

Décidabilité - Compléments sur les machines de Turing

Maria Malek

14 novembre 2010

Extension des machines de Turing

Ruban infini dans les deux sens

Rubans multiples

Machine de Turing non déterministe

Ruban infini dans les deux sens -1

Le ruban est infini dans les deux sens.

- ▶ La tête de lecture peut toujours se déplacer vers la gauche.
- ▶ Nous pouvons démontrer que tout langage accepté ou décidé par ce type de machine de Turing l'est aussi par une machine dont le ruban est infini dans un seul sens
- ▶ **Idée de la démonstration** transformer le ruban infini dans les deux sens en un ruban infini dans un seul sens : (en le pliant !!).

...	a-3	a-2	a-1	a0	a1	a2	a3	...
-----	-----	-----	-----	----	----	----	----	-----

a0	a1	a2	a3	...				
\$	a-1	a-2	a-3	...				

Ruban infini dans les deux sens -2

Le ruban est infini dans les deux sens.

- ▶ **Éléments de la démonstration** transformer le ruban infini dans les deux sens en un ruban infini dans un seul sens : (en le pliant !!).

...	a-3	a-2	a-1	a0	a1	a2	a3	...
-----	-----	-----	-----	----	----	----	----	-----

a0	a1	a2	a3	...				
\$	a-1	a-2	a-3	...				

- ▶ Soit $M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, s, \diamond, F)$ la machine avec ruban infini dans les deux sens.
- ▶ Définissons : $M = (Q', \Gamma', \Sigma', \delta', s', \diamond', F')$ la machine avec un ruban infini dans un sens.

Ruban infini dans les deux sens -3

Le ruban est infini dans les deux sens.

► Éléments de la démonstration

- $\Gamma' = \Gamma_X(\Gamma \cup \{\$\})$
- $\Sigma' = \Sigma_X\{\diamond\}$: l'alphabet d'entrée est composé de paires d'éléments dont le premier est dans Σ et le deuxième est le blanc.
- $\diamond' = \diamond_X\diamond$
- $Q' = Q_X\{U, D\} \cup \{s'\}$: les états de M' sont les état de M auxquels on associe l'information (Up ou Down) pour exprimer le fait qu'on soit dans la partie gauche ou droite de la machine M . s' est ajouté aussi et correspond à l'état initial de M' .
- $F' = F_X\{U, D\}$
- Exemple de transition :

$$\delta'(s', (x, \diamond)) = \begin{cases} ((q, U), (y, \$), R) & \text{si } \delta(s, x) = (q, y, R) \\ ((q, D), (y, \$), R) & \text{si } \delta(s, x) = (q, y, L) \end{cases}$$

Rubans multiples - 1

Plusieurs rubans et plusieurs têtes de lecture.

- ▶ On peut simuler cette machine par une machine à seul ruban
- ▶ On utilise les symboles composés décrivant le contenu des différents rubans, et la position des têtes de lecture.
- ▶ Par exemple : pour une machine à deux rubans, l'alphabet est un quadruplet :
 - ▶ Deux éléments du quadruplet sont utilisés pour représenter le contenu des deux rubans.
 - ▶ Deux autres pour déterminer la position de la tête de lecture (la valeur de cet élément est égale à 1 à l'endroit où se trouve la tête, 0 ailleurs)

Rubans multiples - 2

Plusieurs rubans et plusieurs têtes de lecture.

- ▶ On peut simuler cette machine par une machine à seul ruban
- ▶ On utilise les symboles composés décrivant le contenu des différents rubans, et la position des têtes de lecture.
- ▶ Par exemple : pour une machine à deux rubans, l'alphabet est un quadruplet.
- ▶ Simulation d'une étape d'une exécution : pour une machine à deux rubans :
 - ▶ Trouver la position de la tête de lecture et déterminer les symboles lus.
 - ▶ Modifier ces symboles, déplacer les têtes de lecture et changer d'état.

Machine de Turing non déterministe

- ▶ Une machine de Turing non déterministe est identique à une machine de Turing déterministe sauf pour la fonction de transition :
 - ▶ La fonction de transition associe à un couple état symbole ($Q \times \Gamma$) un ensemble de triplet dans : $\{Q \times \Gamma \times \{L, R\}, \}$ et non pas un seul triplet.
 - ▶ Autrement dit, la machine peut choisir n'importe lequel de ces triplet (d'où le non déterminisme).
 - ▶ Une machine de Turing non déterministe n'a pas une exécution unique, mais il suffit que l'une de ces exécutions arrive à l'état final pour que la machine accepte.
- ▶ **Théorème** : Tout langage accepté par une machine de Turing non déterministe est aussi accepté par une machine de Turing déterministe.

Machine de Turing Universelle

- ▶ Une machine de Turing qui peut simuler n'importe quelle machine de Turing.
- ▶ Une machine M à laquelle on fournit : la description d'une machine de Turing M' et un mot d'entrée w .
- ▶ M doit simuler le comportement de M' sur w .