INTRODUCTION AUX PROBABILITES
VIII

Support du cours donné en 1^{re} année

par Marietta Manolessou
EISTI - Département Mathématiques

Année 2006-2007

Table des matières

Table des figures

Chapitre 8

Quelques lois de probabilités continues

1 Loi uniforme

1 Fonction de densité - Fonction de répartition

Définition 1.1
X variable aléatoire continue suit la loi uniforme sur $[a,\ b] \subset \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow X : \mathcal{U}([a,\ b]),$$

si elle admet comme support :

$$C_X = [a,\ b]$$

et fonction de densité :

$$f_X(x) = \left\{ \begin{array}{cc} \dfrac{1}{b-a} & \textit{si } x \in\ C_X \\ 0 & \textit{ailleurs} \end{array} \right\}$$

*** Autrement :** X décrit l'expérience aléatoire de choisir au hasard un point x, sur l'intervalle $[a,\ b]$ de façon à ce que la probabilité $P[\{x \in [a,\ b]\}]$ soit indépendante du sous-intervalle choisi pour la variation de x.

***** Soit $X : \mathcal{U}([a,\ b])$, alors :

1. La fonction de répartition est donnée par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x < b \\ 1 & \text{si } x \geq b \end{cases}$$

2. La fonctionnelle génératrice est donnée par :

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \begin{cases} \dfrac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

3. La fonction caractéristique est donnée par :

$$\Phi(\omega) = \frac{e^{j\omega b} - e^{j\omega a}}{j\omega a}$$

2 Loi Uniforme et Simulation

Théorème 1.1 *Soit X variable aléatoire continue avec F_X fonction de répartition, alors la variable aléatoire "transformée" $Y = F_X(x)$ suit une loi uniforme $\mathcal{U}([0,\ 1])$*

Remarque Importante Grâce à ce théorème, en prenant l'inverse de la fonction de répartition :

$$F_X^{-1}(u) = x$$

, on "simule" une variable aléatoire continue par la méthode Monte-Carlo.

2 Loi normale (loi de Gauss)

1 Famille de fonctions de densité "Gaussiennes"

***** Soit X une variable aléatoire continue avec fonction de densité :

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \qquad f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-x^2/2}$$

a) Propriétés

- f non négative et symétrique par rapport à $x = 0$
- f admet un maximum à $x = 0$
- $f(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0,399$
- $x = 1$ et $x = -1$ points d'inflexion
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

b) Famille de fonctions de densité du même type.

Soit $Y = aX + b$ où $a > 0$ alors (voir application du théorème de la transformée) :

$$\forall\ y \in \mathbb{R}, \qquad f_Y(y) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}}\ e^{-\dfrac{(y-b)^2}{2a^2}}.$$

2 Variable aléatoire Normale, $X : \mathcal{N}(\mu,\ \sigma^2)$

Définition 2.1

X variable aléatoire continue suit la loi normale avec moyenne $\mu(= b)$ et variance $\sigma^2(= a^2)$

$$\Leftrightarrow X : \mathcal{N}(\mu,\ \sigma^2),\ \text{si elle admet comme support } C_X = \mathbb{R}$$

et comme fonction de densité :

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \qquad f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Si

$$\mu = 0, \qquad \sigma^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \qquad X = \textit{var.al. normale centrée réduite} \qquad \Leftrightarrow \qquad X : \mathcal{N}(0,\ 1)$$

(ou variable standardisée)

Remarque 2.1

1. La famille des fonctions du type “gaussienne”

$$\tilde{f} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

   ne possédant pas de primitive sous forme d’une fonction élémentaire, on utilise des tables où on peut trouver la fonction de répartition de la variable aléatoire centrée réduite

$$X : \mathcal{N}(0,\ 1)$$

$$\mathcal{F}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\, du$$

2. Usage fréquent de symétries :

$$\mathcal{F}(0) = 0,5$$

$$\mathcal{F}(-x) = 1 - \mathcal{F}(x)$$

Théorème 2.1
Soit $X : \mathcal{N}(\mu,\ \sigma^2)$ alors :

1. *La fonction génératrice ,*

$$\forall \quad t \in \mathbb{R}, \qquad M_X(t) = e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2},$$

2.

$$\mu_X = \mu$$

3.

$$\sigma_X^2 = \sigma^2$$

4. *La variable aléatoire transformée “centrée réduite” suit une loi normale $\mathcal{N}(0,\ 1)$*
5. *La fonction caractéristique,*

$$\forall \quad \omega \in \mathbb{R}, \qquad \Phi(\omega) = e^{j\omega\mu - \omega^2 \frac{\sigma^2}{2}}$$

Exemple 2.1

1. $X : \mathcal{N}(9, 25)$
   $P[X \leq 10] = F_X(x = 10) = P\left[\frac{X-9}{5} \leq \frac{1}{5}\right] = P\left[Y \leq \frac{1}{5}\right] = \mathcal{F}\left(\frac{1}{5}\right) = 0,579$
2. On suppose que dans une certaine université, le QI , des étudiants est représenté par une variable aléatoire X qui suit une loi $\mathcal{N}(125,\ 49)$. Le QI moyen de l’université est $\mu_X = 125$
   $P[\{X \geq 120\}] = P\left[\left\{\frac{X-125}{7} > -\frac{5}{7}\right\}\right] = 1 - \mathcal{F}\left(-\frac{5}{7}\right) = \mathcal{F}\left(\frac{5}{7}\right) = 0,761$
   $\Rightarrow \approx 76\%$ des étudiants de cette université ont un QI d’au moins 120.

3 Tables

Variable Aléatoire centrée réduite

$$\mathcal{F}(x) = P\{N(0,\ 1) \leq x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du$$

4 Table B_1

[1] Table B_1 donne la valeur de x dont la valeur correspondante de $\mathcal{F}(x)$ est la somme de la colonne et ligne correspondante .

Percentile de la var.normale centrée réduite.

F	.000	.010	.020	.030	.040	.050	.060	.070	.080	.090
.5	.000	.025	.050	.075	.100	.126	.151	.176	.202	.228
.6	.253	.279	.305	.332	.358	.385	.412	.440	.468	.496
.7	.524	.553	.583	.613	.643	.674	.706	.739	.772	.806
.8	.842	.878	.915	.954	.994	1.036	1.080	1.126	1.175	1.227
.9	1.282	1.341	1.405	1.476	1.555	1.645	1.751	1.881	2.054	2.326

x	1.960	2.576	3.090	3.291	3.891	4.417	4.892
F	.975	.995	.999	.9995	.99995	.999995	.9999995
2(1-F)	.050	.010	.002	.001	.0001	.00001	.000001

5 Table B_2

[2] Table B_2 donne $\mathcal{F}(x)$, où x est donné par la somme de la colonne et de la ligne correspondante.

Exemple 2.2

Pour la valeur 0.36 on a $\mathcal{F}(0.36) = 0.6406$ (par la ligne .3 et la colonne .06 de la table B_2

[1]Source R.A. Fisher and F.Yates. *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research*, Table 1 ; publié par Longman Group Ltd., London (précédemment publié par Olivier and Boyd, Edinburgh) ; avec la permission des auteurs et éditeurs.

[2]Source : A. Hald, *Statistical Tables and Formulas* (1952), Table II : reimprimé avec la permission de John Wiley

Fonction de répartition de la var.aléatoire normale centrée réduite.

x	.000000	.010000	.020000	.030000	.040000	.050000	.060000	.070000	.080000	.090000
.0	.500000	.504000	.508000	.512000	.516000	.519900	.523900	.527900	.531900	.535900
.1	.539800	.543800	.547800	.551700	.555700	.559600	.563600	.567500	.571400	.575300
.2	.579300	.583200	.587100	.591000	.594800	.598700	.602600	.606400	.610300	.614100
.3	.617900	.621700	.625500	.629300	.633100	.636800	.640600	.644300	.648000	.651700
.4	.655400	.659100	.662800	.666400	.670000	.673600	.677200	.680800	.684400	.687900
.5	.691500	.695000	.698500	.701900	.705400	.708800	.712300	.715700	.719000	.722400
.6	.725700	.729100	.732400	.735700	.738900	.742200	.745400	.748600	.751700	.754900
.7	.758000	.761100	.764200	.767300	.770300	.773400	.776400	.779400	.782300	.785200
.8	.788100	.791000	.793900	.796700	.799500	.802300	.805100	.807800	.810600	.813300
.9	.815900	.818600	.821200	.823800	.826400	.828900	.831500	.834000	.836500	.838900
1.0	.841300	.843800	.846100	.848500	.850800	.853100	.855400	.857700	.859900	.866100
1.1	.864300	.866500	.868600	.870800	.872900	.874900	.877000	.879000	.881000	.883000
1.2	.884900	.886900	.888800	.890700	.892500	.894400	.896200	.898000	.899700	.901470
1.3	.903200	.904900	.906580	.908240	.909880	.911490	.913090	.914660	.916210	.917740
1.4	.919240	.920730	.922200	.923640	.925070	.926470	.927850	.929220	.930560	.931890
1.5	.933190	.934480	.935740	.936690	.938220	.939430	.940620	.941790	.942950	.944080
1.6	.945200	.946300	.947380	.948450	.949500	.950530	.951540	.952540	.953520	.954490
1.7	.955430	.956370	.957280	.958180	.959070	.959940	.960800	.961640	.962460	.963270
1.8	.964070	.964850	.965620	.966380	.967120	.967840	.968560	.969260	.969950	.970620
1.9	.971280	.971930	.972570	.973200	.973810	.974410	.975000	.975580	.976150	.976700
2.0	.977250	.977780	.978310	.978820	.979320	.979820	.980300	.980770	.981240	.981690
2.1	.982140	.982570	.983000	.983410	.983820	.984220	.984610	.985000	.985370	.985740
2.2	.986100	.986450	.986790	.987130	.987450	.987780	.988090	.988400	.988700	.988990
2.3	.989280	.989560	.989830	.990097	.990358	.990613	.990863	.991106	.991344	.991576
2.4	.991802	.992024	.992240	.992451	.992656	.992857	.993053	.993244	.993431	.993613
2.5	.993790	.993963	.994132	.994297	.994457	.994614	.994766	.994915	.995060	.995201
2.6	.995339	.995473	.995604	.995731	.995855	.995975	.996093	.996207	.996319	.996427
2.7	.996533	.996636	.996736	.996833	.996928	.997020	.997110	.997197	.997282	.997365
2.8	.997445	.997523	.997599	.997673	.997744	.997814	.997882	.997948	.998012	.998074
2.9	.998134	.998193	.998250	.998305	.998359	.998411	.998462	.998511	.998559	.998605
3.0	.998650	.998694	.998736	.998777	.998817	.998856	.998893	.998930	.998965	.998999

3 Loi Lognormale

Définition 3.1 *Une variable aléatoire Y suit une loi lognormale avec paramètres μ_X et σ_X^2 si la variable aléatoire $X = \ln Y$ suit une loi $\mathcal{N}(\mu_X,\ \sigma_X^2)$.*

a) $C_Y =]0,\ +\infty[$

b) Fonction de densité

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma_X y\sqrt{2\pi}}\ e^{-\left(\dfrac{\ln y - \mu_X}{\sigma_X}\right)^2} & \text{si } y \in C_Y \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

c) Espérance et variance

$$\mu_Y = e^{\mu_X + \dfrac{\sigma^2}{2}}$$
$$\sigma^2 = e^{2\mu_X + \sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right)$$

4 Loi exponentielle

Définition 4.1

Une variable aléatoire continue X suit une loi exponentielle (ou est dite exponentielle) avec paramètres θ et ν

$$\Leftrightarrow X : Exp[\theta,\ \nu]$$

si elle admet comme support

$$C_X =]\nu,\ +\infty[$$

et comme fonction de densité :

$$f_X(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta(x-\nu)} & \forall x \in C_X \\ 0 & \textit{ailleurs} \end{cases}$$

avec $\theta \in]0,\ +\infty[$ et $\nu \in]-\infty,\ +\infty[$

Remarque 4.1 Pour $\nu = 0$, X est une variable aléatoire donnant le temps d'attente pour la première apparition du phénomène aléatoire quand Y représente la variable aléatoire du nombre d'apparitions suivant une loi de Poisson avec paramètre $\theta T = \lambda$.
X est aussi la variable aléatoire pour le temps entre deux apparitions du phénomène aléatoire.

*** Fonctionnelle génératrice**

$$\begin{aligned} M_X(t) \equiv E[e^{tX}] &= \int_{\nu}^{+\infty} e^{tx}\theta e^{-\theta(x-\nu)}dx (\text{on pose } z = x - \nu \\ &= \int_0^{+\infty} \theta e^{t(z+\nu)}e^{-\theta z}dz = \frac{\theta e^{t\nu}}{\theta - t}\ (\text{avec } t < \theta) \end{aligned}$$

$$M_X(t) = \frac{\theta e^{t\nu}}{\theta - t}\ (\text{avec } t < \theta)$$

*** Moyenne (Espérance)**

$$\mu_X = \nu + \frac{1}{\theta}$$

*** Variance**

$$\sigma_X^2 \equiv E[X^2] - \mu_X^2 = \frac{1}{\theta^2}$$

*** Fonction caractéristique**

$$\Phi(\omega) = \frac{\theta e^{j\omega\nu}}{\theta - j\omega}$$

Exemple 4.1

***** Soit T le temps de fonctionnement d'un système (ou appareil) avant la première panne

$$\Rightarrow$$

Loi exponentielle avec $\nu = 0$ et $\theta > 0$
Probabilité $P[\{T > t_0\}] = e^{-\theta t_0} = \varphi(t_0) = 1 - F_T(t_0)$

$\Leftrightarrow$ *Fiabilité du système*

Système idéal : $\varphi(t_0) = 1 \Leftrightarrow \theta = 0$ impossible
En pratique, on fixe φ et on détermine θ (pour un certain t) nécessaire pour atteindre ce but.

***** Durée de service d'une ampoule. On pose $\nu = 0, \quad \theta = \frac{1}{600}$
La durée moyenne : $600h$
La fiabilité de cette ampoule à $t = 500h$ est $e^{-\frac{5}{6}}$

$$\Leftrightarrow$$

l'ampoule dure au moins $500h$ avec la probabilité $e^{-\frac{5}{6}}$

Remarque 4.2 Pour $\nu = 0$

$$F_X(x) = \int_0^x \theta e^{-\theta t} dt = \left[-e^{-\theta t}\right]_0^x = 1 - e^{-\theta x}$$

5 Loi ”gamma“

1 Rappel : Fonction gamma

Définition 5.1

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} y^{a-1} e^{-y} dy \; a > 0$$

On peut vérifier que l'intégrale converge $\forall a > 0$

Propriété 5.1

* $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)\ a > 0$
* $\Gamma(a+1) = a!\ \forall a \in \mathbb{N}\ (\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-y} dy = 1)$
* $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

Si on pose : $y = \frac{x}{\beta}\ \beta > 0 \Rightarrow \Gamma(a) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1} e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^a} dx$

2 Fonction de densité.

Définition 5.2
X variable aléatoire continue suit une loi "gamma" avec paramètres α et β

$$\Leftrightarrow X : \mathcal{G}(\alpha,\ \beta)$$

si elle admet comme support :

$$C_X =]0,\ +\infty[$$

et fonction de densité :

$$f_X(x) = \left\{ \frac{x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \quad \forall x \in C_X \right.$$

Remarque 5.1 (Loi "Gamma")

i)

Si $\alpha = 1 \Rightarrow$ loi exponentielle avec $\theta = \frac{1}{\beta}$ et $\nu = 0$

ii) Fonction de répartition de $X : \mathcal{G}(\alpha,\ \beta)$

$$\Rightarrow F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^x y^{\alpha-1} e^{-\frac{y}{\beta}} dy & \textit{si } x > 0 \\ 0 & \textit{ailleurs} \end{cases}$$

Existence de tables pour : $\frac{1}{\Gamma(u+p)} \int_0^{u\sqrt{1+p}} y^p e^{-y} dy$

iv) Fonctionnelle génératrice

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \frac{1}{(1-\beta t)^\alpha}$$

Espérance : $\mu_X = \alpha\beta$
Variance : $\sigma_X^2 = \alpha\beta^2$

v) Fonction caractéristique
$\Phi(\omega) = \frac{1}{(1 - j\omega\beta)^\alpha}$

Exemple 5.1
Si T est la variable aléatoire donnant le temps de fonctionnement d'un système avant la première panne $\Rightarrow$ loi exponentielle
On peut supposer qu'un fusible ne s'use pas alors :

$$P[\{T > t_1 + t_2\}|[T > t_1\}] = P[\{T > t_2\}] \ (t_1,\ t_2) > 0$$

mais il existe des situations où un appareil (même dans les bonnes conditions) subit une usure.
Exemple de l'automobile : les lois exponentielle et normale ne sont plus valables. La loi de gamma est souvent le modèle le plus valable.

6 Loi du ”khi 2“

Définition 6.1
X variable aléatoire continue suit une loi $\mathcal{G}\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$, loi gamma particulière $r \in \mathbb{N}^*$

$$\Leftrightarrow X : \chi_r^2$$

avec r degrés de liberté

avec :
*** Fonction de densité**

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{r}{2}}\Gamma\left(\dfrac{r}{2}\right)} x^{\frac{x}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

*** Espérance**

$$\mu_X = r$$

*** Variance**

$$\sigma_X^2 = 2r$$

Théorème 6.1
Soit X une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(0,\ 1)$
$\Rightarrow Y = X^2$ suit une loi du ”khi 2“

7 Loi de Weibull

Définition 7.1
X variable aléatoire continue suit une loi de Weibull avec paramètres $\alpha,\ \beta,\ \gamma$.
$\Leftrightarrow X : \mathcal{W}(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ si $Y = \left(\dfrac{X-\gamma}{\alpha}\right)^\beta$ suit une loi exponentielle $Exp[1,\ 0]$
$\alpha \in]0,\ +\infty[,\ \beta \in]0,\ +\infty[,\ \gamma \in]-\infty,\ +\infty[$

*** Fonction de densité**

$$f_X(x) = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}} \; C_X = \mathbb{R}$$

Remarque 7.1

Si $\beta = 1 \Rightarrow$ loi exponentielle avec paramètre $\theta = \dfrac{1}{\alpha}$ et $\nu = \gamma$

*** Fonction de répartition pour** $X : \mathcal{W}(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}} & \text{si } x > \gamma \\ 0 & \text{si } x \leq \gamma \end{cases}$$

*** Tables pour cette fonction quand** $\alpha = 1$ **et** $\gamma = 0$ **Exemple 7.1**

Weibull : modèle pour représenter la tension à laquelle un matériau se brise

*** Espérance**

$$\mu_X = \gamma + \alpha\Gamma\left(\frac{\beta+1}{\beta}\right)$$

*** Variance**

$$\sigma_X^2 = \alpha^2\left[\Gamma\left(\frac{\beta+2}{\beta}\right) - \Gamma\left(\frac{\beta+1}{\beta}\right)^2\right]$$

*** Graphes de** $f_X = \mathcal{W}(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$