Département Informatique : Deuxième Année

Décidabilité T.D. N° 1

7 novembre 2010

Elements de base [1]

1 Algorithmes et complexité

Dans cet exercice, nous considérons un graphe G = (V,E) et nous étudions les deux problèmes classiques suivants :

- Accessibilité : étant donnés deux sommets s1 et s2 de G, existe-t-il un chemin allant de s1 à s2.
- Recherche d'un circuit dans G : étant donnés deux sommets s1 et s2 de G, existe-t-il un circuit passant par s1 et s2 ?

1. Trouver un algorithme pour résoudre le premier problème.
2. Calculer la complexité de cet algorithme.
3. En déduire un algorithme pour la résolution du deuxième problème et calculer sa complexité.

2 A la découverte du problème SAT

Dans cet exercice nous nous intercessions aux formules bien formées mises sous forme conjonctive normale (fcn), dans lesquelles chaque clause a exactement deux littéraux. Autrement dit, nos formules sont de la forme : $F = C_1 \wedge C_2 ... \wedge C_n$ avec $Ci = (x_{i1} \vee x_{i2})$, x_{i1} et x_{i2} étant deux littéraux. Pour étudier une telle formule, nous lui associons un graphe orienté G(F) défini comme suit :

- Les sommets du graphe sont les littéraux.
- Les arêtes sont définies comme suit :
  - Pour chaque clause de la forme $(\neg p \vee q)$,le graphe contient les arêtes (p, q) et $(\neg q, \neg p)$.
  - Pour chaque clause de la forme $(p \vee q)$,le graphe contient les arêtes $(\neg p, q)$ et $(\neg q, p)$.
  - Pour chaque clause de la forme $(\neg p \vee \neg q)$,le graphe contient les arêtes $(p, \neg q)$ et $(q, \neg p)$.

1. Ce TD est une adaptation d'un texte qui a été proposé par Houcine Senoussi.

1. Prenons $F = (p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge (\neg q \vee s) \wedge (\neg p \vee t) \wedge (\neg t \vee \neg s) \wedge (\neg r \vee s)$.
   (a) Etudier la satisfiabilité de F en utilisant la table de vérité.
   (b) Représenter le graphe G(F).
2. Démontrez la propriété suivante : Soit M un modèle de F, pour toute arête (l_1, l_2)de G(F), nous avons : Si dans M l_1 vaut VRAI alors l_2 vaut VRAI aussi.
3. Généralisiez la propriété précédente au cas de deux littéraux l_1 et l_2 tels qu'il existe un chemin allant de l_1 à l_2.
4. Déduisez une condition nécessaire et suffisante sur G(F) pour que F soit unsatisfiable.
5. Conclure de ce qui précède qu'il existe un algorithme de résolution de ce problème et donner sa complexité.

Le problème que nous venons d'étudier est le problème 2-SAT. Ce problème est un cas particulier d'un problème plus général : le problème SAT dans lequel le nombre de littéraux dans chaque clause est quelconque.

La méthode de résolution du problème 2-SAT est-elle généralisable au problème SAT ?

3 Machine de Turing

Soit la machine de Turing définie ainsi :
- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_e, q_s\}$
- $\Sigma = \Gamma \setminus \{\diamond\} = \{0, 1\}$
- $F = \{q_s\}$
- $\delta(q_0, 0) = (q_0, 0, R)$, $\delta(q_0, 1) = (q_0, 1, R)$, $\delta(q_0, \diamond) = (q_0, \diamond, L)$,
- $\delta(q_1, 0) = (q_2, \diamond, L)$, $\delta(q_0, 1) = (q_e, \diamond, L)$,
- $\delta(q_2, 0) = (q_s, \diamond, L)$, $\delta(q_2, 1) = (q_e, \diamond, L)$, $\delta(q_2, 1) = (q_e, \diamond, L)$.

Faire tourner cette machine de Turing sur les exemples suivants :
- 111011001
- 111011000
- 111011010

Trouver le problème que cette machine deTuring permet de résoudre.

4 Machine de Turing & Langage

Nous avons vu que le langage formé des mots $a^n b^n$ avec a et b deux symboles et n un entier est un langage hors-contexte donc dont les mots peuvent être reconnus par un automate à pile. Trouver une machine de Turing permettant de reconnaître les mots de ce langage.