

J'ai constaté que le 1^{er} exercice n'a pas été compris par la promotion, donc j'ai décidé de noter le 2^{ème} exercice sur 20. Des points en plus seront néanmoins accordés aux élèves ayant abordé le 1^{er} exercice.

Solution de l'exercice 2 :

Le marché comporte 3 actifs et a pour matrice normalisé $Z = \begin{pmatrix} 0,9 & 1,8 & 2 \\ 0,8 & 0,4 & 3 \\ 1,3 & 0,95 & 0 \\ 1,5 & 0,8 & 0 \end{pmatrix}$

Le 3^{ème} actif est le put sur l'action S_1^i qui a pour pay off :

$$P_1(\omega_1) = 20 \quad P_1(\omega_2) = 30 \quad P_1(\omega_3) = P_1(\omega_4) = 0 \quad \text{avec } P_0 = 10$$

Calcul des β

$$\begin{pmatrix} 0,9 & 0,8 & 1,3 & 1,5 \\ 1,8 & 0,4 & 0,95 & 0,8 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La solution est

Pour qu'il y ait A.O.A., on doit avoir $1 \leq i \leq 4 \Rightarrow 0 < \beta_i < 1$ (0)

$$\begin{cases} \beta_1 = 0,261 + 0,234 \beta_4 & (1) \\ \beta_2 = 0,159 - 0,156 \beta_4 & (2) \\ \beta_3 = 0,49 - 1,22 \beta_4 & (3) \end{cases}$$

$$(3) \text{ et } (0) \quad \beta_4 > 0 \text{ et } \beta_3 > 0 \Rightarrow \beta_4 > 0 \text{ et } 0,49 > 1,22 \beta_4 \Rightarrow 0 < \beta_4 < \frac{0,49}{1,22} \approx 0,4$$

$$\text{Par ailleurs } \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = \frac{1}{1+r}$$

$$(0,261 + 0,234 \beta_4) + (0,159 - 0,156 \beta_4) + (0,49 - 1,22 \beta_4) + \beta_4 = \frac{1}{1+r} \Rightarrow 0,91 - 0,142 \beta_4 = \frac{1}{1+r}$$

$$0,91 - 0,142 \beta_4 = \frac{1}{1+r} \text{ et } \beta_4 < 0,4 \Rightarrow 0,85 < \frac{1}{1+r} < 0,91 \Rightarrow 1,099 < 1+r < 1,176 \Rightarrow 9,9\% < r < 17,6\%$$

Prenons $r = 15\%$: la formule de la parité call-put nous donne

$$C_0 + \frac{K}{1+r} = p_0 + S_0 \Rightarrow C_0 = 10 + 100 - \frac{110}{1,15} = 14,135$$

NB : Vous pouvez faire une vérification en calculant : $C_0 = 20 \beta_3 + 40 \beta_4$