Processus à temps discret - Mouvement Brownien - Evaluation des actifs contingents - Partie évolution des contingents

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Financial asset : Contrat qui engendre un flux d'argent.

Dérivé financier : Contrat qui engendre des flux d'autres produits financiers (compte de banque, actions).

Notation :

$$(x)_+ = \begin{cases} x \quad si \quad x \geq 0 \\ 0 \quad si \quad x < 0 \end{cases}$$

Exemple : Soit une action de prix S_t à la date t, de call européen, de stike K et de maturité T. On paye :

$$\begin{cases} S_t - K \quad si \quad S_t \geq K \\ 0 \quad si \ S_t < K \end{cases}$$

On définit le pay-off : $X = (S_t - K)_+$.
Prenons l'exemple d'une action AXA. A $t = 0$, son prix est de €16 à $t = 0$. Soit $T = 1$ an et $K = €15$.
Si $S_T - K \geq 0$: on vend à €20, alors on a un bénéfice de €5. Le cours de l'action augmente.
Si $S_T - K < 0$: on vend à €14, alors 14 - 15 = -1 $\Longrightarrow (14 - 15)_+ = 0$ (diminution du cours de l'action).

Remarque : Il existe des dérivés financiers depuis des milliers d'années. Le problème est de trouver le prix d'une dérivée.

Rôles des produits dérivés : couvrir les risques (hedge), opportunité d'arbitrage.

Opportunité d'arbitrage : Possibilité de consulter un portefeuille à $t = 0$. Par exemple, à $t = 0$, on achète un portefeuille θ pour un prix de € 0 : $V_0(\theta) = 0$

(valeur du portefeuille θ à l'instant $t = 0$, qui est une variable aléatoire). A $t = T$ (vente du portefeuille), si $V_T(\theta) \geq 0$ (avec $P[V_T(\theta) > 0] > 0$), alors ce portefeuille est appelé opportunité d'arbitrage.

Actifs sous-jacents : (Actifs de bases) Prix des actions (**Spot** = prix aujourd'hui à la Bourse, prix coté, prix dans la période en cours), future price of stock, exchange rate (\$, €, £) :

A Forward contract : déterminer le prix de livraison tel que le prix de contrat soit nul.

B Option :

- *European Call Option* : Contrat qui stipule que l'on peut acheter le sous-jacent, mais on est pas obligé. La date d'exercice est fixée à l'avance. Si $S_T \geq K$, on exerce et si $S_T < K$, on exerce pas. Donc le pay-off vaut $(S_T - K)_+$, i.e. $S_T - K$ si $S_T \geq K$.
- *American Call Option* : Comme l'European Call Option sauf qu'on choisit nous même quand on veut vendre.
- *Put Option* : Choix de vendre une action à un prix très spécifié.

Chapitre 2

Market Models

2.1 Definitions

Mono Period Models : $\mathbb{T} = \{0, T\}$. Entre 0 et T, on a pas le droit de modifier le portefeuille. En $t = 0$ ou $t = T$, on peut vendre ou acheter.

Discrete Time Models : $\mathbb{T} = \{0, 1, ..., T\}$. Par exemple, on peut changer de portefeuille toutes les semaines.

Continuous Time Models : $\mathbb{T} = [0, T]$. Beaucoup plus simple et réaliste.

2.2 Arbitrage Pricing

Arbitrage Portfolio : Soit $\theta_t = \begin{pmatrix} \theta_t^0 \\ \theta_t^1 \\ . \\ . \\ . \\ \theta_t^N \end{pmatrix}$, un vecteur composé d'unités d'actions avec θ_t^0 correspondant à ce que l'on a sur le compte en banque. Pour un portefeuille autofinancier, on peut changer θ à chaque instant $t_i \in \mathbb{T}$ sans changer sa valeur i.e. si $V_0(\theta) =$ € 100 et $V_1(\theta) =$ € 80, on peut changer de portefeuille en $t = 1$ mais le nouveau portefeuille coûte € 80.
Un arbitrage portfolio est un self financial portfolio tel que $V_t(\theta)$ à $t \in \mathbb{T}$ vérifie :

$$\begin{cases} V_0(\theta) = 0 \\ V_T(\theta) \geq 0 \\ P[V_T(\theta) > 0] > 0 \end{cases}$$

Arbitrage Free Market : $\nexists$ arbitrage portfolio (AOA : absence d'opportunité d'arbitrage).

Efficient Market Hypothesis : Le prix des actifs reflète toute l'information disponible sur le marché des actifs financiers. Pour nous, il s'agira d'un AOA.

2.3 Frictionless and Ideal Market (Hypothesis)

1. Le nombre des actifs financiers ne change pas le temps (faux en réalité car il existe des boites qui font faillites, d'autre qui sont créées).
2. Les prix peuvent prendre des veleurs $\mathbb{R}$. Pas de dividendes payés.
3. On peut acheter n'importe qu'elle quantité de chaque actif.
4. Les taux d'intérêt emprunt / prêt sont égaux.
5. La quantité d'actif acheté n'influe pas sur le prix de l'action.
6. Toute information est publique.

Chapitre 3

Mono Period Market

3.1 Probabilistic model

- $\mathbb{T} = \{0, T\}$
- $(\Omega, P, \mathcal{F})$
- $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_{\overline{K}}\}$ où $\overline{K}$ = nombre d'évènements et $p_i = P(\omega_i) > 0$.
- N actifs risqués $S^1, ..., S^N$.
- S^0 = compte de banque.
- **Spot price à $t = 0$:** $S_0 = (S_0^1, ..., S_0^N) \in \mathbb{R}^N$ if N assets, $S_0 = (S_0^0, S_0^1, ..., S_0^N) \in \mathbb{R}^{N+1}$ with $S_0^0 > 0$ if $N+1$ assets.
- **Spot price à $t = T$:** random vector $S_T = (S_T^1, ..., S_T^N) \in \mathbb{R}^N$ if N assets, $S_T = (S_T^0, S_T^1, ..., S_T^N) \in \mathbb{R}^{N+1}$ if $N+1$ assets.
- **Interest rate r :** $S_T^0 = (1+r)S_0^0 \Longrightarrow 1 + r > 0$. Entre t et $t+1$, $S_{t+1}^0 = (1+r_t)S_t^0$ où r_t est le taux spot.
- **Portfolio :** On note θ^i le nombre d'unité. $\theta = (\theta^1, ..., \theta^N) \in \mathbb{R}^N$ if N assets, $\theta = (\theta^0, ..., \theta^N) \in \mathbb{R}^{N+1}$ if $N+1$ assets.
- **Value of a portfolio :** A $t = 0$, $V_0(\theta) = \sum_i \theta^i S_0^i = \theta S_0 \in \mathbb{R}$. A $t = T$, $V_T(\theta) = \sum_i \theta^i S_T^i = \theta S_T$ variable aléatoire de $\mathbb{R}$
- **Gains de $0 \to T$:** $G(\theta) = V_T(\theta) - V_0(\theta) = \theta(S_T - S_0)$ variable aléatoire de $\mathbb{R}$.
- **Evolution :** $V_0(\theta) \to \begin{cases} \to (V_{\overline{T}}(\theta))(\omega_1) \\ \to (V_{\overline{T}}(\theta))(\omega_2) \\ ... \\ \to (V_{\overline{T}}(\theta))(\omega_{\overline{K}}) \end{cases}$
- **Prix actualisés :** $\overline{S_t^i} = \dfrac{S_t^i}{S_t^0}$ = valeur des actions exprimées en compte de banque.
- **Gains actualisés :** $\overline{V_T(\theta)} - \overline{V_0(\theta)} = \overline{G(\theta)}$ avec $\overline{V_t(\theta)} = \theta\overline{S_t}$.

Si $\theta = \begin{pmatrix} \theta^0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}$, alors $\overline{G(\theta)} = \theta(\overline{S_T} - \overline{S_0}) = \theta^0(\overline{S_T^0} - \overline{S_0^0}) = 0$. Donc *le gain actualisé d'un compte en banque est nul.*

– **Matrix :** $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_T^0(\omega_1) & . & . & . & S_T^N(\omega_1) \\ . & & . & & . \\ . & & & . & . \\ . & & & . & . \\ S_T^0(\omega_K) & . & . & . & S_T^N(\omega_K) \end{pmatrix}$ et $\mathbf{V} = \mathbf{S} \begin{pmatrix} \theta^0 \\ . \\ . \\ . \\ \theta^N \end{pmatrix}$

3.2 Arbitrage & equivalent martingale measure

Exemple : Soit un marché avec un compte de banque, deux actions S^1 et S^2 de taux spot $r = 6\%$. Soit $\Omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ avec $P(\{\omega_1\}) = \frac{1}{2}, P(\{\omega_2\}) = P(\{\omega_3\}) = \frac{1}{4}$. Le prix des actions peut évoluer de $t = 0$ à $t = T$.

S^1	S^2
$S_0^1 = €100$	$S_0^2 = €100$
$S_T^1(\omega_1) = €120$	$S_T^2(\omega_1) = €140$
$S_T^1(\omega_2) = €100$	$S_T^2(\omega_2) = €120$
$S_T^1(\omega_3) = €80$	$S_T^2(\omega_3) = €30$

On travail avec une call européenne de strike $K = €100$. Le pay-off à la maturité pour S^1 est $X = (S_T^1 - K)_+$. Donc $X(\omega_1) = €20$, $X(\omega_2) = €10$, $X(\omega_3) = €0$. Vous avez payé $\Pi_0(X)$ à $t = 0$.

$$\Pi_0(X) = ?$$

Mesure martingale équivalent : $\exists Q$ probabilité telle que $\Pi_0(X) = E_Q\left[\frac{X}{1+r}\right]$.

Retour sur l'exemple :

$$E_P\left[\frac{X}{1+r}\right] = \frac{X}{1+r}E_P[X] = \frac{X}{1+r}\left(X(\omega_1).\frac{1}{2} + X(\omega_2).\frac{1}{4} + X(\omega_3).\frac{1}{4}\right) = 11,79$$

Arbitrage Portfolio : Satisfait

A) $\begin{cases} V_0(\theta) = 0 \\ V_T(\theta) \geq 0 \Leftrightarrow (V_T(\theta))(\omega) = 0, \ \forall \omega \in \Omega \\ P[V_T(\theta) > 0] > 0 \end{cases}$ ou **B)** $\begin{cases} V_0(\theta) < 0 \\ V_T(\theta) \geq 0 \end{cases}$

Attention : valable uniquement en cas monoperiod.

Actif d'Arrow- Debreu : $e_i(\omega_i) = 1$ et $e_i(\omega_j) = 0$ pour $i \neq j$

State price vector : (vecteur de prix d'Etat) Soit $\Omega = (\omega_1, ..., \omega_i, ..., \omega_K)$. On a $e_1(\omega_1) = 1, e_1(\omega_i) = 0, e_1(\omega_K) = 0$ etc ... Soit β_i le prix à $t = 0$ de e_i. On note $\beta = (\beta_1, ..., \beta_K)$ ***le vecteur de prix d'état***. Supposons que β est donné.

Trouver le prix d'un produit dérivé avec le pay-off X.

1. Soit X un produit dérivé qui paye x dans ω_i et 0 dans $\omega \neq \omega_i$ i.e. $X(\omega) = 0$ pour $\omega \neq \omega_i$ et $X(\omega_i) = x$. Le prix à $t = 0$ est $x\beta_i$.
2. Soit X un pay-off général (variable aléatoire) : Dans ω_i, X paye $X(\omega_i)$.

$$X(\omega) = X(\omega_1)e_1(\omega) + ... + X(\omega_K)e_K(\omega)$$

$$X(\omega_i) = X(\omega_1)e_1(\omega_i) + ... + X(\omega_K)e_K(\omega_i) = X(\omega_i)e_i(\omega_i) = X(\omega_i)$$

Donc :

$$X = X(\omega_1)e_1 + ... + X(\omega_K)e_K$$

Calculons de prix à $t = 0$ de X.

$$\Pi_0(X) = \Pi_0(X(\omega_1)e_1) + ... + \Pi_0(X(\omega_K)e_K) = X(\omega_1)\Pi_0(e_1) + ... + X(\omega_K)\Pi_0(e_K)$$

$$\Pi_0(X) = X(\omega_1)\beta_1 + ... + X(\omega_K)\beta_K = \sum_{j=1}^{K} X(\omega_j)\beta_j$$

On a :

$$\Pi_0(S_T^1) = \sum_{j=1}^{K} S_j^1\beta_j$$

$$\Pi_0(S_T^2) = \sum_{j=1}^{K} S_j^2\beta_j$$

$$\cdots$$

$$\Pi_0(S_T^N) = \sum_{j=1}^{K} S_j^N\beta_j$$

$$if\ \exists S^0,\quad \Pi_0(S_T^0) = \sum_{j=1}^{K} S_j^0\beta_j$$

Retour sur l'exemple : $S_T^0 = 1 + r$ et

S^1	S^2
$S_0^1 = €100$	$S_0^2 = €100$
$S_T^1(\omega_1) = €120$	$S_T^2(\omega_1) = €140$
$S_T^1(\omega_2) = €100$	$S_T^2(\omega_2) = €120$
$S_T^1(\omega_3) = €80$	$S_T^2(\omega_3) = €30$

$$\Pi_0(S_T^0) = (1+r)\beta_1 + (1+r)\beta_2 + (1+r)\beta_3 = 1$$
$$\Pi_0(S_T^1) = 120\beta_1 + 100\beta_2 + 80\beta_3 = 100$$
$$\Pi_0(S_T^2) = 140\beta_1 + 120\beta_2 + 30\beta_3 = 100$$

On obtient un système linéaire de 3 équations à 3 inconnues, on en déduit facilement β_1, β_2 et β_3.
Convention : $S_0^0 > 0$ et $S_0^0 = 1$.

Theorème : $\nexists$ an arbitrage portfolio if and only of $\exists \beta$ such as $\beta_i > 0,\ \forall\, 1 \leq i \leq \overline{K}$.
(AOA $\iff \exists \beta,\ \beta_i > 0,\ \forall\, 1 \leq i \leq \overline{K}$)

Definition :

$$(1+r)\sum_j \beta_j = 1 \iff \frac{1}{1+r} = \sum_j \beta_j$$

On note :

$$\boxed{q_i = (1+r)\beta_j}$$

On a que : AOA $\iff \beta_j > 0, \forall j \implies q_i > 0 \;\; et \;\; \sum_i q_i = 1$.

On peut utiliser cette notation probabiliste :

$$\boxed{q_i = Q(\{\omega_i\})}$$

Donc :

$$\Pi(S_0^j) = \sum_k S^j(\omega_k)\frac{q_i}{1+r} = E_Q\left[\frac{S^j}{1+r}\right]$$

Donc :

$$S_0^j = E_Q\left[\frac{S_T^j}{1+r}\right]$$

Equivalent Martingale Measure e.m.m. (ou m.m.e.) : An Equivalent Martingale Measure (e.m.m.) Q is a probability measure on $(\Omega, \mathcal{F})$ equivalent to P, such that for some $r > -1$ and $\forall i$,

$$S_0^i = E_Q\left[\frac{S_T^i}{1+r}\right]$$

Relation de parité Call - Put : Soit C_t (respectivement P_t) le prix à t d'un Call (respectivement d'un Put) de même strike et de taux r.

$$C_T = (S_T - K)_+$$

$$P_T = (K - S_T)_+$$

$$\Rightarrow \quad C_T - P_T = \begin{cases} S_T - K & si \quad S_T \geq K \\ S_T - K & si \quad S_T \leq K \end{cases} \quad \Rightarrow \quad C_T - P_T = S_T - K$$

$\Rightarrow \quad C_0 - P_0 = S_0 - \dfrac{K}{1+r}$ où $1+r$ est le taux d'actualisation.

Arbitrage : Possibilité de profiter des taux de change pour faire des bénéfices.

Hedging Portfolio : Un produit dérivé X est duplicable (hedgeable) si il existe θ portefeuille tel que $V_T(\theta) = X$. θ est un portefeuille de couverture X.

Définition : $\mathcal{M}$ définit le marché des sous-jacents de l'ensemble des portefeuilles regroupant les actifs.

Théorème : $\mathcal{M}$ marché darbitrage :

1. $\mathcal{M}'$ free arbitrage
2. $\exists Q$ m.m.e., $\exists r$ rate tel que $x = E_Q\left[\dfrac{X}{1+r}\right]$
3. $\exists \beta$ tel que $\forall 1 \leq i \leq \overline{K}$, $\quad x = \sum_{1 \leq i \leq \overline{K}} X(\omega_i)\beta_i$

Définition : X duplicable $\Leftrightarrow \quad \exists \theta$ portfolio tel que $X = V_T(\theta)$

Marché financier : Tous les produits dérivés sont duplicables (et chaque produit dérivé à un prix unique).

Exemple : En mono-marché avec $r = 10\%$.

S^1	S^2
$S^1_0 = €100$	$S^2_0 = €100$
$S^1_T(\omega_1) = €88$	$S^2_T(\omega_1) = €132$
$S^1_T(\omega_2) = €110$	$S^2_T(\omega_2) = €88$
$S^1_T(\omega_3) = €132$	$S^2_T(\omega_3) = €110$

Trouver le hedging portfolio d'un put de S^1 avec $K = €105$.

Résolution. Trouvons θ tel que $V_T(\theta) = X$.
On a trouvé avant $X(\omega_1) = 17$ et $X(\omega_2) = X(\omega_3) = 0$.

$V_T(\theta) = \theta.S_T = \sum_{i=0}^{3} S^i_T.\theta^i = X$ avec $S^0_0 = 1$.

Donc, avec $1+r=\dfrac{11}{10}$,

$$\begin{cases} \omega_1 = (1+r)\theta^0 + 88\theta^1 + 132\theta^2 = 17 \\ \omega_2 = (1+r)\theta^0 + 110\theta^1 + 88\theta^2 = 0 \\ \omega_3 = (1+r)\theta^0 + 132\theta^1 + 110\theta^2 = 0 \end{cases}$$

D'un point de vue matriciel, on peut écrire $X = S\theta$, avec $S_{i,j} = S^j(\omega_i)$. On a donc $\theta = S^{-1}X$.
Ici

$$\theta = \left(\frac{170}{35}, -\frac{17}{66}, \frac{17}{66}\right)$$
$$V_0(\theta) = \frac{170}{33}$$

Explications : A $t=0$, on peut soit faire un achat de Put avec pay-off(1) X, soit faire un achat du portefeuille de couverture θ avec le pay-off(2) X à T. A $t=T$, pay-off (1) = pay-off(2).
Supposons qu'à $t=0$, $P_0 > V_0(\theta)$ et qu'à $t=T$, $P_T = V_T(\theta) = X$. Alors il existe une opportunité d'arbitrage. Sinon AOA $\Rightarrow P_0 = V_0(\theta)$.

Attention : Pour un hedging portfolio, $V_0(\theta) = E_Q\left[\dfrac{X}{1+r}\right]$

Preuve. X duplicable, $V_T(\theta) = X$.

$$E_Q\left[\frac{V_T(\theta)}{1+r}\right] = E_Q\left[\frac{\sum_{i=0}^{N}\theta^i S_T^i}{1+r}\right] = \sum_{i=0}^{N}\theta^i E_Q\left[\frac{S_T^i}{1+r}\right] = \sum_{i=0}^{N}\theta^i S_0^i = V_0(\theta)$$

car Q m.m.e.
On note $\mathcal{M}'$ le marché sous-jacent des produits dérivés. On a

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} S_0^0 \\ S_0^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ S_0^N \\ x \end{pmatrix} \qquad \mathcal{M}' = \begin{pmatrix} S_T^0 \\ S_T^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ S_T^N \\ X \end{pmatrix}$$

La dernière ligne de la matrice correspond aux produits dérivés, notamment x correspond au prix à $t=0$ de X.

Quels sont les x possibles ?

Il faut qu'il y ait AOA dans $\mathcal{M}'$.

Si X est duplicable, $x = E_Q\left[\frac{X}{1+r}\right]$ et x est unique.

Théorème : $\mathcal{M}$ est complet et AOA $\Leftrightarrow \exists !\ Q$ m.m.e.

Attention : Si $S^0, ..., S^N$ $N+1$ actifs, $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_{N+1}\}$ et $S_{i,j} = S^j(\omega_i)$, alors $det(S) \neq 0 \Rightarrow$ marché complet ou AOA si Q est m.m.e.

Définition : $\mathcal{M}e = \{$m.m.e Q $\}$
Marché incomplet avec AOA $\Leftrightarrow \mathcal{M}e \neq \emptyset$, $\mathcal{M}e$ n'est pas un singleton.

Définition : Soit X un produit dérivé non duplicable.

Quels sont les prix possibles (d'arbitrage) avec $t = 0$?

Soit Q m.m.e., $Q \in \mathcal{M}e$: $E_Q\left[\frac{X}{1+r}\right]$ est un prix d'arbitrage. On obtient un intervalle d'arbitrage des prix :

$$]\Pi_{*0}(X), \Pi_0^*[\quad = \quad \left]\inf_{Q\in\mathcal{M}e} E_Q\left[\frac{X}{1+r}\right], \sup_{Q\in\mathcal{M}e} E_Q\left[\frac{X}{1+r}\right]\right[$$

Exercice 1 :
- Mono period market
- $r = 5\%$
- 3 actifs $= S^0, S^1, S^2$ avec $S_0^0 = 1$ et $S_T^0 = (1+r)S_0^0$
- $\Omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$

On a :

$$\frac{S_T^1}{S_0^1}(\omega_1) = \frac{42}{31} \quad ; \quad \frac{S_T^1}{S_0^1}(\omega_2) = \frac{21}{31} \quad ; \quad \frac{S_T^1}{S_0^1}(\omega_3) = \frac{21}{62}$$
$$\frac{S_T^2}{S_0^2}(\omega_1) = \frac{21}{124} \quad ; \quad \frac{S_T^2}{S_0^2}(\omega_2) = \frac{42}{31} \quad ; \quad \frac{S_T^2}{S_0^2}(\omega_3) = \frac{168}{62}$$
$$P(\omega_1) = \frac{1}{8} \quad ; \quad P(\omega_2) = \frac{3}{8} \quad ; \quad P(\omega_3) = \frac{4}{8}$$

Prix d'un call sur S^2 de strike $K = \frac{150}{31} S_0^2$?

Méthode 1. On cherche m.m.e. (*rappel* : $S_0^i = E_Q\left[\frac{S_T^i}{1+r}\right], i = 0,1,2$). Q mesure de probabilité sur Ω. On note $q_i = Q(\{\omega_i\})$.

$$\begin{cases} i = 0 & : \quad S_0^0 = q_1 \frac{S_T^0(\omega_1)}{1+r} + q_2 \frac{S_T^0(\omega_2)}{1+r} + q_3 \frac{S_T^0(\omega_3)}{1+r} \\ i = 1 & : \quad S_0^1 = q_1 \frac{S_T^1(\omega_1)}{1+r} + q_2 \frac{S_T^1(\omega_2)}{1+r} + q_3 \frac{S_T^1(\omega_3)}{1+r} \\ i = 2 & : \quad S_0^2 = q_1 \frac{S_T^2(\omega_1)}{1+r} + q_2 \frac{S_T^2(\omega_2)}{1+r} + q_3 \frac{S_T^2(\omega_3)}{1+r} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} i=0 & : \quad 1 = q_1 + q_2 + q_3 \\ i=1 & : \quad 1+r = q_1\dfrac{42}{31} + q_2\dfrac{21}{31} + q_3\dfrac{21}{62} \\ i=2 & : \quad 1+r = q_1\dfrac{21}{124} + q_2\dfrac{42}{31} + q_3\dfrac{168}{31} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} q_1 = \dfrac{3}{5} \\ q_2 = \dfrac{3}{10} \\ q_3 = \dfrac{1}{10} \end{cases}$$

Ainsi il existe un unique m.m.e. Q. Donc <u>AOA + marché complet</u>.
Call sur S^2 de strike $K = \dfrac{150}{31}S_0^2$: La fonction pay-off est la suivante

$$X = (S_T^2 - K)_+ = S_0^2\left(\frac{S_T^2}{S_0^2} - \frac{150}{31}\right)_+ = \begin{cases} X(\omega_1) = 0 \\ X(\omega_2) = 0 \\ X(\omega_3) = S_0^2\dfrac{18}{31} \end{cases}$$

Ainsi le prix à $t = 0$ est le suivant :

$$E_Q\left[\frac{X}{1+r}\right] = q_3\frac{X(\omega_3)}{1+r} = S_0^2\frac{12}{217}$$

Méthode 2. Trouver un portefeuille de couverture.
Portefeuille de couverture θ : $X = V_T(\theta) = \theta.S_T = \theta^0.S_T^0 + \theta^1.S_T^1 + \theta^2.S_T^2$
On a :

$$\begin{cases} 0 = X(\omega_1) = \theta^0.S_T^0(\omega_1) + \theta^1.S_T^1(\omega_1) + \theta^2.S_T^2(\omega_1) \\ 0 = X(\omega_2) = \theta^0.S_T^0(\omega_2) + \theta^1.S_T^1(\omega_2) + \theta^2.S_T^2(\omega_2) \\ S_0^2\dfrac{18}{31} = X(\omega_3) = \theta^0.S_T^0(\omega_3) + \theta^1.S_T^1(\omega_3) + \theta^2.S_T^2(\omega_3) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} X(\omega_1) = \theta^0(1+r) + \theta^1\dfrac{S_T^1(\omega_1)S_0^1}{S_0^1} + \theta^2\dfrac{S_T^2(\omega_1)S_0^2}{S_0^2} \\ X(\omega_2) = \theta^0(1+r) + \theta^1\dfrac{S_T^1(\omega_2)S_0^1}{S_0^1} + \theta^2\dfrac{S_T^2(\omega_2)S_0^2}{S_0^2} \\ X(\omega_3) = \theta^0(1+r) + \theta^1\dfrac{S_T^1(\omega_3)S_0^1}{S_0^1} + \theta^2\dfrac{S_T^2(\omega_3)S_0^2}{S_0^2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} X(\omega_1) = \theta^0\dfrac{21}{20} + \theta^1 S_0^1\dfrac{42}{31} + \theta^2 S_0^2\dfrac{21}{124} \\ X(\omega_2) = \theta^0\dfrac{21}{20} + \theta^1 S_0^1\dfrac{21}{31} + \theta^2 S_0^2\dfrac{41}{31} \\ X(\omega_3) = \theta^0\dfrac{21}{20} + \theta^1 S_0^1\dfrac{21}{62} + \theta^2 S_0^2\dfrac{168}{62} \end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \theta^0 \\ \theta^1 S_0^1 \\ \theta^2 S_0^2 \end{pmatrix} = S_0^2 \begin{pmatrix} \frac{-3600}{8897} \\ \frac{12}{41} \\ \frac{48}{287} \end{pmatrix}$$

Donc le prix à $t = 0$ du portfolio θ est

$$V_0(\theta) = \theta^0.S_0^0 + \theta^1.S_0^1 + \theta^2.S_0^2 = S_0^2 \frac{12}{217}$$

Exercice 2 : $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ et $r > -1$

S^1	S^2
$S_0^1 =$ €100	$S_0^2 =$ €100
$S_T^1(\omega_1) =$ €120 $S_T^1(\omega_2) =$ €110 $S_T^1(\omega_3) =$ €80	$S_T^2(\omega_1) =$ €140 $S_T^2(\omega_2) =$ €120 $S_T^2(\omega_3) =$ €30

$$P(\omega_1) = \frac{4}{10} \quad ; \quad P(\omega_2) = \frac{4}{10} \quad ; \quad P(\omega_3) = \frac{2}{10}$$

Déterminer r tel qu'il y ait AOA et selon les cas trouver :

- un portefeuille d'arbitrage
- la m.m.e.
- $V_T(\theta)$
- actif d'Arrow - Debreu

a) Calcul de β

Par définition, $S_0^i = \sum_{j=1}^{3} S_T^i(\omega_j)\beta_j$ et $i = 0, 1, 2$.
Ainsi, en $i = 0$, on a : $1 = (1 + r)(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)$
L'idée est de déterminer les β solution des équations $i = 1$ et $i = 2$ et d'ensuite déterminer (1+r) grâce à l'équation $i = 0$. On a donc :

$$\begin{cases} i = 1 \quad : \quad 100 = S_0^1 = 120\beta_1 + 110\beta_2 + 80\beta_3 \\ i = 2 \quad : \quad 100 = S_0^2 = 140\beta_1 + 120\beta_2 + 30\beta_3 \end{cases}$$

$$\iff \text{avec } \beta_1 \text{ paramètre : } \begin{cases} 11\beta_2 + 8\beta_3 = 10 - 12\beta_1 \\ 12\beta_2 + 3\beta_3 = 10 - 14\beta_1 \end{cases}$$

$$\iff \textbf{(1)} \begin{cases} \beta_2 = \frac{1}{63}(50 - 76\beta_1) \\ \beta_3 = \frac{10}{63}(1 + \beta_1) \end{cases}$$

AOA $\iff \beta_i > 0, \ \forall i = 1, 2, 3$. Donc $\beta_1 > 0$, d'où immédiatement $\beta_3 > 0$. La seconde équation du système précédent nous donne une condition sur β_1 qui est la suivante :

$$0 < \beta_1 < \frac{50}{76} = \frac{25}{38} \qquad \textbf{(1')}$$

b) Calcul du taux spot r

L'équation en $i = 0$ nous permet de le déterminer :

$$\frac{1}{1+r} = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = \textbf{(1)} = \beta_1 + \frac{1}{63}(50 - 76\beta_1) + \frac{10}{63}(1+\beta_1) = \frac{20}{21} - \frac{\beta_1}{21}$$

Grâce à **(1')**, on en déduit un intervalle sur r :

$$\frac{1}{20} \sim 5\% < r < \frac{3}{35} \sim 8,6\%$$

c) M.M.E.

$$q_i = (1+r)\beta_i = \begin{cases} q_1 = (1+r)\beta_1 = \dfrac{21\beta_1}{20-\beta_1} \\ q_2 = (1+r)\beta_2 = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{50-76\beta_1}{20-\beta_1} \\ q_3 = (1+r)\beta_3 = \dfrac{10}{3} \times \dfrac{1+\beta_1}{20-\beta_1} \end{cases}$$

$$\text{M.M.E} \Longleftrightarrow \text{AOA} \Longleftrightarrow 0 < \beta_1 < \frac{25}{38}$$

d) Actif d'Arrow-Debreu

$$e_i(\omega_j) = \delta_{ij}$$

$$\text{Prix à } t = 0 \text{ de } e_i = \beta_i$$

e) Portefeuille de couverture de e_1

$$V_T(\theta) = e_1 \Longleftrightarrow \begin{cases} \theta^0(1+r) + \theta^1 S_T^1(\omega_1) + \theta^2 S_T^2(\omega_1) = e_1(\omega_1) = 1 \\ \theta^0(1+r) + \theta^1 S_T^1(\omega_2) + \theta^2 S_T^2(\omega_2) = e_1(\omega_2) = 0 \\ \theta^0(1+r) + \theta^1 S_T^1(\omega_3) + \theta^2 S_T^2(\omega_3) = e_1(\omega_3) = 0 \end{cases}$$

Donc, le portefeuille de couverture de e_1 est :

$$\theta = \left(-\frac{21}{1+r}; \frac{3}{10}; -\frac{1}{10}\right)$$

f) Détermination de $V_0(\theta)$

$V_0(\theta) = -\dfrac{21}{1+r} \times 1 + \dfrac{3}{10} \times 100 + -\dfrac{1}{10} \times 100 = -\dfrac{21}{1+r} + 20$

Soit $r = \dfrac{1}{20}$ (Donc $\exists$ OA). On a $V_0(\theta) = -\dfrac{21}{1+\frac{1}{20}} + 20 = 0.$

Question : θ est-il un portefeuille d'arbitrage ?

- $V_0(\theta) = 0 \leq 0 \rightarrow$ OK
- $V_T(\theta) = e_1 \geq 0 \rightarrow$ OK
- $P(V_T(\theta) > 0) = P(e_1 > 0) = P(\{\omega_1\}) = \dfrac{4}{10} > 0 \rightarrow$ OK

Donc θ est un portefeuille d'arbitrage et $\theta =$ OA si $r = \dfrac{1}{20}$.

Chapitre 4

Binomial Model

4.1 Definitions

⋆ Un compte de banque S^0 déterministe et <u>une</u> action S^1.
⋆ 2 possibilités d'évolution de t à $t+1$.

$$S_t^0 \begin{cases} (1+r)S_t^0 \\ (1+r)S_t^0 \end{cases} \qquad S_t^1 \begin{cases} US_t^1 \\ DS_t^1 \end{cases}$$

avec $U > D$

⋆ Random source : Bernouilli

$$(\Omega = \{0,1\}, P, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t = \sigma(\nu_1, ..., \nu_t)\}) \;\; \forall 1 \le t \le T$$

$$\nu = (\nu_1, ..., \nu_T)$$

$$P(\nu_t = 1) = p \;\; ; \;\; P(\nu_t = 0) = 1 - p \;\; ; \;\; P(\omega) = p^n(1-p)^{T-n}$$

⋆ **Exemple :** $\omega = (1,0,1,1)$. Il y a 3 augmentations (1) et une diminution (0), ainsi on obtient $P(\omega) = p^3(1-p)$

4.2 Exemples

Exemple 1 : X est-elle $\mathcal{F}_0$-mesurable si on a $X(\omega_0) = 0, X(\omega_1) = 1, X(\omega_i) = 0 \;\; \forall i = 2,3...$?
FAUX car tous les $X(\omega)$ doivent avoir la même valeur ($\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$)

Exemple 2 : $T = 3$ et donc $\overline{K} = 8$

$\omega_7 = (1, 1, 1)$

$\omega_6 = (1, 1, 0)$

$\omega_5 = (1, 0, 1)$

$\omega_4 = (1, 0, 0)$

$\omega_3 = (0, 1, 1)$

$\omega_2 = (0, 1, 0)$

$\omega_1 = (0, 0, 1)$

$\omega_0 = (0, 0, 0)$

Exemple 3 : Arbre des prix de l'action S^1

On a : $U = 2$, $D = \frac{1}{2}$ et $T = 3$

$8 : \omega_3 = (1, 1, 1)$

4

$2 : \omega_2 = (0, 1, 1)$

2

$1 \qquad 2 : \omega_2 = (0, 1, 1)$

$S_0^1 = 1$

$1 \qquad \frac{1}{2} : \omega_1 = (0, 0, 1)$

$\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} : \omega_1 = (0, 0, 1)$

$\frac{1}{4}$

$\frac{1}{8} : \omega_0 = (0, 0, 0)$

On obtient donc le prix à t dans l'état ω :

- à $t = 0$, $S_0^1(\omega) = 1$ est connu en 0 ($\Longleftrightarrow \mathcal{F}_0$-mesurable)
- à $t = 1$, $S_1^1(\omega) = \begin{cases} 1/2 & si \quad \omega \in \{\omega_0; \omega_1; \omega_2; \omega_3\} = a_1 \\ 2 & si \quad \omega \in \{\omega_4; \omega_5; \omega_6; \omega_7\} = a_1^c \end{cases}$ Ainsi, S_1^1 est $\mathcal{F}_1$ mesurable avec $\mathcal{F}_1 = \sigma(\nu_1) = \{\Omega, \emptyset, a_1, a_1^c\}$. (En effet, $a_1 \bigcup a_1^c = \Omega$ et $a_1 \bigcap a_1^c = \emptyset$).
- à $t = 2$, $S_2^1(\omega) = \begin{cases} 1/4 & si \quad \omega \in \{\omega_0; \omega_1\} \\ 1 & si \quad \omega \in \{\omega_2; \omega_3; \omega_4; \omega_5\} \\ 4 & si \quad \omega \in \{\omega_6; \omega_7\} \end{cases}$

4.3 Portfolio

S^0 (déterministe), S^1 (processus stochastique), θ_t^i : nombre d'unité de l'actif i à l'instant t, θ : portefeuille (qui est un processus). Alors :

$$\theta_t \ \ \mathcal{F}_t\text{− mesurable (c'est à dire } \theta_t \text{ connu à l'instant } t)$$
$$\text{et}$$
$$V_t(\theta) = \theta_t^0 S_t^0 + \theta_t^1 S_t^1$$

Le prix à l'instant t est $\theta_t S_t$, celui en $t+1$ est $\theta_t S_{t+1}$ (On suppose que le portefeuille n'a pas changé). Le gain de t à $t+1$ est donc

$$G(\theta) = \theta_t(S_{t+1} - S_t)$$

Portefeuille autofinancé θ **:** $\forall t \in \mathbb{T}, \quad V_t(\theta) = V_0(\theta) + G_t(\theta)$

Prix actualisé (discounted) :

$$\overline{S} = \frac{S}{S^0}$$

$$\overline{S_t} = \frac{S_t}{(1+r)^t} \iff \begin{cases} \overline{S_t^0} = \dfrac{S_t^0}{S_t^0} = 1 \\ \overline{S_t^1} = \dfrac{S_t^1}{S_t^0} = \dfrac{S_t^1}{(1+r)^t} \end{cases}$$

Valeur actualisé : $\overline{V_T}(\theta) = \dfrac{V_T(\theta)}{S_t^0} = \theta_t S_t$

Gain actualisé : $\overline{G_t}(\theta) = \displaystyle\sum_{0\leq s\leq t} \theta_s(\overline{S}_{s+1} - \overline{S}_s)$

Utile : Soit $\theta = (\theta^0, 0)$ (temps dans le compte de banque) ; $\overline{G_t}(\theta) = 0$. Pour θ général, $\overline{G_t}(\theta) = \displaystyle\sum_{0\leq s\leq t} \theta_s^1(\overline{S}_{s+1}^1 - \overline{S}_s^1)$

Theorème : θ self financed $\iff \forall t \in \{0, ..., t-1\}, \quad \theta_t S_{t+1} = \theta_{t+1} S_{t+1}$

Exemple : $\theta_t = \begin{pmatrix} -20 \\ 10 \end{pmatrix}$; $r = 0$; $S_{t+1}^1 = 50$; $\theta_t S_t = -20 + 10 S_t^1$. Le temps passe, on a : $\theta_t S_{t+1} = -20 + 10 S_{t+1}^1 = \theta_{t+1} S_{t+1}$. Ainsi : $\theta_{t+1}^0 + 50\theta_{t+1}^1 = 480$