Décidabilité - EISTI - ING 2

Yannick Le Nir

Ecole Internationale des Sciences du Traitement de l'Information

yannick.lenir@eisti.fr

Machine de Turing (MT)

Algorithmes

Les machines de Turing sont idéales pour résoudre certains problèmes sur les chaînes de caractères :

- Fonctions calculées sur les chaînes
- Langages acceptés
- Langages décidés

Langage décidé par une MT

Définition

Soit $L \subset (\Sigma - \{\diamond\})^*$ un langage. Soit M une machine de Turing telle que pour toute chaîne $x \in (\Sigma - \{\diamond\})^*$, si $x \in L$ alors $M(x) = "yes"$ et si $x \notin L$, alors $M(x) = "no"$.
On dit alors que M décide L.

Définition

Si L est décidé par une machine de Turing, alors L est un *langage récursif*.

Exemple

Le langage des palindromes sur $\{0, 1\}$ constitue un langage récursif.

Langage accepté par une MT

Définition

Une MT M accepte un langage L, si pour toute chaîne $x \in (\Sigma - \{\diamond\})^*$, si $x \in L$ alors $M(x) = "yes"$. Cependant, si $x \notin L$, alors $M(x) = \emptyset$ (M ne s'arrête pas).

Définition

Si L est accepté par une MT, alors L est *récursivement énumérable*

Proposition

Si L est récursif, alors il est récursivement énumérable

Fonction calculée par une MT

Définition

Soit f une fonction de $(\Sigma - \{\diamond\})^*$ vers Σ^*, et M une MT d'alphabet Σ. On dit que M calcule f si, pour toute chaîne $x \in (\Sigma - \{\diamond\})^*$, $M(x) = f(x)$.

Définition

Si un tel M existe, f est une *fonction récursive*.

Exemple

La fonction f de $\{0,1\}^*$ vers $\{0,1,\diamond\}^*$ telle que $f(x) = \diamond x$ est récursive.
La fonction s qui calcule le successeur d'un nombre binaire également.

Problématique initiale

Rappel

Etablir une notation pour décrire les algorithmes permettant de traiter les problèmes classiques dont les instances sont des objets mathématiques tels que : les graphes, les réseaux, les nombres, ...

Solution

- Représenter par une chaîne une instance du problème à résoudre.
- Définir une MT qui décide du langage correspondant
- Cette MT doit accepter les entrées représentant des instances positives du problème et rejeter les autres.
- Les problèmes nécessitant des réponses plus élaborées peuvent être résolus par une MT calculant la fonction appropriée de chaîne à chaîne.

Machines de Turing Universelles

Problématique

Comment traiter un problème général, et ne pas définir une nouvelle MT pour chaque problème.

Solution

Une machine de Turing Universelle U doit :

- Interpréter son entrée et la placer en entrée d'une autre MT, M, concaténée avec l'entrée de cette machine, notée x.
- Le but de U est de simuler le comportement de M dont l'entrée est x.
- On notera $U(M; x) = M(x)$

Machines de Turing Universelles

Précisions

- U ne peut à priori pas connaître le nombre d'états et de symboles nécessaires pour résoudre le problème.
- Nous assumerons donc que les états et les symboles de U sont des entiers.

Exemple de codage

Si $M = (\mathcal{Q}, \Sigma, \delta, s)$:

- $\Sigma = \{1, 2, ..., |\Sigma|\}$
- $\mathcal{Q} = \{|\Sigma| + 1, ..., |\Sigma| + |\mathcal{Q}|\}$
- L'état initial s est $|\Sigma| + 1$
- Les nombres $|\Sigma| + |\mathcal{Q}| + 1, ..., |\Sigma| + |\mathcal{Q}| + 6$ encodent les symboles spéciaux $\leftarrow$, $\rightarrow$,$-$,h,"yes" et "no".
- Les nombres nécessaires à l'exécution de U seront représentés en binaire par $\{log(|\mathcal{Q}| + |\Sigma| + 6)\}$ bits complétés par des 0 pour avoir une longueur unique.

Machines de Turing Universelles

Description d'une MT

1. Une MT, $M = (\mathcal{Q}, \Sigma, \delta, s)$, commence par le nombre $|\mathcal{Q}|$ en binaire, suivi par $|\Sigma|$, suivi par la description de δ. La description de δ est une séquence de paires de la forme $((q, \sigma), (p, \rho, D))$, utilisant les symboles "(", ")", ",", etc..., tous appartenant à l'alphabet de U.
2. La description de M, en entrée de U, est suivie par le symbole " ;", puis la description de "x", à nouveau encodé en entiers binaires séparés par des ",".

Machines de Turing Universelles

Description de U

- La MT U, d'entrée $M; x$ simule M d'entrée x.
- La simulation est plus évidente avec une machine à deux rubans, dont le comportement est équivalent à une machine à simple ruban.
- U utilise le second ruban pour sauvegarder la configuration courante de M.
- La configuration (w, q, u) est sauvegarder par w, q, u, qui correspond à l'encodage de la chaîne w, suivie par ",", suivi par l'encodage de l'état q, puis, ",", puis enfin par l'encodage de u.
- Le second ruban contient initialement l'encodage du symbole de départ suivi de l'encodage de s puis de l'encodage de x.

Machines de Turing Universelles

Simulation de M

- U lit le second ruban jusqu'à ce qu'il y trouve la description binaire de l'entier correspondant à un état (compris entre $|\Sigma| + 1$ et $|\Sigma| + |K|$
- U cherche la première chaîne d'une règle de δ correspondant à l'état courant.
- Si U trouve une telle chaîne, M change d'état sur le second ruban pour comparer le symbole lu avec celui de la règle sélectionnée.
- En cas de non correspondance, une autre règle adéquate est recherchée
- En cas de correspondance, la règle est implémentée (changement du symbole et de l'état courant sur le second ruban et déplacement)
- Quand M s'arrête, U également.