INTRODUCTION AUX PROBABILITES
XII

Support du cours donné en 1^{re} année

par Marietta Manolessou
EISTI - Département Mathématiques

Année 2008-2009

Table des matières

Table des figures

Chapitre 12

Vecteurs aléatoires

1 Vecteurs aléatoires (ou de probabilités)

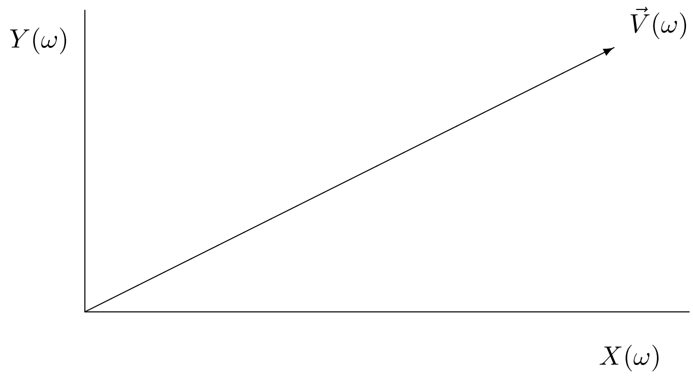
1 Vecteurs aléatoires de dimension 2

a)

$$\begin{array}{rcl} X\ :(\Omega,\ \mathcal{A},\ P) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ Y\ :(\Omega,\ \mathcal{A},\ P) & \rightarrow & \mathbb{R} \end{array}$$

$\vec{V}(\omega) \in \mathbb{R}^2$ (vect. aléatoire)

Exemple 1.1 *Evénement :* $A(D) \equiv \vec{V} \in D, \quad D \subset \mathbb{R}^2$



On associe l'ens. des pts ω *t.q.*

$$A(x,y) = \{\omega | X(\omega) \leq x\ ;\ Y(\omega) \leq y\}$$

b) Mesure de Probabilité - Fonction de répartition

$$F(x,y) \equiv P[\{X \leq x\} \bigcap \{Y \leq y\}]$$

*** Cas continu :**

(i)

$$P(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

existe $\Leftrightarrow$ fn de densité "$f(x,y)$" d'une variable aléatoire continue (vecteur) et inversement :

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} \underset{\displaystyle (f(x',y'))}{\underset{\Updownarrow}{P(x',y')}}\, dx'dy'$$

(ii) Fonction de répartition marginale

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x',y')dx'dy'$$

et fonction de densité marginale $\Leftrightarrow$ (dériv. par rapport à x)

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$$

*** Cas discret - fonction de masse :**

(i)

$$P[x_i,y_j] \equiv P[\{X = x_i\} \bigcap \{Y = y_j\}]$$

et $\forall\ D \in \mathbb{R}^2$ fonction de répartition

$$P[D] = \sum_{(x_i,y_j)\in D} P[x_i,y_j]$$

(ii)

- Fonction de masse marginale

$$Px_i = \sum_{y_j} P(x_i y_j)$$

- Fonction de répartition marginale

$$F_X(x_i) = \underset{\displaystyle y_j \in]-\infty,+\infty[}{\underset{\downarrow}{F[x_i,+\infty]}}$$

c) Espérance mathématique (cas général : $h(X,Y)$)

*** Cas continu :**

$$E[h[X,Y]] = \iint h(x,y)\ f(x,y)dxdy$$

*** Cas discret :**

$$E[h[X,Y]] = \sum_{x_i,y_j} h(x_i,y_j)P(x_i,y_j)$$

Propriétés

(a) Si $h(x, y) = x + y$

$$E[h(X, Y)] = E[X] + E[Y]$$

(b) Si $h(x, y) = xy$ $\Rightarrow$ en général

$$E[(X \cdot Y] \neq E[X]E[Y]$$

(c) (Rappel) Déf : Variables aléatoires indépendantes

$$\Leftrightarrow \quad F(x, y) = F_X(x)F_Y(y).$$

(d)

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$$

$$P(x, y) = P_X(x)P_Y(y)$$

Définition générale $X,\ Y$ **non corrélés**

$$\Leftrightarrow \quad E[h(X) \cdot \rho(Y)] = E[h[X]]E[\rho[Y]] \quad \forall\, h,\ \rho. \qquad \text{(N.C.)}$$

Remarque importante

Cette factorisation peut se produire même si $X,\ Y$ sont liées.

d) Covariance (définition)

$$\text{Cov}(X, Y) \equiv E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$$

ou $\Rightarrow$

$$\text{Cov}[X, Y] = E[XY] - \mu_X\mu_Y$$

(i) Corollaire

$\text{Cov}(X, Y) = 0$
si $X,\ Y$ sont non corrélées

(ii) "Inégalité de Schwartz"

$$\text{Cov}^2(X, Y) \leq \sigma_X^2\sigma_Y^2$$

$\Leftrightarrow$

$$\text{Cov}(X, Y) \leq \sigma_X\sigma_Y$$

e) Coefficient de corrélation (de $X,\ Y$**)** déf.

$$C \equiv \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$$

en général

$$|C| \leq 1$$

* Si $C = 0$ $\Leftrightarrow$ var. al. $X,\ Y$ non corrélées.
* Si $|C| = 1$ (C peutêtre aussi < 0) $\Leftrightarrow$ $X,\ Y$ **complètement corrélées**.