Département Informatique : Deuxième Année

Décidabilité T.D. N^o 2

20 décembre 2010

Machines de Turing

1 Machine de Turing non déterministe

Définir une machine de Turing non-déterministe permettant de re-connaître les chaînes contenant un symbole précédé ou suivi par la sous-chaîne à deux symboles ab. Vérifier sur un exemple que selon la suite de transitions considérées une "bonne" chaîne peut être rejetée ou exceptée

Corrigé

- $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_s\}$
- $\Gamma = \{a, b, c, \diamond, \}$
- $\Sigma = \{a, b, c\}$
- $F = \{q_s\}$
- δ contient :
  1. $(q_1, a) \to \{(q_1, a, R)\}$, $(q_1, b) \to \{(q_1, b, R)\}$
     $(q_1, c) \to \{(q_1, c, R), (q_2, c, R), (q_3, c, L)\}$.
  2. $(q_2, a) \to \{(q_4, a, R)\}$.
  3. $(q_3, b) \to \{(q_5, b, L)\}$.
  4. $(q_4, b) \to \{(q_s, b, R)\}$.
  5. $(q_5, a) \to \{(q_s, a, L)\}$.

2 Machines de Turing à plusieurs bandes

Définir une machine de Turing (à une bande) permettant de reconnaître un palindrome. Définir une machine de Turing à plusieurs bandes permettant de re- connaître un palindrome.

3 Machine de Turing & Calcul

Construire une machine de Turing qui calcule la somme de deux nombres représentés en notation binaire.

Corrigé Nous supposons que les deux nombres à additionner (de longueur supérieur à 1 chacun) sont écrits l'un après l'autre séparés par le symbole x. On suppose aussi que le bit le plus proche du début du ruban est le moins significatif.

A,B,C représentent respectivement, le 0,1 et le 2 et servent à retenir la somme du chiffre courant du premier nombre et du report. Chaque fois qu'un bit est traité, la frontière x est déplacée vers la droite et le premier nombre est étendu par un 0.

- $Q = \{q_0, q_0', q_1, q_2, q_3, q_3', q_4, q_5, q_5'\}$
- $\Gamma = \{0, 1, x, A, B, C, \diamond\}$
- $\Sigma = \{0, 1, x\}$
- $F = \{q_5\}$
- δ contient :

  1. q_0 mémorise le chiffre du premier nombre à additionner (A,B ou C), q_0' signifie qu'il y avait déjà 1 à prendre en compte. On passe ensuite à q_1.

     $(q_0, 0) \rightarrow (q_1, A, R)$, $(q_0', 0) \rightarrow (q_1, B, R)$
     $(q_0, 1) \rightarrow (q_1, B, R)$, $(q_0', 1) \rightarrow (q_1, C, R)$

  2. q_1 cherche la fin du premier nombre et remplace le séparateur x par 0.

     $(q_1, 0) \rightarrow (q_1, 0, R)$, $(q_1, 1) \rightarrow (q_1, 1, R)$
     $(q_1, x) \rightarrow (q_2, 0, R)$, $(q_1, \diamond) \rightarrow (q_4, \diamond, L)$

  3. q_2 récupère le deuxième chiffre (q_3 si 0, q_3' si 1) à additionner et le remplace par le séparateur x.

     $(q_2, 0) \rightarrow (q_3, x, L)$, $(q_2, 1) \rightarrow (q_3', x, L)$
     $(q_2, \diamond) \rightarrow (q_3, \diamond, L)$

  4. q_3 retourne sur la bande et remplace le chiffre du premier nombre à additionner par la somme des deux chiffres.

     $(q_3, 0) \rightarrow (q_3, 0, L)$, $(q_3', 0) \rightarrow (q_3', 0, L)$
     $(q_3, 1) \rightarrow (q_3, 1, L)$, $(q_3', 1) \rightarrow (q_3', 1, L)$
     $(q_3, A) \rightarrow (q_0, 0, R)$, $(q_3', A) \rightarrow (q_0, 1, R)$
     $(q_3, B) \rightarrow (q_0, 1, R)$, $(q_3', B) \rightarrow (q_0', 0, R)$

$(q_3, C) \rightarrow (q'_0, 0, R)$, $(q'_3, C) \rightarrow (q'_0, 1, R)$

5. $(q_4, 0) \rightarrow (q_4, 0, L)$, $(q_4, 1) \rightarrow (q_4, 1, L)$
   $(q_4, A) \rightarrow (q_5, 0, R)$, $(q_4, B) \rightarrow (q_5, 1, R)$
   $(q_4, C) \rightarrow (q'_5, 0, R)$

6. $(q'_5, 0) \rightarrow (q_5, 1, R)$, $(q'_5, 1) \rightarrow (q'_5, 0, R)$

4 Devinette ! !

Que peut-on dire à propos d'un langage accepté par une machine de Turing M si les toutes les transitions de M déplacent la tête de lecture vers la droite ?

Corrigé La machine M ne mémorise rien sur sa bande puisqu'elle ne revient jamais sur une case visitée. Elle ne fait que lire de gauche à droite le mot d'entrée, elle peut donc être simulée par un automate fini. Le langage accepté par M est donc régulier.