INTRODUCTION AUX PROBABILITES
V

Support du cours donné en 1^{re} année

par Marietta Manolessou
EISTI - Département Mathématiques

Année 2006-2007

Table des matières

Probabilités **1**

5 Transformations de variables aléatoires $X \to Y = \varphi(X)$ **1**

1 Transformations 1

2 Espérance d'une variable aléatoire transformée 3

Table des figures

Chapitre 5

Transformations de variables aléatoires $X \to Y = \varphi(X)$

1 Transformations

Soit $(\Omega,\ \mathcal{A})$ un espace probabilisable.
Soit X une variable aléatoire et une application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\Omega \xrightarrow{X} \mathbb{R} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$$

ou

$$\Omega \xrightarrow{\varphi(X)} \mathbb{R}.$$

On pose

$$Y = \varphi(X)$$

alors :

Proposition 1.1
Y est une variable aléatoire si et seulement si

$$\forall b \in \mathbb{R}\ \{x : \varphi(x) \leq b\} \in\ \mathcal{R}.$$

Si S_X est le support (continu ou discret) de X, alors $\varphi(S_X)$ est le support de Y.

Théorème 1.1 ($\varphi(S_X)$ discret)
Soit X une var. aléatoire discrète avec support D_X, fonction de masse p_X et une application :

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

telle que $Y = \varphi(X)$ est une variable aléatoire.

$$\Rightarrow Y \text{est une variable aléatoire discrète avec : support } D_Y = \varphi(D_X)$$

et fonction de masse :

$$p_Y(y) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x \in \{\varphi(x)=y\} \cap D_X} p_X(x) & \text{si } y \in D_Y \\ 0 & \text{si } y \notin D_Y \end{cases}$$

Théorème 1.2 ($\varphi(C_X)$ discret)
Soit X une var. aléatoire continue avec support C_X et fonction de densité f_X . Soit une application :

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

telle que $Y = \varphi(X)$ est une variable aléatoire. et $\varphi(C_X)$ un ensemble discret.

$$\Rightarrow Y \text{ est une variable aléatoire discrète avec support } D_Y \subseteq \varphi(C_X)$$

et fonction de masse

$$p_Y(y) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\{\varphi(x)=y\}\cap C_X} f_X(x) & \text{si } y \in \varphi(C_X) \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Théorème 1.3 ($\varphi(C_X)$ continu, φ monotone)
Soit X une var. aléatoire continue avec support C_X et fonction de densité f_X . Soit une application

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

fonction monotone (strictement croissante ou décroissante) et telle que :

$$Y = \varphi(X) \text{ variable aléatoire et } \qquad \varphi^{-1} = \psi$$

(l'image inverse) admet une dérivée continue,

$$\Rightarrow$$

Y est une var. aléatoire continue avec support $C_Y = \varphi(C_X)$
et fonction de densité

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \notin C_Y \\ f_X(\psi(y))|\psi'(y)| & \text{si } y \in C_Y \end{cases}$$

Remarque 1.1
Si la fonction n'est pas monotone, l'image inverse n'a pas de dérivée.

Théorème 1.4 (Généralisation φ pas monotone)
Soit Xune var. aléatoire continue avec support C_X et fonction de densité f_X . Soit une application :

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

telle que $\forall x \in C_X$ φ dérivable et $\varphi'(x) \neq 0$ sauf en un nombre fini de points et,
$\forall y \in \mathbb{R}$ il existe $m(y)$ points $x_1(y), x_2(y), \ldots x_m(y) \in C_X$ tels que

$$\forall\ k = 1 \ldots m(y), \varphi(x_K(y)) = y \text{ et } \varphi'(x_K(y)) \neq 0$$

ou il n'existe pas de points $x \in C_X$ tels que

$$\varphi(x) = y \text{ et } \varphi'(x) \neq 0 \text{ et on pose : } \quad m(y) = 0$$

$$\Rightarrow Y = \varphi(x) \text{est une variable aléatoire continue avec}$$

$$\text{support } C_Y = \varphi(C_X)$$

et fonction de densité

$$f_Y(y) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{m(y)} f_X(x_K(y))|\varphi'(x_K(y))|^{-1} & \text{si } m(y) > 0 \\ 0 & \text{si } m(y) = 0 \end{cases}$$

2 Espérance d'une variable aléatoire transformée

Définition 2.1 Soit X une variable aléatoire $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $Y = \varphi(X)$ variable aléatoire (Variable al. transformée de X)

1. Si X discrète $E[\varphi(X)] = \sum_{x \in D_X} \varphi(x) p_X(x)$
2. Si X continue avec f_X fonction de densité $E[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f_X(x) dx$

Il faut assurer la convergence dans les deux cas :
existence ⇔ convergence absolue de la série ou de l'intégrale au sens de Lebesgue.

Théorème 2.1
Soient : X variable aléatoire
$\varphi_1 \dots \varphi_n$ fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\varphi_1(X) \dots \varphi_n(X)$ sont des var. aléatoires et $E(\varphi_i(X))$ existe $\forall :\ i = 1, 2, \dots n$

$$\Rightarrow \forall \quad a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$$

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(x)\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i E\left[\varphi_i(X)\right]$$