Gestion Financière

Nesim FINTZ

ING 1

Table des matières

Première partie

Chapitre 1

Rappel

Actif	Passif
immo (corp, incorp, financieres)	K propres Dettes obligatoires Dettes bancaires
stock client banque	fournisseur

Actif = Passif

- Passif : ressource de l'entreprise
- Actif : emplois
- Immo corp : qui ont un corps (BTP, machines)
- Immo incorp : inverse, brevet
- Immo fi : quand il y a une stratégie (Apple achète part de Google car concurrents)
- FdR (Fond de Roulement) : K permanents ($KpropresetdettesLT$) - immo > 0
- BfR (Besoin fond de roulement) : argent nécessaire pour faire tourner la Banque (stock + client - fournisseur) > 0
- $FdR - BfR = tresorerie$

Chapitre 2

Choix des investissements

- investissement : vecteur de R^{n+1} / n durée de vie de l'investissement
- **cash flow : Marge Brute autofinancement**. $BN + DOT$ aux amortissements $\rightarrow$ distribution aux actionnaires

Compte de résultats

Charges	Produit
Achats	CA (vente)
Charges de personnels	
ACE (autre charge extérieure)	
DOT	
charges fi	
IS (impôt social)	
Benefice net	

Critères de choix des investissements :

2.1 Avenir certain

2.1.1 Critère atemporel

- Rentabilité moyenne :
  100 k€ sur 4 ans CF_i : 25 50 50 75 cash flow en k€

$$\sum_{i=0}^{4} \frac{CF_i}{4} = 50$$

$$R_{moy} = \frac{50}{100} = 50\%$$

2.1.2 Délai de récupération du K investi

1000 k€ : 300 400 500 500
hyp : CF distribué de façon uniforme
$\frac{300}{500} * 12 = 7.2$

$$\boxed{I_1 \succ I_2 \Leftrightarrow d_1 < d_2} \tag{2.1}$$

$$\boxed{VAN(valeuractuellenette) = -I_0 + \sum_{i=0}^{n} \frac{CF_i}{(1+\tau)^i} + \frac{VR}{(1+\tau)^n}} \tag{2.2}$$

τ : taux d'actualisation >0 $\sim$ taux d'inflation

K propres : λ
D à LT : $1 + \lambda$

$$\boxed{\tau = \lambda \tau_{Kp} + (1-\lambda)(1-\nu)\tau_D} \tag{2.3}$$

τ_{Kp} : taux demandé par actionnaires
ν : taux de l'IS

$$\boxed{I_1 \succ I_2 \Leftrightarrow VAN(I_1) > VAN(I_2)} \tag{2.4}$$

2.1.3 Indice de rentabilité :

$$\boxed{IR = \frac{VAN}{I_0}} \tag{2.5}$$

2.1.4 TIR,TRI (Taux interne rentabilité) : lorsque la VAN s'annule

$$\boxed{I_1 \succ I_2 \Leftrightarrow TIR(I_1) > TIR(I_2)} \tag{2.6}$$

Exemple

On suppose les valeurs suivantes :

- $I_0 = 10000$
- $n = 4ans$
- CF_i 5000 6000 6000 6000

  - $R_{moy} = \frac{1}{10000}\frac{23000}{4} = \frac{5750}{10000} = 57,50\%$

  - $\frac{5000}{6000} * 12 = 10 \rightarrow 1$ an et 10 mois

- 60% K_p, 40% dette, actionnaire veulent 12% rentabilité et emprunt à 10%. IS à 30%

  - Taux actualisation :

$$\tau = \frac{60}{100}\frac{12}{100} + \frac{40}{100}\frac{70}{100}\frac{10}{100} = 10\%$$

  - VAN investissement (VR nul car non précisé) :

$$VAN = -10000 + \frac{5000}{1.1} + \frac{6000}{1,1^2} + \frac{6000}{1,1^3} + \frac{6000}{1,1^4} = 8110$$

  - TIR : on cherche à résoudre

$$-10000 + \frac{5000}{1+\tau} + \frac{6000}{(1+\tau)^2} + \frac{6000}{(1+\tau)^3} + \frac{6000}{(1+\tau)^4} = 0?$$

  Pour cela, on essaye des valeurs de τ afin de se rapprocher de la solution.

    - $\tau = 20\% \rightarrow 4699$
    - $\tau = 30\% \rightarrow 2228$
    - $\tau = 35\% \rightarrow 1240$
    - $\tau = 40\% \rightarrow 381$
    - $\tau = 45\% \rightarrow -370$
    - $\tau = 43\% \rightarrow -82$
    - $\tau = 42\% \rightarrow 68$

$$68 + 82 = 150 \rightarrow \frac{68}{150} = 0,45 \rightarrow TIR = 42,45\%$$

2.1.5 Délai de récupération du K investi actualisé

- 1000 400 400 500 500 $\tau = 10\%$

$$VAN = -1000 + \frac{400}{1,1} + \frac{400}{1,21} + \frac{500}{1,331} + \frac{500}{1,1^4}$$
$$VAN = -1000 + 363,6 + 330,5 + 375,7 + 341,5$$
$$VAN = -1000 + 694,1 + 375,7 + 341,5$$
$$1000 - 694,1 = 305,9$$

  2 ans $\rightarrow 694,1$ et 3 ans $\rightarrow 694,1 + 375,7$
  $305,9 \rightarrow Xmois$
  $375,7 \rightarrow 12mois$
  $X = 9,8 \rightarrow$ 2 ans 9 mois et 24j

2.1.6 Pour 2 investissements de durée différente

- Pour n années : $VAN(I) = -I_0 + \dfrac{CF_1}{1+\tau} + ... + \dfrac{CF_n}{(1+\tau)^n}$
- On projette la première année à l'année n, en divisant par $(1+\tau)^n$

$$\frac{VAN(I)}{(1+\tau)^n} = \frac{-I_0}{(1+\tau)^n} + \frac{CF_1}{(1+\tau)^{n+1}} + ... + \frac{CF_n}{(1+\tau)^{2n}}$$

$$\frac{VAN(I)}{(1+\tau)^{2n}} = ...$$

  De proche en proche, on obtient :

$$\frac{VAN(I)}{(1+\tau)^{pn}} = ...$$

- En factorisant par $VAN(I)$, on obtient :

$$VAN(I)\left(1 + \frac{1}{(1+\tau)^n} + \frac{1}{(1+\tau)^{2n}} + ... + \frac{1}{(1+\tau)^{pn}}\right) \tag{2.7}$$

- Posons : $X = \dfrac{1}{(1+\tau)^n}$.
  On obtient alors une suite géométrique de raison $X < 1 \rightarrow$ converge !

$$\lim_{p\to+\infty} \frac{1-X^{p+1}}{1-X} = \frac{1}{1-X} = \frac{(1+\tau)^n}{(1+\tau)^n - 1}$$

  Donc :

$$\boxed{VAN(I)\left(1 + \frac{1}{(1+\tau)^n} + \frac{1}{(1+\tau)^{2n}} + ... + \frac{1}{(1+\tau)^{pn}}\right) \Rightarrow \frac{(1+\tau)^n}{(1+\tau)^n - 1}} \tag{2.8}$$

Exemple :

$I_0 = 1000, \tau = 10\%$
1e : CF_i : 800 700 $\rightarrow$ 2 ans 2e : CF_j : 600 600 700 $\rightarrow$ 3 ans

- $I_0 = 1000, \tau = 10\%$ 1e : CF_i : 800 700 $\rightarrow$ 2 ans 2e : CF_j : 600 600 700 $\rightarrow$ 3 ans
- $VAN_1 = -1000 + \dfrac{800}{1,1} + \dfrac{700}{1,21} = 305,7$
  $VAN_2 = -1000 + \dfrac{600}{1,1} + \dfrac{600}{1,21} + \dfrac{700}{1,21} = 567,2$
- $\dfrac{(1+\tau)^n}{(1+\tau)^n - 1} = \dfrac{1,1^2}{1,1^2 - 1} = 5,76 \rightarrow 305,7 * 5,76 = 1761,29$
  $\dfrac{(1+\tau)^n}{(1+\tau)^n - 1} = \dfrac{1,1^3}{1,1^3 - 1} = 4 \rightarrow 567,2 * 4 = 2280$

On choisit le 2^e investissement car $>$!
On a un investissement sur 2 ans, un autre sur 3 ans $\rightarrow$ on reporte sur 6 ans.

$$VAN(I_1)\left(1 + \frac{1}{(1,1)^2} + \frac{1}{(1,1)^{2*2}} + \frac{1}{(1,1)^{2*3}}\right) = 939,94$$

$$VAN(I_2)\left(1 + \frac{1}{(1,1)^3} + \frac{1}{(1,1)^{2*3}}\right) = 1313$$

On choisit le 2^e investissement car $>$!

2.1.7 Investissement de montant différent

- $\tau = 10\%$
- I_1 : 1000 $\rightarrow$ 500 400 400
- $VAN_1 = 85,6$ et $IR_1 = \dfrac{VAN + I_0}{I_0} = 1,085$

$$\boxed{\textbf{Si} \left\{ \begin{array}{c} I_1 \succ I_2 \\ et \\ VAN(I_1) > VAN(I_2) \end{array} \right\} \Rightarrow Choix : I_1} \tag{2.9}$$

Cas 1 I_2 : 1000 $\rightarrow$ 600 600 700 $VAN_2 = 67,2$

$$IR_2 = \frac{VAN + I_0}{I_0} = 1,044$$

On choisit donc : I_1

Cas 2 I_3 : 1500 $\rightarrow$ 600 700 700

$$VAN_3 = 149,89$$

$$IR_3 = 1,09$$

Ainsi, $VAN_3 > VAN_1$ et $IR_3 > IR_1 \rightarrow$ choix 3e investissement

Cas 3 I_4 : 1500 $\rightarrow$ 600 600 750

$$VAN_4 = 104 > VAN_1$$

$$IR_4 = 1,07 < IR_1$$

Problème, il faut réinvestir l'argent. Sur 1500, 1000 investit et 500 ailleurs.

2.2 Avenir probabilisé

$\widetilde{CF_i}$: Variable aléatoire

$$\boxed{I_1 \succ I_2 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} Esp(VAN(I_1)) > Esp(VAN(I_2)) \\ Var(VAN(I_1)) \leqslant Var(VAN(I_2)) \end{array} \right\}} \tag{2.10}$$

$$\boxed{Esp\left[VAN(I_1)\right] = -I_0 + \frac{Esp(CF_i)}{1+\tau} + ... + \frac{Esp(CF_n)}{(1+\tau)^n}} \tag{2.11}$$

– Si $(\widetilde{CF_i},\widetilde{CF_j})$ sont indépendants :

$$\boxed{Var\left[VAN(I_1)\right] = \frac{Var(CF_i)}{(1+\tau)^2} + ... + \frac{Var(CF_i)}{(1+\tau)^n}} \tag{2.12}$$

On rappelle que : $Var(aX) = a^2 VarX$

Exemple

Soit I_0=1000, $\tau = 10\%$. On suppose que tous les $\widetilde{CF_i}$ sont indépendants.
Voici un scan sous Excel de toutes les valeurs à calculer.

gain	500	600	700	400	500	700	500	600
p	0,4	0,4	0,2	0,5	0,4	0,1	0,7	0,3
		annee 1			annee 2		annee 3	
gain	100	700	200	700	300	500	700	
p	0,1	0,9	0,2	0,8	0,1	0,4	0,5	
	annee 1		annee 2			annee 3		
Esp(VAN(I1))=	-1000	527,272727	388,429752	398,196844	313,899324		divison par (1,1)^n	
		580	470	530				
Esp(VAN(I2))=	-1000	581,818182	495,867769	435,762585	513,448535		divison par (1,1)^n	
		640	600	580				
Var(VAN(I1))=		4628,09917	5532,40899	1185,39525	11345,9034		divison par (1,1)^n	
		5600	8100	2100				
Var(VAN(I2))=		26776,8595	27320,5382	9934,74117	64032,1389		divison par (1,1)^n	
		32400	40000	17600				

–

$$\begin{aligned} Esp(VAN(I_1)) &= -1000 + \frac{0,4*500+0,4*600+0,2*700}{1,1} + ... \\ &= -1000 + \frac{580}{1,1} + \frac{470}{1,21} + \frac{530}{1.331} \\ &= 313,89 \end{aligned}$$

–

$$\begin{aligned} Esp(VAN(I_2)) &= -1000 + \frac{640}{1,1} + \frac{600}{1,21} + \frac{580}{1.331} \\ &= 513,44 \end{aligned}$$

–

$$\begin{aligned} Var(VAN(\widetilde{CF_1})) &= 0,4(500-580)^2 + 0,4(600-580)^2 + 0,2(700-580)^2 \\ &= 5600 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(VAN(\widetilde{CF_2})) &= 0,5(400-470)^2 + 0,4(500-470)^2 + 0,1(700-470)^2 \\ &= 8100 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(VAN((\widetilde{CF_3}) &= 0,7(500-530)^2 + 0,3(600-530)^2 \\ &= 2100 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(VAN((I_1) &= \frac{5600}{1,1^2} + \frac{8100}{1,1^4} + \frac{2100}{1,1^6} \\ &= 11345,9 \end{aligned}$$

– De même, on obtient :

$$\begin{aligned} Var(VAN((I_2) &= \frac{32400}{1,1^2} + \frac{40000}{1,1^4} + \frac{17600}{1,1^6} \\ &= 64032,1 \end{aligned}$$

– **Attention :** il ne faut jamais comparer l'Espérance avec la variance, car leurs dimensions sont différentes.On préfèrera donc comparer l'écart-type.

– $\sigma_1 = 106,5$
  $\sigma_2 = 253,04$
  Puisque $Esp(I_1) < Esp(I_2)$, on ne peut pas choisir.

Chapitre 3

Fonction d'utilité

Déf : C'est là où l'on prend le plus de plaisir ! Il en existe différents types : ordinale, cardinale, nominale.

Soit : $\mathcal{U} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

3.1 Notation

$$\begin{aligned} x \succ y &: prefx \\ y \succ x &: prefy \\ x \sim y &: equivalent \end{aligned}$$

3.2 Hypothèses

Hyp 1 Préférences asymétriques

$$x \succ y \text{ et } y \succ x \Rightarrow \text{impossible}$$

Hyp 2 Soit $x \succ y$ Alors : $\forall z$ on a,

$$\left\{ \begin{array}{c} x \succ z \\ ou \\ z \succ y \\ ou \\ \left\{ \begin{array}{c} x \succ z \\ z \succ y \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

3.3 Fonction de préférence

Soit ϕ fonction de préférence.

3.3.1 Propriétés

anti-reflexive : $x \succ y$

transitive : $\left\{ \begin{array}{c} x \succ y \\ y \succ z \end{array} \right\} \Rightarrow x \succ z$

acycliccité : $x_1 \succ x_2 \succ ... \succ x_n \Rightarrow x_1 \neq x_n$

3.4 Préférence faible

– $x \preccurlyeq y \Rightarrow y \succ x$ est faux. x est au moins aussi bien que y.

– $x \sim y \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} y \succ xfaux \\ x \succ yfaux \end{array} \right\}$

3.5 Ordre complet

En supposant H_1 et H_2 vérifiées, on admet que l'on sait forcement choisir entre :

$$\begin{array}{c} x \preccurlyeq y \\ ou \\ y \preccurlyeq x \\ ou \\ x \sim y \end{array}$$

Pour x_i element de $\mathbb{R}$, on défini :

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_k \\ . \\ . \\ . \\ x_K \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ . \\ . \\ . \\ p_k \\ . \\ . \\ . \\ p_K \end{pmatrix} \qquad \boxed{\mathcal{U}(\bar{X}) = \sum_{k=1}^{K} p_k.\mathcal{U}(x_k)}$$

3.6 Loterie

$\mathcal{L}(p, x, y) : \mathcal{L} = p(x)$ pour probabilité p, où convention : $x \succ y$

Soit z l'équivalent certain $\mathcal{L}(p, x, y)$ Alors :

$$\boxed{u(z) = p.u(x) + (1 - p)u(y)}$$

3.6.1 Indépendance forte

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^{3n}, si(x \sim y) \Rightarrow \forall p \in [0, 1], \mathcal{L}(p, x, z) \sim \mathcal{L}(p, y, z)$$

3.6.2 Continuité

$$\text{Si } x \succ y \succ z \text{ alors } \mathcal{L}(p, x, z) \sim y$$

3.6.3 Monotonie

$$\text{Si} \left\{ \begin{array}{c} x \succ y \succ t \\ x \succ z \succ t \end{array} \right\} alors \left\{ \begin{array}{c} y \sim \mathcal{L}(p_1, x, t) \\ z \sim \mathcal{L}(p_2, x, t) \end{array} \right\}$$

3.6.4 Relation de proba

$$y \succ z \Leftrightarrow p_1 > p_2$$
$$y \sim z \Leftrightarrow p_1 = p_2$$

3.6.5 Propriété

$$\text{Si} \left\{ \begin{array}{c} x \preccurlyeq y \preccurlyeq z \\ y \nsim z \end{array} \right\} \text{alors} \left\{ \exists \alpha \in [0, 1] \text{ tq } y \sim \alpha x + (1 - \alpha) z \text{ est un ensemble convexe.} \right\}$$

3.6.6 Théorème

Pour toutes relations de préférence définies sur $\mathbb{R}^n$ et qui satisfont les propriétés précédentes, il existe une fonction d'utilité $\mathcal{U} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\boxed{x \succ y \Rightarrow \mathcal{U}(x) > \mathcal{U}(y)}$$

Exemple de fonction d'utilité

$\mathcal{U}(0) = 0$
$\mathcal{U}(10000) = 100$
$\mathcal{L}(\frac{1}{2}, 0, 10 \text{ k€})$

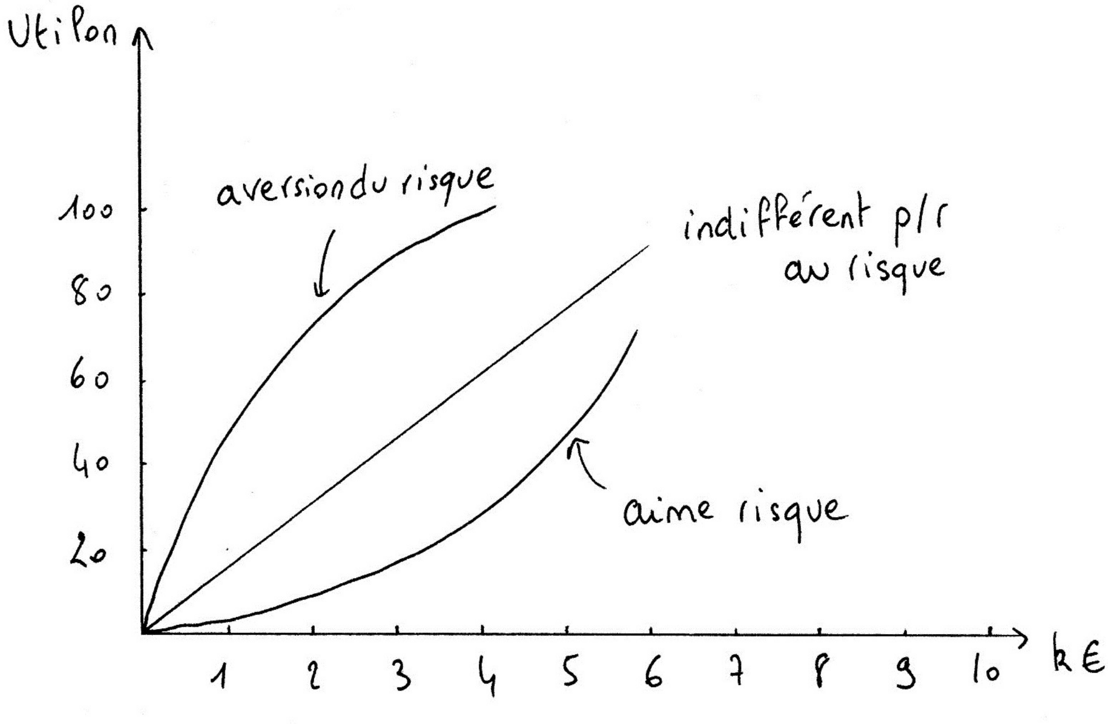
parie 3000 € $\mathcal{L}(\frac{1}{2}, 0, 10000) \rightarrow \mathcal{U}(3000) = \frac{1}{2}\mathcal{U}(0) + \frac{1}{2}\mathcal{U}(10000) = 50$

parie 600 € $\mathcal{L}(\frac{1}{2}, 0, 3000) \rightarrow \mathcal{U}(600) = \frac{1}{2}\mathcal{U}(0) + \frac{1}{2}\mathcal{U}(3000) = 25$

parie 4200 € $\mathcal{L}(\frac{1}{2}, 3000, 10000) \rightarrow \mathcal{U}(4200) = \frac{1}{2}\mathcal{U}(3000) + \frac{1}{2}\mathcal{U}(10000) = 75$

3.6.7 Etude de la fonction d'utilité

Une fonction d'utilité est nécessairement croissante !



Bonne fonction d'utilité :

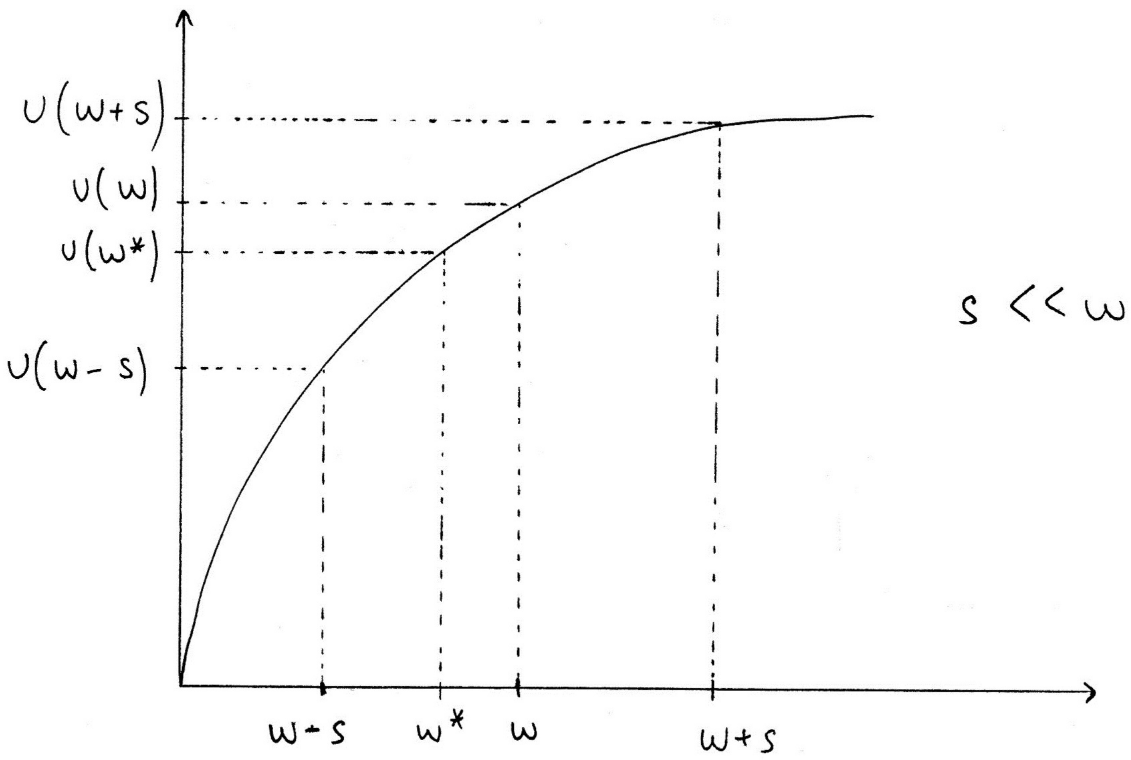
$$\left\{ \begin{matrix} croissante \rightarrow \mathcal{U}' > 0 \\ concave \rightarrow \mathcal{U}'' < 0 \end{matrix} \right\}$$

Plusieurs cas sont possibles :

Aversion pour le risque : croissante & concave

Indépendant du risque : droite car représente l'espérance

Aime risque : croissante & convexe



$$\mathcal{L}(\frac{1}{2}; w+s; w-s) = \frac{1}{2}\mathcal{U}(w+s) + \frac{1}{2}\mathcal{U}(w-s) = w^*$$

L'utilité de l'espérance	**>**	**espérance de l'utilité**	: *carconcave*
$\mathcal{U}(Esp(\tilde{S}))$	$>$	$Esp(\mathcal{U}(w^*))$	

On pose : $\pi = w - w^*$, π prime de risque, le fait d'assurer un bien

Alors : $w^* = w - \pi$

D'où : $\mathcal{U}(w^*) = \mathcal{U}(w) - \pi\mathcal{U}'(w) + \epsilon(\pi)$, $(\pi < w)$

Soit : $w^* \sim w + \tilde{S}$ Alors, on a :

$$\tilde{S} = \left| \begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & \rightarrow & -s \\ \frac{1}{2} & \rightarrow & s \end{array} \right|$$

et

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{U}(w^*) & = & \mathcal{U}(w + \tilde{S}) \\ & = & \mathcal{U}(w) + \tilde{S}.\mathcal{U}'(w) + \frac{1}{2}.\tilde{S}^2.\mathcal{U}''(w) + \epsilon \end{array}$$

ainsi,

$$\begin{array}{rcl} Esp(\mathcal{U}(w^*)) & = & \mathcal{U}(w^*) \\ & = & Esp(\mathcal{U}(w)) + \mathcal{U}'(w)Esp(\tilde{S}) + \frac{1}{2}\mathcal{U}''(w)Esp(\tilde{S}^2) \end{array}$$

or $Esp(\tilde{S})$

$$\mathcal{U}(w^*) \quad = \quad \mathcal{U}(w) + \frac{1}{2}\sigma^2\mathcal{U}''(w)$$

$$\Rightarrow \mathcal{U}(w) - \pi\mathcal{U}'(w) = \mathcal{U}(w) + \frac{1}{2}\sigma^2\mathcal{U}''(w)$$

Donc :

$$\boxed{\pi = \frac{1}{2}\sigma^2 \left(-\frac{\mathcal{U}''(w)}{\mathcal{U}'(w)} \right) > 0}$$

3.7 AAR & ARR

3.7.1 Aversion Absolue pour le Risque (AAR ou ARA en anglais)

$$\boxed{ARR = -\frac{\mathcal{U}''(w)}{\mathcal{U}'(w)} > 0} \tag{3.1}$$

Les riches ont une AAR inférieure à celle d'un pauvre. **L'AAR est décroissante par rapport à** w

3.7.2 Aversion Relative pour Risque (ARR ou RRA en anglais)

$$\boxed{ARR = -w\frac{\mathcal{U}''(w)}{\mathcal{U}'(w)} > 0} \tag{3.2}$$

Relatif par rapport à la richesse, donc **l'ARR est constance par rapport à** w

Exemple 1

Soit : $\mathcal{U}(w) = Ln(w)$
– croissante
– $\mathcal{U}'(w) > 0$
– $\mathcal{U}''(w) < 0$
On est alors dans le cas " aversion pour le risque ".
$AAR = \frac{\mathcal{U}''}{\mathcal{U}'} = \frac{1}{X} \rightarrow$ décroissante donc plutôt bien. $RRA = X * \frac{1}{X} = 1$
Conclusion : bonne fonction d'utilité

3.8 Condition d'INADA

$$\begin{aligned}\lim_{w\to 0}\mathcal{U}'(w) &= +\infty\\ \lim_{w\to +\infty}\mathcal{U}'(w) &= 0\end{aligned}$$

Exemple
Soit $\mathcal{U}(w) = -\exp^{-ax}$

- $\mathcal{U}'(w) = a\exp^{-ax}$ et $\lim_{x\to 0} = a \neq +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} = 0$
-
- $\mathcal{U}''(w) = -a^2\exp^{-ax} < 0$
-
- $AAR = \dfrac{\mathcal{U}''}{\mathcal{U}'} = a$
-
- $RRA = aw$

Conclusion : ce n'est pas une bonne fonction d'utilité

Exemple : reprise de l'exemple page 9

Rappel : On avait les valeurs suivantes :

- $Esp(VAN(I_1)) = 313,89$
- $Esp(VAN(I_2)) = 513,44$
- $\sigma_1 = 106,5$
- $\sigma_2 = 253,04$

Pour rappel, on ne pouvait pas conclure quant au choix de l'un ou l'autre des investissements. Utilisons alors la fonction d'utilité.

Utilisation de la fonction d'utilité

Soit : $\mathcal{U}(w) = Ln(w)$

Voici un tableau Excel présentant les résultats :

gain	500	600	700	400	500	700	500	600
p	0,4	0,4	0,2	0,5	0,4	0,1	0,7	0,3
	anne 1			annee 2			annee 3	
gain	100	700	200	700	300	500	700	
p	0,1	0,9	0,2	0,8	0,1	0,4	0,5	
	annee 1		annee 2		annee 3			
inves 1 :	U_1(VAN+I0)	5,77711924		inves 2 :	U_1(VAN+I0)	5,77862665		
	U_2(VAN+I0)	5,07163929			U_2(VAN+I0)	5,20704772		
	U_3(VAN+I0)	4,71022131			U_3(VAN+I0)	4,75714625		
	U(VAN+I0)_1	15,5589799			U(VAN+I0)_2	15,7428206		

On obtient ainsi :

$$\mathcal{U}_1(VAN + I_0) = \frac{0,4Ln(500) + 0,4Ln(600) + 0,2Ln(700)}{1,1^1} = 5,78$$

Enfin, voici les résultats permettant de conclure :

$$\mathcal{U}(VAN + I_0)_{I_1} = 15,56$$
et
$$\mathcal{U}(VAN + I_0)_{I_2} = 15,74$$

Choix : $\mathcal{U}(VAN + I_0)_{I_1}$ étant inférieur à $\mathcal{U}(VAN + I_0)_{I_2}$, on a :

$$I_2 \succ I_1$$

Exemple

Soit l'investissement sur 4 années suivant : 52 52 52 52 et soit τ attendu pour cet investissement fixé à 8%.

Combien la personne est-elle prête à payer pour cet investissement ?

Pour $\tau = 8\%$:

– On résoud l'équation $TRI = 0$ où

$$TRI = -I_0 + \frac{52}{(1+0,08)^1} + \frac{52}{(1+0,08)^2} + \frac{52}{(1+0,08)^3} + \frac{52}{(1+0,08)^4}$$

Ainsi, on obtient :

$$-I_0 + \frac{52}{(1+0,08)^1} + \frac{52}{(1+0,08)^2} + \frac{52}{(1+0,08)^3} + \frac{52}{(1+0,08)^4} = 0$$

Donc on a : $I_0 = 172,23$

Pour $\tau = 9\%$:

On obtient la valeur de la VAN suivante : $VAN = 168,46$
Ce qui représente un écart de : $3,77$

Pour $\tau = 10\%$:

On obtient la valeur de la VAN suivante : $VAN =$
Ce qui représente un écart de : ??

Chapitre 4

Finance de Marché

4.1 Definitions

4.1.1 Action :

Contrat par lequel l'entreprise s'engage à verser chaque année à une date non précisée, un montant non précisé (dividende), réparti uniformément et indéfiniment donnant un droit d'information et un droit de vote (pas uniforme, ex : conseil d'administration)

4.1.2 Délit d'initié

Une entreprise cache des données aux actionnaires. (ex : EADS a émis ses actions alors qu'ils connaissaient leur retard, mais ne l'ayant pas dit au marché, ils n'ont pas dévoilé l'info aux actionnaires).

4.1.3 Marché primaire

Marché où les entreprises vont chercher les capitaux nécessaires.

4.1.4 Marché secondaire

Marché financier où il y a échange de valeurs mobilières (actions, obligations ...)

4.1.5 Obligations

Classique

Contrat par lequel l'entreprise dénomée enprunteur s'engage à verser à des dates fixes, un montant fixe (taux fixe), appelé coupon et le nominal (montant de départ) à l'échéance.

Exemple
Nominal : 1000 € sur 10 ans, à date du 01/05/2012, avec $\tau = 5\%$
- 01/05/2013 → 50 €
- etc ...
- 01/05/2022 → 1050 €

Convertible

Obligations à taux fixe avec le droit de changer contre un nombre d'actions pré-déterminé de l'entreprise émettrice (si l'actions augmente, mieux vaut changer).

Bien entendu, l'intérêt demandé ici est inférieur à celui d'une obligation classique.

4.1.6 Défaut de paiement

Lorsqu'une entreprise ne peut pas payer ses engagements envers un tiers.

4.2 Métier de la Finance

4.2.1 Spéculateur :

C'est un gestionnaire de porte feuille qui réussit si les risques pris sont inférieurs à ceux du marché. Il ne faut pas regarder que la rentabilité, mais aussi la volatilité.

4.2.2 Arbitragiste :

Il se sert des imperfections du marché pour gagner de l'argent (ex : avec la monaie, en chageant une somme grâce aux taux de change). Il est capable de gagner de l'argent sans prendre de risque.

4.2.3 Headging :

Professionnel de la couverture ou encore Actuaire, il achète des dollards à terme (sur 3 mois par ex). Il couvre le risque pour les entreprises, ses bénéfices représentent la prime donnée par l'entreprise.

Il existe trois types d'analyses financières :
- fondamentale (la plus ancienne)
- technique (peu fiable)
- mathématique

4.3 Approche fondamentale

4.3.1 Modèle de IRVING-FICHER

Une entreprise distribue des dividendes. Quel sera le prix P_0 que je serai prêt à mettre ?
On a alors : $P_0 = \frac{D}{1+\tau} + \frac{D}{1+\tau^2} + \frac{P_2}{1+\tau^2}$
Ainsi, comme ce modèle choisit de fixer les dividendes à une valeures constantes, on obtient :

$$\boxed{P_0 = \sum_{i=1}^{+\infty} D \frac{1}{(1+\tau)^i}} \quad (4.1)$$

P_0 représente alors une rente perpétuelle, rente représentant la même somme chaque année.
Posons $X = \frac{1}{1+\tau}$, alors on a :

$$\sum_{i=1}^{+\infty} X^i \rightarrow \frac{1-X^n}{1-X} - 1$$

Or, on sait que $\lim_{n \to +\infty} X^n = 0 (X < 1)$.

On obtient alors : $\frac{1}{1-X} - 1 = 0 \rightarrow \frac{X}{1-X} = 0$

En remplaçant X par son expression, on obtient : $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+\tau)^i} \rightarrow \frac{1}{\tau}$. Ce qui implique alors que :

$$\boxed{P_0 = \frac{D}{\tau}}$$

4.3.2 Price Earning Ratio - PER

Le PER doit être utilisé pour comparer des sociétés ayant des secteurs d'activité similaires. Théoriquement : plus le PER de l'action est faible, plus celle-ci a des chances de monter. Ce qui veut donc dire que l'on préfèrera avoir un PER petit.

4.3.3 Modèle GORDON-SHAPIRO

Ici, on définit un modèle où les dividendes ne sont pas constants et tendent à croître.

$$\boxed{P_0 = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{D_i}{(1+\tau)^i}} \tag{4.2}$$

On pose **g : taux de croissance**.
- $D_1 = (1+g)D_0$
- $D_2 = (1+g)D_1$
- ...
- $D_{i+1} = (1+g)D_i$

Ainsi, on a :

$$\boxed{P_0 = D_0 \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{1+g}{1+\tau}\right)^i} \tag{4.3}$$

Hypothèse : $g < \tau$ car si $g \geq \tau \Rightarrow$ diverge ! Le prix de l'action deviendrait infini !

En effet, en posant : $X = \dfrac{1+g}{1+\tau} \to \dfrac{X}{1-X}$.

Donc :

$$\boxed{P_0 = D\left(\frac{1+g}{\tau - g}\right)} \tag{4.4}$$

4.3.4 Modèle Molodovski

Supposons qu'à l'instant initial, on est un dividende $D_0 = 10$.
- 3 premières années : 3%
- 4^e année : 2%
- 5^e année : 1%
- 6^e année : stable

On aurait alors, la 1^e année :

$$\begin{aligned} P &= \frac{10*1,03}{1,1} + \frac{10*(1,03^2)}{1,1^2} + \frac{10*(1,03^3)}{1,1^3} + \frac{10*(1,03^3)*1,02}{1,1^4} \\ &+ \frac{10*(1,03^3)*1,02*1,01}{1,1^5} + 10*1,03^3*1,02*1,01*\sum_{i=6}^{+\infty}\frac{1}{1,1^i} \end{aligned}$$

Deuxième partie

Chapitre 5

Marché financier

5.1 Marché mono période

On défini deux instant dans ce marché, l'instant initial $t = 0$, où tout est connu, et l'instant final $t = \frac{1}{T}$.

Pour $n+1$ actifs, on a : S_0^0, $\widetilde{S_0^1}$, ..., $\widetilde{S_0^n}$ de telle sorte que : $S_1^0 = S_1^0(1+R)$ avec R le taux sans risque.

5.1.1 Hypothèses

- Il n'y a pas de **coût de transaction** (frixion), ni d'impôts sur ce marché.
- Possibilité de **vendre à découvert** : dans le mécanisme de vente à découvert, nous commençons par vendre une valeur que nous ne possédons pas pour la racheter plus tard. Le but du jeu est bien évidemment de vendre une valeur à un certain prix et de la racheter à un prix inférieur pour encaisser la différence.
- Prêter et emprunter à un taux sans risque fixé pour tout le monde.
- Actions divisibles (on peut vendre 1/10 d'IBM)
- L'information est gratuite pour tout le monde et en même temps.

On définit un prix sous forme de vecteur : $\left[S^0, \widetilde{S^1}, \widetilde{S^2}, ..., \widetilde{S^N}\right]$. On définit aussi un portefeuille θ sous forme de vecteur : $\theta = [\theta_0, \theta_1, \theta_2, ..., \theta_N]^T$ Ainsi, la valeur du portefeuille se calcule par :

$$\boxed{V_0(\theta) = \sum_{n=0}^{N} \theta_n . S_0^N} \tag{5.1}$$

Exemple : Soit le portefeuille : 1000 € bq, 3 actions A → 100€, 8 actions B → 80€.

La valeur du portefeuille est alors de : $1000 + 300 + 640 = 1940$.

Prenons maintenant, à l'instant T, pour R → 6%, action A → 120€, action B → 70€.

$$\Rightarrow 1060 + 360 + 560 = 1980$$

On définit :

$$\boxed{G_T = \theta(S_T - S_0) = \sum_{n=0}^{N} \theta_n (S_T^n - S_0^n)} \tag{5.2}$$

On effectue une répartition :

$$\begin{pmatrix} \widehat{\theta_0} \\ \widehat{\theta_1} \\ \widehat{\theta_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1000}{1940} \\ \frac{300}{1940} \\ \frac{640}{1940} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\theta_0 S_0^0}{V_0} \\ \frac{\theta_1 S_0^1}{V_0} \\ \frac{\theta_2 S_0^2}{V_0} \end{pmatrix}$$ Ceci représente en fait un pourcentage, donc $\sum \theta_i = 1$.

5.1.2 Matrice du marché

Definition

On définit une matrice représentant le marché, de taille (K,N).

$$Y = \begin{pmatrix} S_T^1(w_1) & \cdots & S_T^N(w_1) \\ \vdots & & \vdots \\ S_T^1(w_K) & \cdots & S_T^N(w_K) \end{pmatrix}$$

On admet que : $\forall k, p(w_k) > 0$ cette probabilité historique ou sibjective indique qu'il est possible de cette histoire arrive.

Soit une matrice diagonale de taille (N,N) : $D = \begin{pmatrix} S_0^1 & & \\ & \ddots & \\ & & S_0^N \end{pmatrix}$, d'où la matrice inverse :

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{S_0^1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{S_0^N} \end{pmatrix}$$

Enfin, on définit la matrice normalisée de l'économie par :

$$\boxed{Z = Y D^{-1}} \tag{5.3}$$

Exemple :

Soient 2 actifs risqués S_1 et S_2 ayant un $t_0 = 100$ et 3 états de la nature w_1, w_2 et w_3, tels que :

	w_1	w_2	w_3
S_1	60	140	180
S_2	180	60	100

On a alors : $Y = \begin{pmatrix} 60 & 180 \\ 140 & 60 \\ 180 & 100 \end{pmatrix}$ et $D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{100} & 0 \\ 0 & \frac{1}{100} \end{pmatrix}$

Alors : $Z = \begin{pmatrix} 0,6 & 1,8 \\ 1,4 & 0,6 \\ 1,8 & 1 \end{pmatrix}$

Comme on a 3 actions de S_1 et 1 action de S_2, on a alors :

$\begin{pmatrix} 0,6 & 1,8 \\ 1,4 & 0,6 \\ 1,8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{\theta}_1 = \frac{3}{4} \\ \\ \widehat{\theta}_2 = \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ Le $\frac{3}{4}$ vient du fait que $\frac{300}{400} = \frac{3}{4}$

Ainsi, on a : $\begin{pmatrix} \frac{3}{4}0,6 + \frac{1}{4}1,8 \\ \\ 1,4\frac{3}{4} + \frac{1}{4}0,6 \\ \\ \frac{3}{4}1,8 + \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 \\ 1,2 \\ 1,6 \end{pmatrix}$

Ceci explique alors que pour un investissement donné, on a :

$$\textbf{Valeur du portefeuille : } Z.\widehat{\theta}$$

5.2 Marché complet

Un marché est dit complet s'il y a autant d'actifs indépendants que d'état de la nature.

5.2.1 Théorème fondamental

Sur un marché financier, il y a toujours absence d'opportunité d'arbitrage (AOA).

5.2.2 Opportunité d'arbitrage

Type 1 :

- $V_0(\theta) \leq 0$: arbitrage de 1^e ordre, on prend $V_0(\theta) = 0$.
- $V_T(\theta) \geq 0$: vecteur
  On définit alors :

$$\forall w_k, V_T(\theta)(w_K) \geq 0$$

$$\exists! w_j, V_T(\theta)(w_j) > 0$$

Type 2 :

- $V_0(\theta) < 0$
- $V_T(\theta) \geq 0$

5.2.3 Porte feuille sans risque

On dit qu'un portefeuille est un portefeuille sans risque ssi :

$$\boxed{Z\theta = R}$$

Avec $R = 1 + r$ où **r : taux sans risque**.
Ou encore ssi :

Tous les $\widehat{\theta_i}$ sont égaux.

5.2.4 Actif contingent

Un actif contingent ou un actif ARROW-DEBREW, de l'état de la nature est l'actif qui donne 1€ si w_k arrive et 0 sinon (on remarque d'ailleurs que ceci permet de former une base canonique).

Soit : β le prix de l'action contingent de w_k, alors :

$$\boxed{Z^T.\beta = 1}$$

Ex : En reprenant la matrice Z de l'exemple précédent et en supposant qu'une action nous rapporte R, alors on a :

$$\left\{ \begin{array}{r} 0,6\beta_1 + 1,4\beta_2 + 1,8\beta_3 = 1 \\ 1,8\beta_1 + 0,6\beta_2 + \beta_3 = 1 \\ R\beta_1 + R\beta_2 + R\beta_3 = 1 \end{array} \right\}$$

On remarque que la 3^e équation est une mesure de probabilité.

5.2.5 Théorème

Il y a absence d'opportunité d'arbitrage ssi :

$$\boxed{\forall k, \beta_k > 0}$$

Si $\beta_k < 0$ il y a opportunité.

On définit la probabilité du risque neutre comme étant la mesure Martingale équivalente, à savoir :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \pi_k & > & 0 \\ \sum_{k=1}^{K} \pi_k & = & 1 \end{array} \right\}$$

Ex : Dans quel intervalle doit se situer R pour ne pas avoir de probabilité d'arbitrage ? Prenons un actif sans risque :

$$\begin{aligned} Z\theta &= R \\ \begin{pmatrix} 0,6 & 1,8 \\ 1,4 & 0,6 \\ 1,8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \\ \theta_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} R \\ R \\ R \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5.4}$$

ou encore :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 0,6\theta_1 + 1,8\theta_2 & = & R \\ 1,4\theta_1 + 0,6\theta_2 & = & R \\ 1,8\theta_1 + \theta_2 & = & R \end{array} \right\}$$

Or, on a définit θ comme étant une mesure de proba, ce qui rajoute donc l'équation : $\theta_1 + \theta_2 = 1$.

Ainsi, en remplaçant θ_2 par $1 - \theta_1$, on a :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 0,6\theta_1 + 1,8(1-\theta_1) & = & R \\ 1,4\theta_1 + 0,6(1-\theta_1) & = & R \\ 1,8\theta_1 + 1 - \theta_1 & = & R \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} 1,8 - 1,2\theta_1 & = & R \\ 0,6 + 0,8\theta_1 & = & R \\ 1 + 0,8\theta_1 & = & R \end{array} \right\}$$

Au regard des équations (2) et (3), il est relativement aisé de les comparer. De ce fait, fixons l'équation (1).

Ainsi, d'après (1) et (2) $\rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 1,8 - 1,2\theta_1 & = & R \\ 0,6 + 0,8\theta_1 & = & R \end{array} \right\} \Rightarrow R_{min} = 1,08$

De même, d'après (1) et (3), on a : $R_{max} = 1,32$

Pour conclure, on arrive à borner R tel que :

$$1,08 < R < 1,32$$

Si R est hors des limites, il y aura possibilité d'arbitrage.

Prenons le cas où $R = 1$

On a alors : $\begin{pmatrix} 1 & 0,6 & 1,8 \\ 1 & 1,4 & 0,6 \\ 1 & 1,8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_0 + 0,6\theta_1 + 1,8\theta_2 \\ \theta_0 + 1,4\theta_1 + 0,6\theta_2 \\ \theta_0 + 1,8\theta_1 + \theta_2 \end{pmatrix}$

Prenons pour le portefeuille : $\theta_0 = -2$, $\theta_1 = 1$, $\theta_2 = 1$: ne coûte rien au départ

On a donc en remplaçant :

$$\begin{array}{rcl} \theta_0 + 0,6\theta_1 + 1,8\theta_2 & = & 0,4 \\ \theta_0 + 1,4\theta_1 + 0,6\theta_2 & = & 0 \\ \theta_0 + 1,8\theta_1 + \theta_2 & = & 0,8 \end{array}$$

Il n'y a donc pas d'absence d'opportunité d'arbitrage car ≥ 0.

Désormais,avec la 1^e ligne et en prenant $S_1 = 100$ et $S_2 = 100$, on a :

$$-200 + 60 + 180 = 40€ \rightarrow \text{on gagne } 40€$$

D'après la définition de l'actif contingent, on peut calculer en fonction de β_2 :

$$Z^T\beta = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} 6\beta_1 + 14\beta_2 + 18\beta_3 = 1 \\ 18\beta_1 + 6\beta_2 + 10\beta_3 = 1 \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} 6\beta_1 + 18\beta_3 = 1 - 14\beta_2 \\ 18\beta_1 + 10\beta_3 = 1 - 6\beta_2 \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta_1 = \dfrac{10}{53} + \dfrac{4}{53}\beta_2 \\ \\ \beta_3 = \dfrac{5}{11} - \dfrac{9}{11}\beta_2 \end{array} \right\}$$

On doit avoir β_1, β_2, $\beta_3 > 0$, ce qui implique donc que :

$$\frac{5}{11} - \frac{9}{11}\beta_2 > 0 \rightarrow 0 < \beta_2 < \frac{5}{9}$$

Or, on sait aussi que :

$$\begin{aligned} \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 &= \frac{1}{R} \\ \frac{10}{53} + \frac{4}{53}\beta_2 + \beta_2 + \frac{5}{11} - \frac{9}{11}\beta_2 &= \frac{1}{R} \end{aligned}$$

Si $\beta_2 = 0 \rightarrow \dfrac{10}{33} + \dfrac{5}{11} = \dfrac{1}{R} \Rightarrow R = 1,32$

Si $\beta_2 = \dfrac{5}{9} \rightarrow \dfrac{10}{53} + \dfrac{4}{53}\dfrac{5}{9} + \dfrac{5}{9} + \dfrac{5}{11} - \dfrac{9}{11}\dfrac{5}{9} = \dfrac{1}{R} \Rightarrow R = 1,08$

5.2.6 Produit dérivé

Un produit dérivé est un produit dont le pay-off dépend d'un autre actif, appellé le sous-jacent.

5.2.7 Call

Un call est un contrat qui me donne le droit mais pas l'obligation, d'**acheter** un actif à un prix donné K (le strike) et à une date donnée (date d'échéance).

5.2.8 Put

Un put est un contrat qui me donne le droit mais pas l'obligation, de **vendre** un actif (actif sous-jacent) à un prix K fixé à l'avance (le strike) et à une date fixée à l'avance (date d'échéance).

Exemple : Prenons $R = 1,15$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = \frac{1}{R} \quad &\Rightarrow \quad \frac{10}{53} + \frac{4}{53}\beta_2 + \beta_2 + \frac{5}{11} - \frac{9}{11}\beta_2 = \frac{1}{1,5} = \frac{20}{23} \\
&\Rightarrow \quad \beta_2 = \frac{17}{46} \\
&\Rightarrow \quad \beta_1 = \frac{8}{23} \\
&\Rightarrow \quad \beta_3 = \frac{7}{46}
\end{aligned}$$

Exemple de call et de put

Call : Pay-off d'un call avec $K = 100$ sur l'action S_1.

Soit $S_1 = \begin{pmatrix} 60 \\ 140 \\ 180 \end{pmatrix}$ alors on a pour call : $c = \begin{pmatrix} 0 \\ 40 \\ 80 \end{pmatrix}$

On propose un prix de 100 alors qu'elle en vaut 60, donc on achète pas !
On a alors :

$$\begin{aligned}
c &= 0\beta_1 + 40\beta_2 + 80\beta_3 \\
c &= 40\frac{17}{46} + 80\frac{7}{46} \\
c &= \frac{600}{23}
\end{aligned}$$

Put : Pay-off d'un put avec $K = 100$ sur l'action S_1.

Soit $S_1 = \begin{pmatrix} 60 \\ 140 \\ 180 \end{pmatrix}$ alors on a pour put : $p = \begin{pmatrix} 40 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

On l'a eu au prix de 60, alors qu'elle en vaut maintenant 100, donc on vend pour gagner 40 !
On a alors :

$$p = \frac{320}{23}$$

5.2.9 Porte feuille duplicable

On dit qu'un portefeuille θ_1 est duplicable par rapport à un portefeuille θ_2 ssi :

$$\boxed{Z\theta_1 = Z\theta_2} \tag{5.5}$$

Quel que soit l'état de la nature, ces 2 portefeuilles donneront la même chose.
Ainsi, on a :

$$Z\theta_1 = Z\theta_2 \rightarrow V_0(\theta_1) = V_0(\theta_2) \tag{5.6}$$

Il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage, les deux portefeuilles ont la même valeur à tout instant.

Démo : Si $V_0(\theta_1) = 110 et V_0(\theta_2) = 100 \rightarrow$ on gagne 10 : opportunité d'arbitrage !

Voilà qui termine le cours de Gestion Financière de Nesim FINTZ