E.I.S.T.I. – Département Mathématiques

1ère Année Ingénieurs

PROBABILITES T.D. 3

Chaines de Markov

GENERALITES – MATRICE DE TRANSITION - GRAPHE

Exercice 1

Soit le processus $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ où les variables aléatoires X_n sont indépendantes et identiquement distribuées à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que

$$P(X_n=k)=q_k,\ \forall k\in\mathbb{N}\ .$$

Est-ce que ce processus est une chaîne de Markov ?

On définit maintenant le processus $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tel que

$$Y_n=X_0+X_1+\ldots+X_n$$

Justifier que ce nouveau processus est une chaîne de Markov et calculer ses probabilités de transition.

Exercice 2

Dans un pays démocratique, 4 partis sont susceptibles de prendre le pouvoir : la droite, la gauche, l'extrême droite et l'extrême gauche. D'éminents politologues ont remarqué que l'alternance obéissait aux règles suivantes :

- Si, durant une législative, la droite est au pouvoir, à la législature suivante :
  - la droite restera au pouvoir avec une probabilité de 0.6
  - la gauche prendra le pouvoir avec une probabilité de 0.2
  - l'extrême droite prendra le pouvoir avec une probabilité 0.2
- Si, durant une législative, la gauche est au pouvoir, à la législature suivante :
  - la droite prendra le pouvoir avec une probabilité de 0.8
  - l'extrême gauche prendra le pouvoir avec une probabilité de 0.2
- Si, durant une législative, l'extrême droite (resp. l'extrême gauche) est au pouvoir, elle restera à la législature suivante.

1) Associer le problème à une chaîne de Markov homogène en justifiant cette modélisation.
2) Représenter le graphe associé à la chaîne de Markov.
3) Déterminer la matrice de transition.
4) Si initialement la droite est pouvoir, quelle est la probabilité pour que l'extrême droite prenne le pouvoir à la troisième législature ?

Exercice 3

On souhaite étudier l'effet de la présence d'un couple de lions dans une portion de savane dans laquelle cohabitent trois populations d'animaux dont les lions se nourrissent : Antilopes (A), Gnous (G) et Zèbres (Z). On fait l'hypothèse que la probabilité qu'un lion mange un type de proie (A, G ou Z) ne dépend que de ce qu'il a mangé précédemment. On modélise donc les proies comme les états d'une chaîne de Markov dont les trajectoires sont des successions de proies mangées par les lions. Cette chaîne de Markov $\{X_n\}$ est homogène d'espace d'états $\{A,G,Z\}$ et de matrice de transition,

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.1 & 0.4 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

L'instant initial correspond à ce qu'ils ont mangé le 1^{er} jour, l'instant 1 à leur repas du $2^{ème}$ jour, etc...

1) Qu'elle est, selon ce modèle, la probabilité que les lions mangent un zèbre après avoir mangé une antilope ?
2) Tracer le graphe de la chaîne.
3) Est-il plus probable que les lions mangent un gnou puis deux antilopes et terminent par un zèbre (GAAZ) ou bien qu'ils mangent un gnou puis une antilope ensuite un zèbre et enfin une antilope (GAZA)?
4) Compléter les valeurs manquantes de la matrice suivante et calculer la probabilité que les lions mangent un zèbre le troisième jour sachant que le premier jour ils ont mangé une antilope,

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0.35 & ... & 0.49 \\ 0.26 & 0.21 & 0.53 \\ 0.26 & 0.2 & ... \end{pmatrix}.$$

<u>Exercice 4</u>

N molécules de gaz sont réparties dans un récipient divisé en deux enceintes séparées par une paroi poreuse. A chaque étape, une particule choisie uniformément au hasard, change d'enceinte. On note X_n le nombre de particules dans la première enceinte à l'étape n.

1) Justifier que $\{X_n\}_{n\in N}$ est une chaîne de Markov homogène.
2) Calculer les probabilités de transition.
3) Supposons maintenant que N=3. Tracer le graphe de la chaîne et donner sa matrice de transition.
4) La loi initiale est donnée par $\pi_0=(0.5, 0.1, 0, 0.4)$. Quelle est la probabilité d'avoir 3 particules dans la première enceinte au début ? Quelle est la probabilité d'avoir une particule à la $1^{ère}$ étape ?
5) Quelle est la probabilité qu'il y ait une particule à la $1^{ère}$ étape, deux particules à la $2^{ème}$ étape et trois particules à la $3^{ème}$ étape ?

<u>Exercice 5</u> (Application à la génétique)

La transmission des patrimoines génétiques au cours des générations successives est un exemple standard de chaîne de Markov : le génotype de chaque individu ne dépend de ceux de ses ancêtres qu'au travers ses parents.

Le premier modèle de génétique est extrêmement rudimentaire. Il s'agit de suivre la répartition d'un gène particulier, noté g, au cours de générations successives dans une population dont la taille N reste fixée. Les individus sont supposés n'avoir qu'un seul chromosome et ce chromosome peut être porteur ou non du gène g. Ce chromosome provient d'un parent unique choisi au hasard dans la génération précédente. En fait, tout ce passe comme si les chromosomes de la génération n constituaient un stock de taille N dans le quel les N chromosomes de la génération n+1 sont tirés au hasard avec remise.
On note X_n le nombre de chromosomes porteurs du gène g à la génération n.

1) Justifier que $\{X_n\}$ est une chaîne de Markov. Quels états peut-elle prendre ?
2) Calculer la probabilité de transition de l'état i à l'état j.
3) Donner le graphe et la matrice de transition dans le cas où la population est constituée de 3 individus.
4) Supposons qu'à la $1^{ère}$ génération il y a 1 chance sur 3 d'avoir 1 gène g et 2 chances sur 3 d'en avoir 2. Quelle est la probabilité qu'il y ait deux chromosomes porteurs du gène g à la deuxième génération ?

<u>Exercice 6</u> (Fiabilité)
Soit un dispositif technique comprenant deux éléments montés en parallèle et fonctionnant indépendamment l'un de l'autre. Chaque élément a une fiabilité p de tomber en panne et il n'y a pas de possibilité de réparation.
Soit X_n le nombre de pannes au début de la nième journée.

1) Justifier que $\{X_n\}$ est une chaîne de Markov. Quels états peut-elle prendre ?
2) Calculer la probabilité de transition de l'état i à l'état j.
3) Donner le graphe et la matrice de transition de la chaîne.
4) Supposons qu'au premier jour, tous les éléments fonctionnent. Quelle est la loi du système au nième jour ? Quelle est la probabilité qu'ils fonctionnent encore au $10^{ème}$ jour ?