Gestion des risques :

Passif d'un bilan comptable => ressources

Actif d'un bilan comptable => emplois

Fond de Roulement(FdR) = La partie Capitaux Propre + Dettes Financières – Immobilisations => partie de financement qui dépasse les immos

Besoin en Fonds de Roulement(BFR) = Stocks + Clients – Fournisseurs

OCT ⇔ Négociation de personne à personne

Emprunt obligataire => Emprunt où on émet des obligations (une obligation dépend du risque de non remboursement)

Une **action** est un contrat par lequel l'entreprise s'engage à verser chaque année à une date non précisé. Un montant non précisé qu'on appel dividende. Réparti uniformément et indéfiniment. Et donne un droit d'information et un droit de vote.

Une **obligation** classique est un contrat par lequel l'entreprise dénommée emprunteur s'engage à verser à des dates fixe un montant fixe (si les obligations sont à taux fixe) et le nominal à échéance.

Le **marché primaire** est le marché où les entreprises trouvent les capitaux qui leurs sont nécessaire.

Le **marché secondaire** est uniquement financier et c'est le lieu où les différents titres financiers se négocient.

Une **obligation convertible** est une obligation à taux fixe avec le droit de changer l'obligation contre un nombre prédéterminé d'actions de la société émettrice.

Taux d'actualisation ➔ $\tau \ tq \ 0 = -N + \sum_{i=1}^{10} \frac{c}{(1+\tau)^i} + \frac{N}{(1+\tau)^{10}}$

On pose r le taux d'intérêt sans risque de la banque.

Modèle d'Irvin Fisher

On prend un dividende constant dans le modèle de calcul du taux d'actualisation, on cherche à avoir un résultat positif afin d'avoir une action rentable.

$$-P_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{D_i}{(1+\tau)^i} = -P_0 + D \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\tau)^i}$$

$$\Rightarrow P_0 \leq \frac{D}{\tau}$$

Gordon & SHAPIRO

On définit un taux de croissance du dividende (qui signifie le taux de croissance de l'entreprise).

$$D_1 = D_0(1+g)$$

$$D_2 = D_1(1+g)$$

$$\dots$$

$$\Rightarrow -P_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{D_i}{(1+\tau)^i} = -P_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1+g}{1+\tau}\right)^i$$

On suppose $g < \tau$

$$P_0 = D_0\left(\frac{x}{1-x}\right) = D_0\left(\frac{1+g}{\tau-g}\right)$$

Variante Molodovski

Pour lui, le g est constant les 2-3 premières années, puis décroit linéairement les trois années suivantes et enfin g=0 par la suite (l'entreprise est croissante au début, puis croît toujours mais moindre, puis les dividendes restent constant).

Marché Monopériode

C'est un marché dans lequel il y a deux dates, le début ($t = 0$) et la fin ($t = 1$). N actions (actifs), $S_0^1 \dots S_0^N$, On a une action sans risque. $t = 1 \Rightarrow S_0^0(1+r)$ avec r, le taux sans risque.

On définit un ensemble $\Omega = (\omega_1, \dots \omega_K)$ tel que $P(\omega_k) > 0$ et $\sum_{k=1}^{K} P(\omega_k) = 1$, Donc à l'instant 1, S_1^n dépend de w_k

Un porte feuille est un ensemble $(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_N)$ le nombre d'action que j'achète du θ_1 au θ_N actif et 0 est l'argent mis dans le compte banque. La valeur d'un portefeuille $V_\theta =< \theta/S >= \sum_{i=0}^{N} \theta_i S^i$

$$V_\theta(\omega) = < \theta_i, S_i > = \sum_{i=0}^{N} \theta_i S_T^i(\omega)$$

Le gain : $G_T = V_T(\omega) - V_0 =< \theta, (S_T^i - S_0^i >$

Rendement d'une action : $R = \frac{S_T^i}{S_0^i}$

Exemple

On a deux actions : $S_A = 10e$ et $S_B = 10e$

Trois états sont possible : $\omega_1 \Rightarrow 6e\ et\ 18e,\ \omega_2 \Rightarrow 14e\ et\ 6e,\ \omega_3 \Rightarrow 18e\ et\ 10e$

- ⇨ $\omega_1 => 24$
- ⇨ $\omega_2 => 20$
- ⇨ $\omega_3 => 28$

Définition de ν

$$\nu = \frac{\theta^i S_0^i}{V_0(\theta)}$$

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{S_0^1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{S_0^2} \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 6 & 18 \\ 14 & 6 \\ 18 & 10 \end{pmatrix}$$

$$R\nu = \begin{pmatrix} \frac{6}{10} & \frac{18}{10} \\ \frac{14}{10} & \frac{6}{10} \\ \frac{18}{10} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{18}{20} \\ \frac{24}{20} \\ \frac{32}{30} \end{pmatrix}$$

Le vecteur $R\nu$ modélise le rendement avec le placement de type ν selon les cas : $\omega_1, \omega_2, ou\ \omega_3$.

Une **opportunité d'arbitrage**, c'est la possibilité de gagner de l'argent sans investir.

Premier type d'arbitrage :

1. $V_0(\theta) = 0$
2. $V_T(\theta) \geq 0 => \exists k, V_T(\theta)(\omega_k) > 0$

Deuxième de type d'arbitrage :

1. $V_0(\theta) < 0$
2. $V_T(\theta) \geq 0$

On appel le vecteur B $\in R^k$ le vecteur prix tel que $S_0^i = \sum_{k=1}^{K} S_T^i\,(\omega_k)\beta_k\ et\ \ B = \begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots \\ \beta_k\end{pmatrix}$

$$R^T\beta = 1$$

$$R^T\beta = \begin{pmatrix} \frac{6}{10} & \frac{14}{10} & \frac{18}{10} \\ \frac{14}{10} & \frac{6}{10} & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2 \\ \beta_3\end{pmatrix} = \binom{1}{1}$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{6}{10}\beta_1 + \frac{14}{10}\beta_2 + \frac{18}{10}\beta_3 = 1 \\ \frac{18}{10}\beta_1 + \frac{6}{10}\beta_2 + \beta_3 = 1 \end{Bmatrix}$$

Théorème : On dit que dans un marché, il y a absence d'opportunité d'arbitrage si et seulement si $\forall k, \beta_k > 0$

$$\begin{Bmatrix} \beta_1 = \frac{10}{33} + \frac{4}{33}\beta_2 \\ \beta_3 = \frac{5}{11} - \frac{9}{11}\beta_2 \end{Bmatrix}$$

De plus, d'après le théorème précédent, on trouve $0 < \beta_2 < \frac{5}{9}$

$$\Rightarrow S_0^i = \sum_{k=1}^{K} \beta_k S_T^i(\omega_k)$$

$$\Rightarrow 1 = (1+r)\beta_1 + \ (1+r)\beta_2 + (1+r)\beta_3 \ \ \Rightarrow \ \ \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = \frac{1}{1+r} = \frac{1}{R}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{10}{33} + \frac{4}{33}\beta_2 + \frac{15}{33} - \frac{27}{33}\beta_2 + \ \beta_2 = \frac{25}{33} + \frac{10}{33}\beta_2$$

$$\Rightarrow \ \ \frac{1}{R} > \frac{25}{33} \ \ \Rightarrow \ \ R < \frac{33}{25} = 1{,}32 \ \ \Rightarrow \ \ r < 32\%$$

$$\Rightarrow \ \ \frac{1}{R} < \frac{25}{33} + \frac{10}{33} * \frac{9}{5} = \frac{275}{297} \ \ \Rightarrow \ \ R > \frac{297}{275} = 1{,}08$$

$$\Rightarrow \ \ 8\% < r < 32\%$$

De plus, on peut dire

$$\beta_k(1+r) > 0\ et \sum_{k=1}^{K} \beta_k(1+r) = 1$$

Alors on a affaire à une mesure de probabilité, la mesure de martingales équivalente, ou bien probabilité risque neutre.

Un **actif sans risque**, est un actif qui prend la même valeur quelque soit l'état de la nature.

$$Rv = \begin{pmatrix} R \\ R \\ R \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{6}{10} & \frac{14}{10} \\ \frac{14}{10} & \frac{6}{10} \\ \frac{18}{10} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{10} v_1 + \frac{14}{10} v_2 = R \\ \frac{14}{10} v_1 + \frac{6}{10} v_2 = R \\ \frac{18}{10} v_1 + v_2 = R \end{pmatrix} \; avec \; v_1 + v_2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \underline{R} = 1{,}08 \\ \overline{R} = 1{,}32 \end{pmatrix}$$

Le système est contradictoire, on obtient alors deux solutions, un min $\underline{R}$ et un max $\overline{R}$.
Si R est à l'extérieur de ses bornes on peut avoir arbitrage. Supposons $r = 0$, et achetons une action de chaque (on emprunte 20 et on achète 2 action à 10 => V= -20+20=0).
A ω_1 on paye les 20 => 24-20 => on gagne
A ω_2 on paye les 20 => 20-20 => on ne gagne pas et on ne perd pas
A ω_3 on paye les 20 => 38-20 => on gagne

Remarque :

Pour expliquer comment sont les marchés, il y a 3 étapes, La monopériode, le modèle Binomiale et le modèle continue.

$S_0^0 \rightarrow S_T^0 = S_0^0(1 + r_T)$

$S_T^n \rightarrow$ Variable aléatoiore $\widetilde{S_0^n}$, $\Omega = (\omega_1, \dots, \omega_K)$

Les β_k sont les produits arrow-debreu, c'est le pay-off $\omega_k \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Un **marché complet** est lorsque l'on à autant d'actifs indépendant que d'états ω_k.

Exemple :

$S_0^A = 100$

$S_0^B = 100$

$\omega_1 : S_1^A = 120 \; et \; S_1^B = 140$

$\omega_2 : S_1^A = 110 \; et \; S_1^B = 120$

$\omega_3 : S_1^A = 80 \; et \; S_1^B = 30$

On a alors : $R = \begin{pmatrix} \frac{12}{10} & \frac{14}{10} \\ \frac{11}{10} & \frac{12}{10} \\ \frac{8}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$, c'est la valeur du pay-off divisé par la valeur de départ.

$$R^T\beta = 1 \iff \begin{pmatrix} \frac{12}{10} & \frac{11}{10} & \frac{8}{10} \\ \frac{14}{10} & \frac{12}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12}{10}\beta_1 + \frac{11}{10}\beta_2 + \frac{8}{10}\beta_3 = 1 \\ \frac{14}{10}\beta_1 + \frac{12}{10}\beta_2 + \frac{3}{10}\beta_3 = 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{Bmatrix} \beta_2 = 2 - \frac{38}{5}\beta_3 \\ \beta_1 = \frac{50}{76} - \frac{63}{76}\beta_3 \end{Bmatrix}$$

$$\iff \frac{10}{38} - \frac{5}{38}\beta_2 > 0 \iff \beta_2 < 2$$

$$\iff \frac{50}{76} - \frac{63}{76}\beta_2 > 0 \iff \beta_2 < \frac{50}{63}$$

Maintenant, calculons la valeur de l'actif $\frac{1}{R} = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3$

$$\frac{50}{76} - \frac{63}{76}\beta_2 + \frac{76}{76}\beta_2 + \frac{20}{76} - \frac{10}{76}\beta_2 = \frac{70}{76} + \frac{3}{76}\beta_2 = \frac{1}{R}$$

$$\iff \frac{1}{R} > \frac{70}{76} \iff R < \frac{76}{70}$$

$$\iff \frac{1}{R} < \frac{70}{76} + \frac{3}{76} * \frac{50}{63} \iff R > \frac{21}{20} = 1{,}05$$

$$\iff 1{,}05 < R < \frac{38}{35} \cong 1.0857$$

Posons $R = \frac{53}{50}$, on obtient alors

$$\begin{pmatrix} \beta_1 = \frac{10}{53} \\ \beta_2 = \frac{30}{33} \\ \beta_3 = \frac{10}{53} \end{pmatrix}$$

Le pay-off de S^A : $X = f(S^A)$: $\begin{matrix} X_{\omega_1} = 20 \\ X_{\omega_2} = 10 \\ X_{\omega_3} = 0 \end{matrix}$

Définitions :

Un **produit dérivé** est un produit dont le pay-off dépend d'un autre produit que l'on appelle le sous-jacent. Le sous-jacent étant une action, on aura $X = f(S)$.

Un **portefeuille de couverture** est un porte feuille donnant exactement le même pay-off que le porte feuille qu'il couvre à l'instant T.

On dit qu'un portefeuille est **duplicable** si et seulement si soit $\theta_1 et\ \theta_2, \forall\omega_k, V_T(\theta_1) = V_T(\theta_2)$.

Théorème : On dit qu'il y a **absence d'opportunité d'arbitrage** si on a $\theta_1 et\ \theta_2, \forall\omega_k, V_T(\theta_1) = V_T(\theta_2)$ alors $V_0(\theta_1) = V_0(\theta_2)$.

Exemple :

On a $V_0(\theta) = \theta_0 + 100\theta_A + 100\theta_B$ et on veut un portefeuille du type :

$$\begin{array}{c}\omega_1 : 1 \\ \omega_0 : 0 \\ \omega_0 : 0\end{array}$$

On a alors :

$$\begin{Bmatrix} \omega_1 : \dfrac{53}{50}\theta_0 + 120\theta_A + 140\theta_B = 1 \\ \omega_2 : \dfrac{53}{50}\theta_0 + 110\theta_A + 120\theta_B = 0 \\ \omega_3 : \dfrac{53}{50}\theta_0 + 80\theta_A + 30\theta_B \quad = 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \theta_0 = -19{,}8 \\ \theta_A = \dfrac{3}{10} \\ \theta_B = -\dfrac{1}{10} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \theta_0 + \theta_A + \theta_B = \frac{10}{53}$$

Un **call** est un produit dérivé qui donne le droit et non l'obligation d'acheter à un prix donné K à un instant donné la maturité d'un sous-jacent.

Dans notre exemple, le prix du call est :

$$c = \sum_{k=1}^{3} \beta_k X(\omega_k) = \frac{10}{53} \times 20 + \frac{30}{53} \times 10 + \frac{10}{53} \times 0 = \frac{500}{53}$$

Le prix du portefeuille de couverture de ce call est :

A l'instant 0

$$V_0(\theta) = \theta_0 + 100\theta_A + 100\theta_B$$

$$V_T(\theta)(\omega_1) = \frac{53}{50}\theta_0 + 120\theta_A + 140\theta_B = 20$$

$$V_T(\theta)(\omega_2) = \frac{53}{50}\theta_0 + 110\theta_A + 120\theta_B = 10$$

$$V_T(\theta)(\omega_3) = \frac{53}{50}\theta_0 + 80\theta_A + 30\theta_B = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{ll} \theta_0 = & -\frac{25000}{159} \\ \theta_A = & \frac{7}{3} \\ \theta_B = & -\frac{2}{3} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \quad V_O(\theta) = \frac{500}{53}$$

Un **put** est un produit dérivé qui donne le droit et non l'obligation de vendre à un prix donnée qu'on appelle **strike** et à un moment donné qu'on appelle **maturité**.

Dans notre exemple, le prix du put est :

$$c \;=\; \sum_{k=1}^{3} \beta_k X(\omega_k) \;=\; \frac{10}{53} \times 0 + \frac{30}{53} \times 0 + \frac{10}{53} \times 20 \;=\; \frac{200}{53}$$

Le prix du portefeuille de couverture de ce put est :

A l'instant 0

$$V_0(\theta) = \theta_0 + 100\theta_A + 100\theta_B$$

$$V_T(\theta)(\omega_1) = \frac{53}{50}\theta_0 + 120\theta_A + 140\theta_B = 0$$

$$V_T(\theta)(\omega_2) = \frac{53}{50}\theta_0 + 110\theta_A + 120\theta_B = 0$$

$$V_T(\theta)(\omega_3) = \frac{53}{50}\theta_0 + 80\theta_A + 30\theta_B = 20$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{ll} \theta_0 = & -62{,}89 \\ \theta_A = & \frac{4}{3} \\ \theta_B = & -\frac{2}{3} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \quad V_O(\theta) = \frac{200}{53}$$

La **parité put/call** est : $c + \frac{k}{1+r} = p + S_0$

Dans la parité, on a trois possibilités :

- $S_T > K$

$$(S_T - K) + K = 0 + S_T$$

- $S_T = K$

$$0 + K = 0 + S_T$$

- $S_T < K$

$$0 + K = (K - S_T) + S_T$$

Ce qui prouve la parité call/put.

Exemple :

On se place dans le contexte d'un jeu, ou au départ, on a deux choix, placer l'argent en banque ou acheter des actions sachant que si on en achète, on ne sait pas si on va gagner ou perdre.

Premier cas : $S_T = S_0(1+r)$

Second cas : $S_T = p.u.S_0 + (1-p).d.S_0$

$$\Rightarrow \; S_0(1+r) = p.u.S_0 + (1-p).d.S_0$$

$$\Rightarrow \; \frac{1+r-d}{u-d} = p$$

Par conséquent, si $d < 1 + r < u$ alors nous sommes en absence d'opportunité d'arbitrage.

Supposons que $u = 1{,}2 \; et \; d = 0{,}8 \; et \; 1 + r = 1{,}3$ alors on va vendre à découvert et on va placer le reste à la banque.

La mesure martingale équivalente est $P_k = (1+r)\beta_k$

$$\Rightarrow S_0 = \frac{1}{1+r}\sum_{k=1}^{K} P_k S_k(\omega_k) = \frac{1}{1+r} E_Q(S_T)$$

Nous nous plaçons dans un marché monopériode muni de deux actions valant chacune 100 à l'instant 0.

$$S_0^A = 100 \; et \; S_0^B = 100$$

Nous avons 2 états de la nature :

$$\omega_1 : S_T^A = 90 \; et \; S_T^B = 180$$
$$\omega_2 : S_T^A = 130 \; et \; S_T^B = 40$$

1)Trouvons le β_k du marché

2) Trouvons le taux sans risque du marché

3) Trouvons le prix d'un call de $S^A + S^B$ avec $K = 200$

4) Trouvons le portefeuille de couverture de ce call et en

$$R = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{18}{10} \\ \frac{13}{10} & \frac{4}{10} \end{pmatrix}$$

$${}^{T}R\beta = 1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{13}{10} \\ \frac{18}{10} & \frac{4}{10} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = 1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 9\beta_1 + 13\beta_2 = 10 \\ 18\beta_1 + 4\beta_2 = 10 \end{pmatrix}$$

⇨ $Les\ \beta_k sont\ :\ \begin{Bmatrix} \beta_1 = \frac{10}{22} \\ \beta_2 = \frac{10}{22} \end{Bmatrix}$

$$\frac{1}{R} = \beta_1 + \beta_2 = \frac{20}{22} \Rightarrow R = \frac{11}{10} = 1{,}1 \Rightarrow r = 10\%$$

Les pay-offs de ce call sont :

$$X(\omega_1) = 70$$
$$X(\omega_2) = 0$$

$$c = \sum_{k=1}^{2} \beta_k X(\omega_k) = \frac{700}{22}$$

On peut en déduire le prix du pull :

$$c + \frac{k}{1+r} = p + S_0$$

$$\Rightarrow p = \frac{300}{22}$$

Calculons maintenant le portefeuille de couverture de ce call.

$$V_0(\theta) = 100\theta_A + 100\theta_B$$
$$V_T(\theta)(\omega_1) = 9\theta_A + 18\theta_B = 7$$
$$V_T(\theta)(\omega_2) = 13\theta_A + 4\theta_B = 0$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \theta_A = -\frac{28}{198} \\ \theta_B = \frac{91}{198} \end{matrix}$$

Calcul du pay-off par rapport à A dans le cas où on vend le B.

$$V_0(\theta) = \theta_0 + 100\theta_A$$

$$V_T(\theta)(\omega_1) = \frac{11}{10}\theta_0 + 90\theta_A = 70$$
$$V_T(\theta)(\omega_2) = \frac{11}{10}\theta_0 + 130\theta_A = 0$$

$$\theta_A = -\frac{7}{4}$$
$$\Rightarrow \quad \theta_0 = \frac{91}{44}$$
$$c = \frac{700}{22}$$

Un actif est dit **sans risque** s'il donne la même valeur quelque soit l'état de la nature.

Si on est dans un marché non complet, on peut essayer d'y ajouter des produits dérivés pour le compléter.

Markowitz

Calcul du risque.

$$E(x) > \ 0 \begin{array}{l} \frac{1}{2} : 100000 \\ \frac{1}{2} : \ -99990 \end{array}$$

Mais la variance est très grande. On calcul autant le risque avec l'espérance de gain qu'avec la variance.

La **fonction d'utilité** v : $\forall X, Y \in R^n \times R^n, X > Y \Leftrightarrow v(X) > v(Y)$

La fonction d'utilité est concave, si on a peur du risque (l'homme financier déteste le risque).

La fonction d'utilité est linéaire, si on y est indifférent du risque.

La fonction d'utilité est convexe, si on aime le risque du risque.

Le **modèle de markovitz** définit une fonction d'utilité : $v(E(\tilde{X}), var(\tilde{X}))$ et en déduit qui $\frac{\delta v}{\delta E} > 0 \ et \ \frac{\delta v}{\delta Var} < 0$. (Le modèle de markovitz est monopériode).

Soit deux portefeuilles $P_1 et\ P_2\ alors\ P_1$ domine P_2 (dans le sens est préférable à P_2) si et seulement si $E(P_1) \geq E(P_2)\ \ et\ var(P_1) \leq var(P_2)$

Un **ensemble efficient** est formé par des portefeuilles qui ne sont pas dominés. C'est-à-dire des portefeuilles tels qu'il n'existe pas de portefeuilles préférables à celui-là.

Il existe deux méthodes d'avoir les ensembles efficients. Soit on bloque μ et on minimise var^2 ou alors on bloque var^2et on maximise μ.

Soit N actifs et $(\omega_1, \dots, \omega_K)$. Pour chacun des états de la nature, il y a la probabilité P_k qu'on appelle probabilité historique (ce n'est pas une probabilité risque neutre).

Pour le modèle de markovitz, nous prenons deux hypothèses.

- Il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage
- Les P qui sont unanimement acceptés ($P(\omega_k) = P_k$, tout le monde donne la même proba au même état de la nature.).

Remarque :

La matrice du marché : $Q_{K,N} = \begin{array}{c} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_K \end{array} \overset{S_1 \dots S_N}{[R_{kn}]}$ (k lignes et N colonnes avec $R_{kn} = \frac{S^n}{w_k^n}$)

$$\bar{Q} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{K} P_k R_k^1 = \bar{R}_1 \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{K} P_k R_k^N = \bar{R}_N \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{R_{N,1}} = \ {}^t R_{N,K} P_{K,1}$$

μ = moyenne de mon portefeuille (et $\mu = \sum_{n=1}^{N} \theta_n \bar{R}_n$).

var^2 = écart type de mon portefeuille.

Ainsi une première contrainte est : $\mu = \ {}^t\bar{R}_{1,\mathrm{N}} \theta_{\mathrm{N},1}$

Et une seconde est : $\sum_{n=1}^{N} \theta_n = 1$

De plus $var^2 = \ {}^t\theta_{1,\mathrm{N}} \Gamma_{\mathrm{N,N}} \theta_{N,1}$ (le Γ est la matrice de variance/covariance) et ${}^t 1\theta = 1$.

Exemple de calcul du Γ:

$$\begin{array}{cccc} & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ X & \frac{12}{10} & \frac{11}{10} & \frac{8}{10} \\ Y & \frac{14}{10} & \frac{12}{10} & \frac{3}{10} \end{array}$$

Prenons $P_1 = \frac{2}{10}, P_2 = \frac{4}{10}, P_3 = \frac{4}{10}\ et\ \theta_X = \frac{1}{2}, \theta_Y = \frac{1}{2}$

Ainsi : $var\left(\frac{1}{2}\bar{X} + \frac{1}{2}\bar{Y}\right) = \frac{1}{4} var(\bar{X}) + \frac{1}{4} var(\bar{Y}) + \frac{2}{4} covar(\bar{X}, \bar{Y})$

$$\Rightarrow \Gamma = \begin{pmatrix} var(\bar{X}) & covar(\bar{X}, \bar{Y}) \\ covar(\bar{X}, \bar{Y}) & var(\bar{Y}) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mu = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} var(\bar{X}) & covar(\bar{X}, \bar{Y}) \\ covar(\bar{X}, \bar{Y}) & var(\bar{Y}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} var(\bar{X}) + \frac{1}{4} var(\bar{Y}) + \frac{2}{4} covar(\bar{X}, \bar{Y})$$

On veut minimiser $\frac{1}{2} \ {}^t\theta\Gamma\theta$ sous les contraintes ${}^t\bar{R}\theta = \mu\ et\ \ {}^t 1\theta = 1$

On a alors $L = \frac{1}{2} \quad {}^t\theta\Gamma\theta - \lambda_1(\quad {}^t1\theta - 1) - \lambda_2(\quad {}^t\bar{R}\theta - \mu)$

$$\nabla\mathrm{L} = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta\mathrm{L}}{\delta\theta} = \Gamma\theta - \lambda_1 1 - \lambda_2\bar{\mathrm{R}} = 0 \\ \frac{\delta\mathrm{L}}{\delta\lambda_1} = \quad {}^t1\theta - 1 = 0 \\ \frac{\delta\mathrm{L}}{\delta\lambda_1} = \quad {}^t\bar{R}\theta - \mu = 0 \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} (1)\ \Gamma\theta^* = \lambda_1 1 + \lambda_2\bar{\mathrm{R}} \\ (2) \quad {}^t1\theta^* = 1 \\ (3) \quad {}^t\bar{R}\theta^* = \mu \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \theta^* = \Gamma^{-1}(\lambda_1 1 + \lambda_2\bar{\mathrm{R}}) \\ {}^t1\Gamma^{-1}(\lambda_1 1 + \lambda_2\bar{\mathrm{R}}) = 1 \\ {}^t\bar{R}\Gamma^{-1}(\lambda_1 1 + \lambda_2\bar{\mathrm{R}}) = \mu \end{array}$$

$$\Rightarrow \lambda_1(\quad {}^t\Gamma^{-1}1) + \lambda_2(\quad {}^t1\Gamma^{-1}\bar{R}) = 1$$

$$\Rightarrow \lambda_1(\quad {}^t\bar{R}\Gamma^{-1}1) + \lambda_2(\quad {}^t\bar{R}\Gamma^{-1}\bar{R}) = \mu$$

On pose :

- $A = \quad {}^t1\Gamma^{-1}1$
- $B = \quad {}^t1\Gamma^{-1}\bar{R}$
- $C = \quad {}^t\bar{R}\Gamma^{-1}\bar{R}$

$$\Rightarrow \lambda_1 A + \lambda_2 B = 1 \ et \ \lambda_1 B + \lambda_2 C = \mu$$

De plus on sait que $AC - B^2 > 0$ car $< X, Y \geq \quad {}^tX\Gamma Y$ (car Γ définie et positive). Alors si on prend $X = 1 \ et \ Y = \bar{R} \Rightarrow (\quad {}^t1\Gamma\bar{R})^2 \leq (\quad {}^t1\Gamma 1)(\quad {}^t\bar{\mathrm{R}}\Gamma\bar{\mathrm{R}})$

On en déduit que : $\begin{array}{l} \lambda_1 = \frac{C - B\mu}{AC - B^2} \\ \lambda_2 = \frac{A\mu - B}{AC - B^2} \end{array}$

Alors le var^2minimum c'est $var^2 = \quad {}^t\theta^*\Gamma\theta^* = \quad {}^t\lambda_1\theta^*1 + \lambda_2\theta^*\bar{R} = \lambda_1 + \lambda_2\mu$

$\Rightarrow var^2 = \frac{C - \mu B}{AC - B^2} + \frac{\mu(A\mu - B)}{AC - B^2} = \frac{(A\mu^2 - 2\mu B + C)}{\Delta} \Rightarrow var = \sqrt{\frac{(A\mu^2 - 2\mu B + C)}{\Delta}}$ qui est une hyperbole.

On a le sigma min en $2\mu A - 2B = 0 \Rightarrow \mu = \frac{B}{A} => var = \frac{1}{\sqrt{A}}$

Nous allons maintenant chercher les asymptotes.

$$\frac{\delta\mu}{\delta var} = \frac{\delta\mu}{\delta var^2} \times \frac{\delta var^2}{\delta var} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{\Delta}}{2(\mathrm{A}\mu - \mathrm{B})} \times 2\sqrt{\frac{(A\mu^2 - 2\mu B + C)}{\Delta}} = \sqrt{\frac{\Delta}{\mathrm{A}}}$$

Ainsi, on a : $\begin{array}{l} \frac{B}{A} + var\sqrt{\frac{\Delta}{A}} \\ \frac{B}{A} - var\sqrt{\frac{\Delta}{A}} \end{array}$

Trouvons le portefeuille à variance minimale.

$$\theta_{min}^* = \frac{1}{A}\Gamma^{-1}1|$$

(1| est un vecteur colonne de 1)

Soit $\Gamma = \begin{pmatrix} 24 & -10 & 25 \\ -10 & 75 & 32 \\ 25 & 32 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \Gamma^{-1} = \frac{1}{67051}\begin{pmatrix} 124 & -220 & 2195 \\ -220 & 337 & 1018 \\ 2195 & 1018 & -1700 \end{pmatrix}$

Calculons les variances des portefeuilles suivants :

$$P_1 : \ 10\delta_1, 80\delta_2, 10\delta_3$$
$$P_2 : \ 125\delta_1, -10\delta_2, -15\delta_3$$

$$P_1 : var^2 = (0,1 \quad 0,8 \quad 0,1)\begin{pmatrix} 24 & -10 & 25 \\ -10 & 75 & 32 \\ 25 & 32 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,8 \\ 0,1 \end{pmatrix} = \frac{2619}{50}$$

$$A = \frac{3347}{67051}$$

$$\Rightarrow var^* = \frac{1}{\sqrt{A}} = 4,48$$

On ne peut pas avoir un porte feuille de variance plus petite que 4,48.

$$\Rightarrow \ \theta_{min}^* = \begin{pmatrix} 0,42 \\ 0,13 \\ 0,45 \end{pmatrix}$$

Exemple :

Soit un univers contant deux actions $X \ et \ Y$ et 5 états de la nature. Chacune des probabilitées de ces états de la nature son 0,2 et :

$$\begin{matrix} X & Y \\ 18 & 0 \\ 5 & -3 \\ 12 & 15 \\ 4 & 12 \\ 6 & 1 \end{matrix}$$

Et

θ_X	128	100	75	50	25	0	-25
θ_Y	-25	0	25	50	75	100	125

Alors $E(\bar{X}) = 9 \ et \ E(\bar{Y}) = 5$.

- ⇨ $var(X) = \Sigma_{P_i}(X_i - \bar{X})^2 = 28$