TD (Suite)

Reconnaissance de palindromes par une MdT à 2 bandes

1. M reçoit le mot *x* en entrée. Le mot *x* est inscrit sur la bande **1**
2. La tête de lecture de **1** se place en fin de mot
3. Copier *x* sur **2** (à l'envers)
4. Se placer en tête de bande sur **2**
5. comparer symbole par symbole
6. Lecture de deux symboles $\neq \rightarrow$ sortie en échec
   Symboles Δ sur **1** et **2** $\rightarrow$ sortie en succès

===
== **Rappel de cours** **==**

== L un langage cad un ensemble de mot. **==**

== x un mot $\rightarrow$ x $\in$ L **==**

== $\rightarrow$ x $\notin$ L **==**

== **==**

== M une MdT **==**

== M décide L **==**

== $x \in L \Rightarrow M(x) = q_s$

==

== $x \notin L \Rightarrow M(x) = q_e$

==

== L est dit décidable **==**

== **==**

== M accepte L **==**

== $x \in L \Rightarrow M(x) = q_s$

==

== $x \notin L \Rightarrow M(x) = \nearrow$
==
==
==
== R : ensemble des langages décidables
==
== RE : ensemble des langages récursivement énumérables ==
== $R \subset RE$
==
==

TD 3 - Ex 2

Le problème de l’arrêt : Halting

Étant donné une MdT *M*
Étant donné un mot *x*

M s'arrête-t-elle si on lui soumet *x* en entrée ?

autrement dit $M(x) \neq \nearrow$?

Énoncé équivalent :

Étant donné un algorithme A
Étant donné une donnée x
A *s'arrête-t-il s’il reçoit x en entrée ?*

On veut démontrer que ce problème n’est pas décidable, pour cela on va travailler sur des langages associé à ce problème

$L_H = \{ (M_1,x) \ / \ M_2(x) \neq \nearrow$ }

soit M_1 : description de la MdT
soit M_2 : la MdT

$$Non\ d[?][?]cidable \Leftrightarrow Il\ n'existe\ pas\ de\ MdT\ qui\ le\ d[?][?]cide$$

Preuve par l’absurde

Supposons qu’il existe une MdT M_E qui décide L_H
càd

$$X = (M,x) \in L_H \Rightarrow M_H(X) = q_s$$
$$X = (M,x) \notin L_H \Rightarrow M_H(X) = q_e$$

Soit une MdT D qui fonctionne comme suit

- D reçoit M en entrée
- D simule le fonctionnement de M_H lorsque M_H reçoit en entrée (M,M)
- Cette simulation dure jusqu'à l'avant dernière étape
- A la dernière étape
  - si M_H termine en q_s
    D se met à se déplacer indéfiniment vers la droite
  - si M_H termine en q_e
    D termine avec succès

  càd

  $$M_H(M,M) = q_s \Rightarrow D(M) = \nearrow$$
  $$M_H(M,M) = q_e \Rightarrow D(M) = q_s$$

<u>Question :</u> $D(D) = \ ?$

2 valeurs possibles :

- $D(D) = \nearrow$
- $D(D) = q_s$

Supposons $D(D) = \nearrow$

càd

1. $M_H(M,M) = q_s$
2. $D(D) \in L_H$
3. $D(D) = q_s$

Supposons $D(D) = q_s$

càd

1. $M_H(D,D) = q_e$

   càd $(D,D) \notin L_H$

   càd $D(D) = \nearrow$

CONTRADICTION

Démontrez que l'arrêt sur le mot vide est indécidable

Formulation :

Étant donnée une MdT M

Est-ce que M s'arrête lorsqu'on lui soumet en entrée le mot vide ε?

cad a-t-on $M(\varepsilon)\not\nearrow$?

A ce problème on associe le langage L_ε défini par :

$$L_\varepsilon = \{\, M \;/\; M(\varepsilon)\not\nearrow \,\}$$

Il faut démontrer que L_ε n'est pas décidable.

Cad qu'il **n'existe pas** de MdT qui le décide.

Supposons qu'il existe une MdT U_ε qui le décide.

$$M \in L_\varepsilon \Rightarrow U_\varepsilon(M) = q_s$$
$$M \notin L_\varepsilon \Rightarrow U_\varepsilon(M) = q_e$$

A partir de là nous allons construire une MdT U_H qui décide le problème de Halting.

U_H reçoit en entrée un mot $X = (M,x)$

U_H simule le fonctionnement de U_ε lorsque U_ε reçoit en entrée la MdT M' définie ci-dessous.

Définition de M'

- M' reçoit en entrée ε
- elle copie x sur sa bande
- elle simule le fonctionnement de M

$$\begin{aligned}(M,x) \in L_H &\Rightarrow M(x)\not\nearrow \\ &\Rightarrow M'(\varepsilon)\not\nearrow \\ &\Rightarrow M' \in L_\varepsilon \\ &\Rightarrow U_\varepsilon(M') = q_s\end{aligned}$$

$$\Rightarrow U_H(X) = q_s$$

$$\begin{aligned}
&(M,x) \notin L_H \\
&\Rightarrow M(x) = \nearrow \\
&\Rightarrow M'(\varepsilon) = \nearrow \\
&\Rightarrow M' \notin L_\varepsilon \\
&\Rightarrow U_\varepsilon(M') = q_e \\
&\Rightarrow U_H(X) = q_e
\end{aligned}$$

Donc U_H décide $L_H \Rightarrow$ le problème de l’arrêt serait donc décidable.

CONTADICTION

<u>Arrêt universel</u>

Étant donné une mdt M, M s’arrête-t-elle quelque soit le mot qu’on lui soumet
cad
avons-nous

$$M(x) \neq \nearrow \ \forall x$$

<u>Arrêt existenciel</u>

Étant donnée une mdt M,
existe-t-il un mot x tel que M s’arrête lorsqu’elle reçoit x en entrée
cad
avons-nous

$$\exists x \, M(x) \neq \nearrow$$

Pour étudier ces problèmes nous leur associons les langages :

$$L_\forall = \{M \ / \ \forall x \, M(x) \neq \nearrow\}$$
$$L_\exists = \{M \ / \ \exists x \, M(x) \neq \nearrow\}$$

Pour démontrer que ces problèmes ne sont pas décidables, on suppose qu’ils le sont ensuite on déduit que Halting ou l’arrêt sur le mot vide sont décidables : **CONTRADICTION**.