1

LOGIQUE & PROLOG – 1 : CALCUL PROPOSITIONNEL

1.1 Introduction

Logique : médiateur entre l'homme et l'ordinateur.
Il y a la logique qui traite les propositions. On l'appelle logique d'ordre 0.
Le premier qui a formalisé cette logique était Aristote.

Il y aussi la logique des prédicats (prédicat = proposition qui contient des variables). Cette logique est appelé logique d'ordre 1. Elle sera à la base de notre travail.

1.2 Construction de la logique

Problème.- Comment construire la logique sans présupposer la logique ?

Astuce.- Nous allons considérer la « langue logique » comme un objet, une langue-objet, qui sera élaborée en utilisant une langue naturelle, par exemple le français.

Donc ici le français est, par rapport à la langue-objet de la logique, une langue de niveau supérieur, c-à-d. le français est une méta-langue vis-à-vis de la langue logique.

[N.B. Méta-"quelque chose" signifie que "quelque chose" est de niveau supérieur, d'une plus grande généralité.

Donc le français comme métalangue de la logique, signifie que le français a une plus grande généralité que la langue logique. Par exemple, le français n'est pas seulement une langue logique !]

En jargonnant, on appellera dorénavant la langue-ojet de la logique un langage logique.

Conclusion : le français sera utilisé comme méta-langue pour élaborer le language logique.

Remarque.- Pour faciliter les calculs de la logique (qui doivent donc se faire en français) nous utiliserons des symboles qui sont en réalité des abreviations et donc à ce titre ils appartiennent au français. On les appelle symboles extralogiques. Par exemple "et" sera symbolisé par $\wedge$.

1.3

Éléments du langage

Pour décrire un environnement donné, que nous appellerons par la suite *univers du discours* (noté $\mathcal{U}$), la logique utilise des phrases que nous appellerons *propositions logiques* ou encore *formules*. Le but du calcul logique est de donner un fondement à ces propositions c'est-à-dire d'examiner leur validité. Cet examen de la validité d'une formule se fera indépendamment de sa structure et le résultat sera en rapport avec sa propriété d'être vraie ou fausse.

Les propositions seront représentées par des symboles qui auront une valeur de vérité : *vraie, fausse*. Pour leur étude logique nous allons définir un *langage formel* $\mathcal{L}_0$ à l'aide des éléments suivants :

- Un ensemble V_p, au plus dénombrable, des *propositions* qui seront notées par $p, q, \ldots$. Notons que l'« appellation contrôlée » des propositions est *variables propositionnelles*, terme que nous n'utiliserons pas, de peur d'introduire une confusion en ce qui concerne le sens de la variable. On pourra par contre utiliser le nom – moins usité – de *propositions atomiques*.
- Un ensemble Ξ, au plus dénombrable, de *constantes*.

- Un ensemble L des *connecteurs* qui sont les suivants :
  - *Connecteur logique* unaire : la négation $\neg$
  - *Connecteurs propositionnels* binaires :
    - Disjonction : $\vee$
    - Conjonction : $\wedge$
    - Implication : $\rightarrow$
    - Équivalence (ou double implication) : $\leftrightarrow$
- Les séparateurs : parenthèses gauche "(" et droite ")", crochets gauche "[" et droit]".

Les séparateurs ne font pas partie, à proprement parler, du langage. Leur présence permet de faciliter la lecture des propositions.

Les éléments du langage déterminent un *alphabet*

$$\Sigma_0 = \{V_p, \Xi, L\}$$

La brique élémentaire du calcul propositionnel est l'*atome*. Un proposition atomique est un atome. Une constante aussi. Plus généralement

DÉFINITION 1.0.1 *Un* atome *est une proposition dont la structure interne ne nous préoccupe pas.*

À partir des atomes on peut construire des *formules bien formées* (fbf) dont la définition est la suivante :

DÉFINITION 1.0.2 *Une* formule bien formée *est*
- *soit un atome*
- *soit une proposition obtenue à partir de deux fbf A et B, selon les constructions suivantes :*
  - $\neg A$
  - $A \vee B$, $A \wedge B$
  - $A \rightarrow B$, $A \leftrightarrow B$

Selon cette définition, les propositions atomiques sont des fbf.

1.4

Vrai – faux

L'objectif de la logique est de déterminer la valeur de vérité d'une fbf – aussi complexe soit-elle – en se fondant sur la valeur de vérité de ses atomes et sur les tables de vérité des connecteurs logiques.

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Problème.- La langue naturelle (ici le fançais) peut exprimer à la fois une proposition et sa vérité. Ce fait a des conséquences fâcheuses, en engendrant des paradoxes, comme par exemple le paradoxe du menteur : la proposition “je mens” vaut pour elle-même.

L’archétype des paradoxes est le paradoxe des classes établi par Russell : Soit $\mathcal{G}$ la classe des classes Y qui ne s’appartiennent pas : $\mathcal{G} = \{Y : Y \notin Y\}$ ce qui en langage logique s’écrit $(\forall Y)(Y \in \mathcal{G} \leftrightarrow Y \notin Y)$. Supposons que $\mathcal{G}$ est une classe comme les autres. On peut alors la substituer à la variable (classe) Y et la formule précédente s’écrit : $(\mathcal{G} \in \mathcal{G} \leftrightarrow \mathcal{G} \notin \mathcal{G})$ ce qui est absurde.

On s’en sort (pas très bien) en considérant que les valeurs de vérité Vrai et Faux font partie du méta-langage et non pas du langage logique.

1.5

Interprétation - Modèles

Une *interprétation* pour une fbf (ou un ensemble des fbf) est une fonction qui fournit à la fbf une de valeurs de l’ensemble $\{0,1\}$ ou {Faux, Vrai}.

Une fbf est *satisfiable* s’il y a au moins une interprétation qui la satisfait (c-à-d. pour laquelle la valeur de vérité est Vrai). Cette interprétation est un *modèle* pour la fbf.

Une fbf qui a un modèle s’appelle *satisfiable* ou *consistante*. Si elle n’a aucun modèle elle est *insatisfiable* ou *incosistante*.

Une fbf pour laquelle toute interprétation est un modèle est une *tautologie*.

1.6

Syntaxe – Sémantique

Toute logique comprend une syntaxe et une sémantique.

Donc deux approches :

Sémantique Les fbf sont interprétées et on déduit leur valeur de vérité en utilisant des méthodes de calcul de vérité (par exemple les tables de vérité).

L'approche sémantique permet la déduction sémantique dans le sens suivant : soit A, B deux ensembles des fbf. Si chaque modèle de A est aussi un modèle de B, alors on dit que B est déduite sémantiquement de A et l'on note par $A \models B$.

Notons aussi que si A est un tautologie, alors on a $\models A$

Deux formules sont (sémantiquement) équivalentes si $A \models B \leftrightarrow B \models A$.

Syntaxique Les fbf sont démontrées syntaxiquement en utilisant les axiomes et les règles d'inférence logique. Une fbf A démontrée syntaxiquement est un théorème que l'on note $\vdash A$.

1.7

Proposition – Enoncé – Vérité

Les fbf sont des propositions. Qu'est-ce que c'est qu'une proposition ? C'est un énoncé dont on ne tient pas compte ni la personne qui l'exprime, ni le temps, ni toute autre chose, à l'exception de l'information sur l'état des choses. Ainsi la proposition "j'affirme que la fenêtre est fermée aujourd'hu" on ne retient que "la fenêtre est fermée".

Il faut faire attention à ne pas confondre proposition et énonce. En effet une même proposition peut être exprimée par plusieurs énoncés différents mais synonymes.

Toute proposition peut être

– démontrée syntaxiquement en termes de correction grammaticale ;
– interprétée sématiquement en termes des valeurs de vérité.

Donc une proposition est un énoncé déclaratif grammaticalement correct susceptible d'être Vrai ou Faux.

La notion de la vérité n'est pas non plus une notion logique. En effet la vieille idée d'Aristote selon laquelle une proposition est vraie si elle correspond (elle est l'image) d'un fait n'est pas admise de nos jours car (d'après Frege) nous ne pouvons pas mettre en correspondance deux objets de nature différente (proposition – fait). Donc la vérité est logiquement indéfinissable (parallèle avec la notion de l'information). Selon Russell "les propositions sont vraies ou fausses comme les roses sont roses ou rouges".

1.8

Substitution

Soit $A(p)$ une fbf complexe comprenant une proposition simple p. Si $A(p)$ est valide, la fbf $A(q)$ obtenue en en substituant à chaque occurrence de p la proposition q, que l'on note (p/q), est valide.

La substitution permet d'obtenir des nouvelles fbf. En effet, à partir d'une fbf valide, on peut obtenir une infinité des fbf toutes aussi valides

Exemple.- Soit la fbf $\models (p \to p)$. Nous pouvons obtenir, entre autres, les fbf suivantes :

- $p/\neg p$ donne $\models (\neg p \to \neg p)$
- $p/(p \to p)$ donne $\models (p \to p) \to (p \to p)$
- $p/(p \to \neg q)$ donne $\models (p \to \neg q) \to (p \to \neg q)$

1.9

Remplacement

Soit $A(p)$ une fbf complexe comprenant une proposition simple p. Si $p \leftrightarrow q$, alors $A(p) \leftrightarrow A(q)$ où $A(q)$ est obtenue à partir de $A(p)$ par substitution de p par q. Le remplacement crée donc des fbf équivalentes.

Exemple.- Si $A(q)$ est la fbf $p \to (q \to p)$ et on prend pour p la fbf $(q \to p)$ et pour q la contrapositive $(\neg p \to \neg q)$, alors la substitution $(q \to p)/(\neg p \to \neg q)$ aboutit à la fbf $p \to (\neg p \to \neg q)$ qui est aussi valide.

1.10

Équivalence modèles et théorie de démonstration

Nous avons vu que pour établir la validité d'une formule l'interprétation sémantique utilise des éléments qui ne font pas nécessairement partie du langage de la logique. Par contre la démonstration syntaxique utilise de méthodes de la logique pour élaborer la démonstration d'une formule. Donc la démonstration syntaxique peut être réalisée selon des procédures automatiques, par exemple à l'aide d'un programme. On parle alors de *démonstration automatique*.

Le problème que nous avons ici est que les résultats de l'interprétation sémantique ne doivent pas être en contradiction avec les résultats de la démonstration syntaxique. Il faut donc que, pour une formule donnée, $\vdash f$ entraîne $\models f$ – *adéquation de la logique* – et aussi que $\models f$ entraîne $\vdash f$ – *complétude de la logique*. Plus formellement, nous avons :

Une logique est *(faiblement) complète* si toute formule valide est un théorème, c'est-à-dire $(\models A) \to (\vdash A)$.

On peut démontrer qu'en calcul propositionnel, toute tautologie est un théorème et vice-versa, c-à-d. Si $\vdash p$, alors $\models p$ et vice-versa.

1.11

Formes normales conjonctive (FNC) et disjonctive (FND)

La normalisation des fbf permet de les comparer plus facilement.

FNC est une fbf composée des conjonctions des disjonctions $(p \vee \cdots) \wedge (q \vee \cdots) \wedge \cdots$

Une fbf quelconque peut être transformée en FNC.

L'examen d'une fbf sous fnc permet d'établir s'il s'agit d'une formule valide ou non. En effet comme la fnc est composée des disjonctions, il suffit que dans chaque disjonction il y ait au moins une paire des littéraux complémentaires : $(p \vee \neg p \vee \cdots) \wedge (q \vee \neg q \vee \cdots) \wedge \cdots$ pour que la fbf soit valide.

FND est une disjonction des conjonctions $(p \wedge \cdots) \vee (q \wedge \cdots) \vee \cdots$

L'examen d'une fbf sous fnd permet de détecter l'inconsistance d'une fbf. En effet comme les conjonctions $(p \wedge \neg p \vee \cdots)$ sont inconsistance, il suffit que chaque conjonction contienne au moins une paire de littéraux complémentaires : $(p \wedge \neg p \wedge \cdots) \vee (q \wedge \neg q \wedge \cdots) \vee \cdots$ pour que la fbf soit inconsistance.

$\downarrow$

1.12

Exercices

EXERCICE 1.1 *Traduire les phrase suivantes*

(1) *J'aime les pâtes à la tomate et au basilic.*

(2) *Vous n'êtes pas sans savoir.*

(3) *Vous n'êtes pas sans ignorer.*

(4) *Si tu es sage, tu auras une glace.*

EXERCICE 1.2 *Considérons le connecteur $\downarrow$ dont la table de vérité est la suivante :*

p	q	$p \downarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Refaire le travail de Wittgenstein, qui définissait tous les autres connecteurs à partir de ce connecteur

EXERCICE 1.3 *Évaluer la fbf*

$(\neg p \vee q) \leftrightarrow (p \to q)$

EXERCICE 1.4 *Vérifier si la conjonction est distributive par rapport à l'implication et à l'équivalence.*

EXERCICE 1.5 *Réduire en FNC les deux fbf ci-après*

(1) $(p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

(2) $(\neg p \vee q) \to p$

EXERCICE 1.6 *Protagoras était convenu avec son élève Euathlos qu'il paierait ses leçons que lorqu'il gagnerait son premier procès. L'élève refusant de plaider, Protagoras le poursuivit en justice en faisant le raisonnement suivant :*

Il gagnera ou perdra ce procès.
S'il gagne, il me paiera afin de respecter notre accord.
S'il perd, il me paiera afin de respecter le verdict des juges.
Donc, il me paiera.

Formaliser le raisonnement de Protagoras et donnez-en une démonstration.