni I \mapsto \mathcal{T}_E(I) = \ & \{A\circ\sigma_f \,/\, A\circ\sigma_f \leftarrow B_1\circ\sigma_f,\ldots,B_n\circ\sigma_f \\ & \textit{où}\ (A \leftarrow B_1,\ldots,B_n) \in E \\ & \textit{et}\ \{B_1\circ\sigma_f,\ldots,B_n\circ\sigma_f\} \subseteq I\}\end{aligned}$$

c'est-à-dire $\mathcal{T}_E(I)$ est composé de toutes de conclusions filtrées $A\circ\sigma_f$ des règles $(A \leftarrow B_1,\ldots,B_n)$ de E et telles que les prémisses filtrées $\{B_1\circ\sigma_f,\ldots,B_n\circ\sigma_f\}$ soient dans I.

$\mathcal{T}_E$ est appelé opérateur de la conséquence immédiate *de E.*

Les propriétés de cet opérateur sont données par le

THÉORÈME 5.0.12 *Soit E un programme défini. L'opérateur de la conséquence immédiate de E a les propriétés suivantes :*

---

3. Un *treillis* ou *ensemble réticulé* est un ensemble muni d'un ordre partiel et disposant d'un plus petit et d'un plus grand élément, notés $\bot$ et $\top$ respectivement. Le treillis est *complet* si pour chacun de ses sous-ensembles X il y a une borne inférieure et une borne supérieure.

(1) $\mathcal{T}_E$ *est une application monotone, i.e. si* $I' \subseteq I$ *, alors* $\mathcal{T}_E(I') \subseteq \mathcal{T}_E(I)$.

(2) T_E *est une application continue, i.e. si* $I \in \mathcal{P}(\mathcal{B}_E)$ *tel que* $\sup(I) \in I$ *, alors* $\mathcal{T}_E(\sup(I)) = \sup(\mathcal{T}_E(I))$.

(3) Soit I *une interprétation de Herbrand.* I *est un modèle de Herbrand si et seulement si* $\mathcal{T}_E(I) \subseteq I$.

On termine avec le théorème suivant :

THÉORÈME 5.0.13 (CARACTÉRISATION DU MODÈLE MINIMAL DE HERBRAND) *Soient E un programme défini et* $\widetilde{I}_E$ *son modèle minimal de Herbrand. Alors*

$$\widetilde{I}_E$$

est un point fixe de l'opérateur de la conséquence immédiate :

$$\mathcal{T}_E\left(\widetilde{I}_E\right) = \widetilde{I}_E$$

Si l'opérateur de la conséquence immédiate $\mathcal{T}_E$ *est appliqué un nombre infini de fois (c-à-d. cet opérateur n'a pas un point fixe fini), alors on considère que*

$$\widetilde{I}_E = \mathcal{T}_E^{\infty}(0)$$

5.7 Exercices

EXERCICE 5.1 *Soit le programme*

$E = \{ \textit{impair}\ (X) \rightarrow \textit{impair}\ (s(s(X)))\}$

où $s(X)$ *est le successeur de* X.
Déterminer l'univers et la base de Herbrand pour E.
Quelle peut être la constante a_H *?*

EXERCICE 5.2 *Soit le programme*

$E = \{\textbf{plus}(zero,N,N), \textbf{plus}(s(K),L,s(M)) \leftarrow \textbf{plus}(K,L,M)\}$

(1) Déterminer l'univers et la base de Herbrand pour E.

(2) Donner quelques interprétations pour ce programme.

(3) Parmi ces interprétations quelles sont celles qui sont un modèle pour E *?*

EXERCICE 5.3 *Soit le programme*

$$E = \left\{ \begin{array}{l} p(f(f(a))). \\ p(f(X)) \leftarrow p(X). \end{array} \right\}$$

Préciser parmi les trois interprétations suivantes, celles qui sont des modèles de Herbrand pour E :

(1) $I_1 = \{p(a)\}$

(2) $I_2 = \{p(f(f(a))), p(f(f(f(a)))), \ldots\}$

(3) $I_3 = \{p(f^n(a)) \mid n \text{ est premier}\}$

EXERCICE 5.4 *Supposons que les constantes d'un univers de Herbrand sont* a, b, c *et* d. *Soit* I *l'interprétation de Herbrand :*

$$\{p(a), p(b), q(a), q(b), q(c), q(d)\}$$

Trouver parmi les fbf suivantes, celles qui sont vraies pour l'interprétation I *:*

(1) $\forall X\ p(X)$

(2) $\forall X\ q(X)$

(3) $\exists X\,(q(X) \wedge p(X))$

(4) $\forall X\,(q(X) \rightarrow p(X))$

(5) $\forall X\,(p(X) \rightarrow q(X))$

EXERCICE 5.5 *Soit la fbf* $p(a) \vee q(a)$. *Trouver ses modèles de Herbrand. Vérifier qu'il n'y a pas de modèle minimal de Herbrand.*

EXERCICE 5.6 *Soit le programme* $P = \{p(f(X)) \leftarrow p(X), q(a) \leftarrow p(X)\}$. *Calculer* $\mathcal{T}_E(\emptyset)$, $\mathcal{T}_E(\mathcal{B}_E)$ *et* $\mathcal{T}_E(\mathcal{T}_E(\mathcal{B}_E))$.

EXERCICE 5.7 *Donner le modèle minimal de Herbrand pour le programme de l'exercice 5.1*