LOGIQUE COMPUTATIONNELLE & PROLOG – 4

CALCUL DES PRÉDICATS – II

Au cours précédent nous avons introduit la notion du prédicat qui est à la base de la logique du 1er ordre. Nous avons aussi examiner l'interprétation sémantique et les modèles. On poursuit maintenant avec l'évaluation syntaxique et l'équivalence entre les approches sémantique et syntaxique. On termine avec les formes clausales en logique du 1er ordre.

4.1 Démonstration et consistance

L'évaluation syntaxique est un procédé mécanique qui permet de déduire le bien fondé d'une formule indépendamment du sens de ses composantes. Ainsi considérée, l'évaluation syntaxique est une théorie de la démonstration. La première notion de la théorie de démonstration est le théorème.

DÉFINITION 4.0.18 *Une fbf A est un* théorème*, et l'on note $\vdash A$, si A est un axiome*[1] *ou si A est une formule obtenue par application des règles d'inférence sur d'autres théorèmes.*

Notons que les règles d'inférence sont celles utilisées par le mécanisme de démonstration en logique propositionnelle, plus des règles spécifiques aux quantificateurs.

DÉFINITION 4.0.19 *Une fbf close A est une* déduction *de l'ensemble de fbf closes $B_1, B_2, \ldots, B_n$, que l'on note $B_1, B_2, \ldots, B_n \vdash A$ s'il existe une suite finie $(A_1, A_2, \ldots, A_n, A)$ où chaque A_i est soit un*

1. Les axiomes de la logique sont les principes fondamentaux de la logique.

axiome, soit un des B_i soit il est obtenu par application d'une règle d'inférence sur des éléments A_j précédemment obtenus.

Les fbf B_i sont appelées des *hypothèses*.

THÉORÈME 4.0.3 (de la déduction) *Soit A une fbf close. Si $A \vdash B$, alors $\vdash A \to B$ et vice versa.*

On introduit maintenant les notions de la théorie .et de la consistance

DÉFINITION 4.0.20 *Une* théorie *$\mathcal{T}$ est une collection des théorèmes avec la propriété $\mathcal{T} \vdash p \to p \in \mathcal{T}$.*

DÉFINITION 4.0.21 *Une logique est* syntaxiquement consistante *s'il n'existe aucune formule du langage telle que nous avons en même temps $\vdash A$ et $\neg \vdash A$.*

Nous avons le

THÉORÈME 4.0.4 *Le calcul des prédicats est syntaxiquement consistant.*

4.2
Équivalence entre modèles et théorie de démonstration

Nous allons voir que les modèles et la théorie de démonstration sont équivalentes en calcul des prédicats comme c'était déjà le cas en calcul propositionnel. Cette équivalence s'établit à l'aide de deux notions : adéquation et complétude.

DÉFINITION 4.0.22 *Une logique est* adéquate *si tout théorème $\vdash A$ est une formule valide $\models A$.*

Une logique est complète *si toute formule valide est un théorème, i.e. $(\models A) \to (\vdash A)$.*

L'équivalence cherchée est obtenue à l'aide des trois théorèmes suivants :

THÉORÈME 4.0.5 *Le calcul des prédicats est adéquat, i.e.$(\vdash A) \to (\models A)$.*

THÉORÈME 4.0.6 *Le calcul des prédicats est (fortement) complet, i.e.*
$(\models A) \to (\vdash A)$.

THÉORÈME 4.0.7 (DE COMPLÉTUDE) *$A \vdash p \leftrightarrow A \models p$, pour tout fbf p avec $p \in \mathcal{L}$.*

4.3
Formes clausales

Nous avons déjà introduit au chapitre précédent la notion de la clause. Quand on passe au calcul des prédicats il est possible qu'une clause contient des quantificateurs. Afin d'obtenir une normalisation des différents types des clauses nous introduisons la notion de la clause sous forme prénexe.

DÉFINITION 4.0.23 *Une* clause sous forme prénexe *est une clause de la forme* $\diamond x_1, \diamond x_2, \ldots \diamond x_n C$*, où* $\diamond$ *désigne un quantificateur et* C *est une fbf sans quantificateurs.*
La clause vide sera notée par $\perp$*. Il s'agit d'une fbf toujours fausse.*

Nous avons le théorème suivant :

THÉORÈME 4.0.8 *Toute fbf du calcul des prédicats admet une forme prénexe équivalente*

Dans une forme prénexe la présence des quantificateurs universels n'est pas significative. En effet on considère que "$\forall x\, A(x)$ *est vraie*" et "$A(x)$ *est vraie*" sont deux formules par convention équivalentes (En fait la seconde est une exemplification – instance – de la première). Par contre la présence d'un quantificateur existentiel pour une variable d'une fbf, pose le problème de la « construction » d'une telle variable.

Par exemple si nous avons $\exists x\, A(x)$, on doit pouvoir construire une valeur c pour la variable x qui rend la fbf $A(c)$ vraie. Dans ce cas on dit que nous avons remplacé la variable x par une fonction s d'arité 0, c'est-à-dire par une constante. Une autre possibilité est d'avoir la variable d'un quantificateur existentielle sous la portée d'un (ou plusieurs) quantificateur(s) universel(s) relatif(s) à d'autre(s) variable(s). Ainsi considérons la fbf $\forall x \exists y\, A(y,x)$. Dans cette formule pour chaque x on postule l'existence d'un y tel que $A(y,x)$ soit vérifiée. Pour résoudre ce problème on doit avoir une fonction $s(\cdot)$ d'arité 1, qui permet pour chaque x donné, de fabriquer un y. La fbf devient ainsi $\forall x\, A(s(x), x)$.

Bien évidemment on ne cherche pas à construire cette fonction s ni, a fortiori, à lui donner une interprétation. On se contente de lui donner un nom. Une telle fonction s'appelle fonction de Skolem. Nous avons :

DÉFINITION 4.0.24 *Une* fonction de Skolem *est une fonction qui, dans une fbf close, remplace la variable d'un quantificateur existentiel et prend comme arguments les variables des quantificateurs universels sous la portée desquels était la variable du quantificateur existentiel.*
Si la variable qui est replacée par une fonction de Skolem n'était pas sous la portée d'un quantificateur universel, alors l'arité de la fonction de Skolem serait nulle, c'est-à-dire la fonction de Skolem serait une constante.

DÉFINITION 4.0.25 (FORME CONJONCTIVE NORMALE) *Une conjonction de clauses* $C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n$ *du calcul des prédicats dans lesquels*

- *les variables sous des quantificateurs existentiels sont remplacées par des fonctions de Skolem, et*

– *les variables sous des quantificateurs universels sont omises*

est une forme conjonctive normale (fcn) *ou* forme standard.
Une fcn est parfois notée sous forme ensembliste $\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$.

Soit une fbf close F. L'algorithme pour aboutir à une forme standard est le suivant :

(1) Élimination du connecteur $\leftrightarrow$: $(A \leftrightarrow B) \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

(2) Élimination du connecteur $\rightarrow$: $(A \rightarrow B) \equiv (\neg A \vee B)$

(3) Transfert de la négation au niveau le plus intérieur (i.e. devant les atomes) par utilisation des règles :
   - des lois de de Morgan $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$, $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$ en tant que règles de reécriture.
   - de la loi de l'involution $\neg\neg A \equiv A$ qui permet la suppression des doubles négations.
   - $\neg\forall x A \equiv \exists x \neg A$
   - $\neg\exists x A \equiv \forall x \neg A$

(4) Application des substitutions d'une variable par une autre de sorte que chaque variable apparaî t sous la portée d'un seul quantificateur.

(5) Suppression des quantificateurs non opérationnels, i.e. dont la variable quantifiée n'apparaî t pas sous leur portée.

(6) Suppression des quantificateurs existentiels par application de la fonction de Skolem.

(7) Conversion en forme prénexe, i.e. transfert des quantificateurs au début de la fbf en utilisant les règles :
   - $(\forall x A \wedge B) \equiv \forall x (A \wedge B)$ si B ne contient pas x.
   - $(\exists x A \wedge B) \equiv \exists x (A \wedge B)$ si B ne contient pas x.
   - $(\forall x A \vee B) \equiv \forall x (A \vee B)$ si B ne contient pas x.
   - $(\exists x A \vee B) \equiv \exists x (A \vee B)$ si B ne contient pas x.

(8) Suppression des quantificateurs universels.

(9) Conversion en forme standard par application de la distributivité
   - de $\vee$ par rapport à $\wedge$: $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (B \vee C)$
   - de $\wedge$ par rapport à $\vee$: $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (B \wedge C)$

   en tant que règles de réécriture.

4.4 Exercices

EXERCICE 4.1 *Calculer la forme prénexe équivalente de la fbf suivante :*

$$\forall x A(x) \wedge \exists y B(y) \rightarrow \exists y (A(y) \wedge B(y))$$

EXERCICE 4.2 *"Etablir la forme clausale équivalente à la fbf*

$$\exists x (p(X) \wedge \forall y (p(y) \rightarrow \neg q(Y, X))) \wedge \neg\exists x (p(X) \wedge \forall y (p(y) \rightarrow \neg q(Y, X)))$$