INTRODUCTION AUX PROBABILITES
XIII-XIV-XV

Support du cours donné en 1^{re} année

par Marietta Manolessou
EISTI - Département Mathématiques

Année 2008-2009

Table des matières

Table des figures

Chapitre 13

Introduction aux Processus Stochastiques

1 Définition d'un processus stochastique

1 Processus Stoch. et sa Trajectoire

Définition 1.1
Soit (Ω, $\mathcal{F}$, P) un espace de probabilité, et soit Y une variable aléatoire définie sur Ω (donc $\mathcal{F}-$ mesurable).

*On appelle **tribu engendrée par** Y ou $Y-$ tribu, la plus petite des tribus (formée par des sous ensembles de Ω) par rapport à laquelle la var. al. Y est **mesurable** et on note :*

$$\mathcal{F}(Y) \;\; ou \;\; \sigma(Y)$$

.

Définition 1.2 *Soient :*
- *(Ω, $\mathcal{F}$, P) un espace de probabilité*
- *T un ensemble quelconque*
- *(E, $\mathcal{E}$) esp. mesurable*

*On appelle **processus stochastique** défini sur Ω, avec T **ensemble des temps** et E **espace des états**, toute famille $\{X(t)\}_{t\in T}$ de var. al. à valeurs dans E.*
- *La variable aléatoire $X(t)$ est appelée : état à l'instant t.*
- *Autre notation : $\{X_t\}_{t\in T}$*

Définition 1.3 *Trajectoire*
$\forall\, \omega \in \Omega$ l'application :

$$\begin{array}{ccc} T & \to & E \\ t & \mapsto & X(t,\omega) \end{array} \qquad ou \;\; t \mapsto X_t(\omega)$$

*est appelée : **la trajectoire associée à** ω*

On étudiera **2 cas**
(a) $T \in \mathbb{N}$ cas en *temps discret*
(b) $T = \{t \in [0, t_0]\}$ (intervalle de $\mathbb{R}$) $\Leftrightarrow$ *cas en temps continu*
- Par la suite, on considérera que $E \subset \mathbb{R}$ ou $E \subset \mathbb{R}^N$ (cas général) (fini ou infini)

2 Processus à accroissements indépendants

Définition 1.4 *Soit* $\{X(t)\}_{t\in T}$ *un* ***processus stochastique*** *défini sur* Ω *; il est à* ***accroissements indépendants*** *ssi*

$$\forall \quad t_1 < t_2 < t_3 \ldots < t_n \quad (t_i \in T)$$

les var. aléatoires :

$$X(t_1), X(t_2) - X(t_1), \ldots X(t_n) - X(t_{n-1})$$

sont indépendantes

3 Processus à accroissements stationnaires

Définition 1.5 *Un* ***processus stochastique*** $\{X(t)\}_{t\in T}$*, défini sur* Ω*, est à* ***accroissements stationnaires*** *ssi les var. aléatoires.* $X(h)$ *et* $X(t+h) - X(t)$ *sont equidistribuées.*

4 Filtration

Définition 1.6 *Soit* $(\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$ *un espace de probabilité.*
On appelle ***filtration****, une famille de sous tribus*

$$(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$$

t.q. $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ *pour* $s \leq t$ *(**famille croissante de sous tribus de** $\mathcal{F}$).*

Interprétation
$\mathcal{F}_t$ (appelée **tribu des évènements antérieurs à** t) modélise les informations disponibles à temps t.

5 Filtration naturelle

Remarque 1.1 Tout processus stochastique X génère une "filtration naturelle"

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}(X(s);\ s \leq t)$$

$\Leftrightarrow$ ***filtration engendrée par les variables aléatoires antérieures à l'instant*** t.

Définition 1.7 ***Processus stochastique adapté une filtration*** $\{\mathcal{F}_t\}$
*(i)**Cas continu** : Un processus stochastique* $X(t)_{t\in T}$ *est adapté à une filtration* $\{\mathcal{F}_t\}$ *si* $\forall t \in\ T\ X_t$ *est* $\mathcal{F}_t-$*mesurable*
(ii) ***Cas discret*** *:* X_n *adapté à* $\mathcal{F}_n$ $\quad\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$*,* $(T = \mathbb{N})$*,* X_n *est* $\mathcal{F}_n - mesurable$

Définition 1.8 ***Processus stochastique prévisible par rapport à*** $\{\mathcal{F}_n\}$
Cas discret : X_n *prévisible, par rapport à* $\{\mathcal{F}_n\}$
$\Leftrightarrow \quad X_n$ *est adapté à* $\mathcal{F}_n$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}$*,* $(T = \mathbb{N})$*,* X_n *est* $\mathcal{F}_{n-1} - mesurable.$

Chapitre 14

Introduction aux Processus Stochastiques Chaînes de Markov A

1 Processus Markoviens-Chaînes de Markov

1 Références

Références

(i) P. BREMAUD
“Introduction aux probabilités” par P. Bremaud
Edition : Springer et Verlag
(ii) R. Faure, "*Recherche Opérationnelle*" (Masson)
(iii) J.-M. Helary - R. Pedrono, "*Recherche Opérationnelle*"
(iv) P. Gordon, "*Théorie des chaînes de Markov*" (Dunod)
(v) S.M.Ross , "*Initiation aux Probabilités*
(Presses Polytechniques et Universitaires Romandes)
(vi) S. Lipschutz, "*Probabilités (Série SCHAUM)* (Mc Graw Hill - Ediscience)

2 Préliminaires

Définition 1.1 (Rappel) *Soient :*

– *(Ω, $\mathcal{F}$, P) un espace de probabilité*
– *T un ensemble quelconque (discret ou continu)*
– *$(E, \mathcal{E})$ espace mesurable (continu ou discret -dénombrable ou fini)*

On appelle ***processus stochastique*** *défini sur Ω, avec T* ***ens. des temps*** *et E* ***esp. des états*** *toute famille $\{X(t)\}_{t\in T}$ de variables aléatoires à valeurs dans E.*

• *La variable aléatoire $X(t)$ est appelée : état à l'instant t.*

• *Autre notation : $\{X_t\}_{t\in T}$*

3 Processus de Markov- Chaînes de Markov

Définition 1.2 *Données* $(\Omega, \mathcal{F}, \{F_t\}, P)$, $\{X_t\}$ *processus stochastique sur* Ω
$\Rightarrow$ $\{X_t\}$ *est Markovien (ou processus de Markov)*
ssi : $\forall \quad t_1 \leq t_2$

$$P[\{X(t_2) \in \mathcal{B}\}|\mathcal{F}_{t_1}] = P[\{X(t_2) \in \mathcal{B}\}|X(t_1)]$$

ou ***ssi***

$$E[f[X(t_2))|\mathcal{F}_{t_1}] = E[f[X(t_2)]|X(t_1)]$$

pour toute fonction f *continue et bornée.*
$\Leftrightarrow$ *la loi de* $X(t_2)$ *conditionnellement à* $\mathcal{F}_{t_1}$ *est égale à la loi de* $X(t_2)$ *conditionnellement à* $X(t_1)$*.*

Autrement dit :
A la date t_1 toute l'information pertinente sur les réalisations futures sont contenues dans $X(t_1)$ (v. aussi cas particulier les Chaînes de Markov).

Définition 1.3 (Chaîne de Markov)
Un processus stochastique $\{X(t)\}_{t \in T}$ *défini sur un espace de probabilité (*$\Omega,\ \mathcal{F},\ P$*) avec :*
E*= Ensemble fini ou dénombrable* ***-ensemble des états du système***
T*= Sous-ensemble de* $\mathbb{R}^+$*,* ***ensemble des paramètres du temps***
est appelé Chaîne de Markov à "temps" $\in T$ *à valeurs dans E, si. :*

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ 0 < t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n \leq t(\in T);\ s \in T;\ i_0, i_1, \ldots, i_n, i, j \in E$$

si l'égalité suivante entre probabilités conditionnelles est bien vérifiée :

$$P[X_{t+s} = j\ \ |X_{t_0} = i_0,\ X_{t_1} = i_1, \ldots, X_{t_n} = i_n,\ X_t = i] = P[X_{t+s} = j|X_t = i]$$

Remarque 1.1 *Souvent on utilise la notation* $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *pour le temps discret.*

Remarque Importante
Une chaîne de Markov est complètement déterminée : **(a)** par ses **probabilités de transition** :

$$\begin{gathered} p_{i,j}(t,s) = P[X_{t+s} = j|X_t = i] \\ \forall\, t \in T,\ s \in T \\ i \in E,\ j \in E. \end{gathered}$$

et **(b)** par sa **loi de probabilité de l'état initial :**

$$\Pi_i^{(0)} = P[X_0 = i] \quad (i \in E)$$

Définition 1.4 *Les chaînes* **homogènes** *de Markov.*
Ce sont les chaînes pour lesquelles les probabilités de transition $p_{i,j}(t,s)$ *ne dépendent pas de l'instant* t *mais seulement de l'accroissement de temps* s*.*

* On étudiera surtout les chaînes homogènes à temps discret. ($t = n \in \mathbb{N}$)

4 Matrices de Transition

Matrice Stochastique

Définition 1.5
a) ***Vecteur de probabilité***
$u = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \in \mathbb{R}^n$ *est un vecteur de probabilité*

$$\textit{ssi} \quad \begin{cases} 0 \leq u_i \leq 1 & \forall\, i = 1, \ldots, n \\ \sum\limits_{i=1}^{n} u_i = 1 \end{cases}$$

Exemples :

$u = \{\frac{1}{4};\ \frac{1}{4};\ 0;\ \frac{1}{2}\}$ ***oui*** *(vecteur de probabilité*

$v = \{\frac{3}{4};\ 0;\ -\frac{1}{4};\ \frac{1}{2}\}$ ***non***

$w = \{\frac{3}{4};\ \frac{1}{2};\ 0;\ \frac{1}{4}\}$ ***non***

b) ***Matrice Stochastique***
Une matrice carrée $P = \{p_{ij}\} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *est une matrice* *stochastique* *si chacune de ses lignes est un vecteur de probabilité :*

$$\Rightarrow$$

$$0 \leq p_{ij} \leq 1 \quad \textit{et,} \quad \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1 \quad (\forall\, i = 1, \ldots, n)$$

Exemples 1.1

$$P_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad (Non); \quad P_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad (Non); \quad P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \quad (Oui).$$

Proposition 1.1 *Si A et B sont deux matrices stochastiques*

$$\Rightarrow \begin{cases} (i) & AB \textit{est une matrice stochastique} \\ (ii) & A^m \textit{est une matrice stochastique} \end{cases}$$

Remarque 1.2 *Les probabilités p_{ij} de transition d'une chaîne de Markov finie (qui est un processus stochastique) peuvent être rangées sous la forme d'une matrice P qu'on appelle matrice de transition.*

Proposition 1.2 *La matrice de transition P d'une chaîne de Markov est une matrice stochastique.*

Matrice de Transition

Cas discret : matrice de transition

$$\begin{aligned} P &= \{p_{ij}\}_{i,j \in E} \\ p_{ij} &= P\{X_{n+1} = j | X_n = i\} \\ &= P\{X_1 = j | X_0 = i\} \end{aligned}$$

Cas continu :
Famille de matrices de transition.

$$\begin{aligned} P &= \{p_{ij}(t)\}_{i,j \in E} \\ p_{ij}(t) &= P\{X_{t_0+t} = j | X_{t_0} = i\} \\ &= P\{X_t = j | X_0 = i\} \end{aligned}$$

5 Propriétés de la matrice de transition P

et loi de probabilité d'état.

Proposition 1.3 ***Cas discret***

$$\begin{array}{rll} i) & P^{n+m} = P^n \cdot P^m & \forall\, n,m \in \mathbb{N} \\ ii) & P^n = \{p_{ij}^n\}; & p_{ij}^{(n)} = P[X_{n_0+n} = j | X_{n_0} = i] = P[X_n = j | X_0 = i] \\ iii) & \textit{Soit } \Pi^{(n)} \equiv (\Pi_i^{(n)})_{i\in E} & (\textit{ vecteur de prob des états du système à } t = n) \\ & \textit{avec } \Pi_i^{(n)} = P[X_n = i] & \\ & \Rightarrow & \Pi^{(n+m)} = \Pi^{(n)} P^m \end{array}$$

6 Graphe associé à une chaîne de Markov

Définition 1.6 ***(Graphe orienté d'une chaîne de Markov discrète)***
Le graphe associé à une chaîne de Markov (et à sa matrice de transition P) est défini par :
(a) Ses ***sommets*** *qui représentent les états du système $(i \in E)$*
(b) Ses ***arêtes*** *$(i \to j)$ associées aux probabilités de transition : $p_{ij} > 0$*

<u>Utilité d'un graphe</u>
(i) On voit directement si le système peut passer d'un état à un autre (dans un temps n fini)
(ii) On étudie plus facilement les propriétés des états du système
(iii) On classifie plus facilement les états du système (Classes d'équivalence)

Exemple 1.1 <u>*exercice*</u>
Faire le graphe associé à la chaîne de Markov dont P est :

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Proposition 1.4 <u>*Cas continu*</u>
(i) $\forall\, t,\ s \in T,\ P(t+s) = P(t) \cdot P(s)$
(ii) $P(t) = \{P_{ij}(t)\}$ *où*

$$\begin{aligned} P_{ij}(t) &= P[X_{t+s} = j | X_t = i] \\ &= P[X_s = j | X_0 = i] \end{aligned}$$

(iii) Si $\Pi(t) = \{\Pi_i(t)\}_{i\in E}$ *avec*

$$\Pi_i(t) = P[X_t = i]$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\Pi(t+s) = \Pi(t) \cdot P(s)}$$

Chapitre 15

Introduction aux Processus Stochastiques Chaînes de Markov B

1 Régimes d'une chaîne de Markov Ergodicité - Classes d'equivalence

1 Résumé

* Régimes d'une chaîne de Markov - stationnarité
* Ergodicité
* Caractérisation des états
* Classes d'équivalence

Remarque 1.1 *Par la suite on étudiera toujours :* ***les cas discrets***

2 Régimes d'une chaîne de Markov

Définitions :
* Régimes d'une chaîne de Markov
* Régime stationnaire (Point fixe de P)
* Ergodicité

Définition 1.1
Le vecteur de probabilité des états du système à l'instant $t = n$ (ligne de P à l'instant n), $\Pi^{(n)}$ est appelé ***régime du système à l'instant*** n.

Définition 1.2
Un ***régime*** Π ***est stationnaire*** *ssi*

$$\Pi P = \Pi \quad \textit{avec :} \left\{ \begin{array}{rcl} \sum_{i \in E} \Pi_i & = & 1 \\ \Pi_i & \geq & 0 \quad \forall\, i \in E \end{array} \right\}$$

Remarque 1.2

(a) le vecteur Π est un vecteur propre (à gauche) de P associé à la valeur propre $\underline{1}$ de P

(b) $\Leftrightarrow \Pi$ est un **point fixe** de la matrice de transition P considérée comme transformation des probabilités des différents états du système quand le temps **varie** : $n \rightarrow n+m$

(c) $\Leftrightarrow \Pi =$ *vecteur constant.*

Exemple 1.1 <u>*Exercice*</u>

On considère une chaîne de Markov dont la matrice de transition P est la suivante ; trouver (si il en existe) le régime stationnaire :

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(d) *(Important !)* La stationnarité du régime :

$$\Pi^{(n)} P = \Pi^{(n)}$$

$\Leftrightarrow$

$$\forall \ m > n \ : \Pi^{(m)} = \Pi^{(n)}$$

$$\Leftrightarrow$$

La probabilité pour que le système se trouve à un certain état reste la même pour tout instant m *après* n*.*

Définition 1.3

*On appelle régime **permanent** le vecteur de probabilité :*

$$\begin{array}{lll} \Pi & \textit{t.q.} & \Pi = \lim\limits_{n\to\infty} \Pi^{(n)} \\ & \textit{ou} & \lim\limits_{n\to\infty} \Pi^{(0)} P^{(n)} = \Pi \end{array}$$

Remarque 1.3

*Si il existe un **régime permanent** alors il est nécessairement **stationnaire**.*

3 Ergodicité

Définition 1.4

*On dit qu'une chaîne de Markov est **ergodique***

ssi

$$\exists \ \Pi \qquad \textit{avec} \quad \Pi = \lim_{n\to\infty} \Pi^{(n)}$$

<u>*pour tout*</u> ***régime initial*** $\Pi^{(0)}$

Autrement dit : l'ergodicité caractérise les systèmes qui possèdent un régime permanent indépendamment du régime initial $\Pi^{(0)}$

4 Caractérisation des états

Définition 1.5 *(<u>Propriétés des états</u>)*

1) On considère l'application suivante f_i de l'ensemmble des états E vers l'intervalle $I = [0, 1]$

$$\begin{array}{rcl} & E & \rightarrow & [0,1] \\ f_i : & i & \rightarrow & f_i \end{array}$$

$$f_i = P[\exists\, n > 0 | P(X_n = i | X_0 = i)]$$

*Alors : a) i est un **état transitoire** si*

$$\underline{f_i < 1}$$

*b) i est un **état récurrent** si*

$$\underline{f_i = 1}$$

*2) Soit d_i = **pgcd** des longueurs de chemins partant de i et arrivant en i*
Si $d_i = 1$
*$\Rightarrow$ L'état i est dit **apériodique***
Si $d_i \neq 1$
*$\Rightarrow$ L'état i est dit **périodique** de **période** d_i*
3) Quand le système se trouve à l'état $i \in E$ et il ne peut plus en sortir

$$\Leftrightarrow \quad P_{ii}^{(n)} = 1 \quad (\forall n)$$

*Cet état est appelé **absorbant**.*
(Il est forcément récurrent et apériodique)

5 Etats et Classes d'équivalence

Définition 1.6 ***Classes d'équivalence d'une chaîne de Markov.***
On définit une relation d'équivalence sur E :

$$i \sim j \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} (i = j) \quad \underline{ou} \\ \left(\begin{array}{c} \exists\, n \geq 1 \text{ t.q. } P_{ij}^{(n)} > 0 \\ \text{et } \exists\, m \geq 1 \text{ t.q. } P_{ji}^{(m)} > 0 \end{array} \right) \end{array} \right.$$

On dit alors que les deux états i et j appartiennent à la même classe d'équivalence.

Remarque 1.4 Les états d'une même classe ont les mêmes propriétés d'où les trois possibilités :
- ***Classe Récurrente***
- ***Classe Transitoire***
- ***Classe Absorbante** ($\Leftrightarrow$ 1 seul état $\in E$)*

Définition 1.7 *Chaîne de Markov **irréductible***
$\Leftrightarrow$ G fortement connexe
$\Leftrightarrow \exists\, 1$ seule classe récurrente