

E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs
PROBABILITES T.D.1
le 11 octobre 2011

1

i) Montrer que si \mathcal{A} est une tribu sur Ω et si $\forall i \geq 1 A_i \in \mathcal{A}$ alors

$$\bigcap_i A_i \in \mathcal{A}$$

ii) Soit $\{\mathcal{A}_i \mid i \in I\}$ une famille de tribus sur Ω où I est un ensemble d'indices quelconque. Montrer que $\bigcap_i \mathcal{A}_i$ est aussi une tribu sur Ω .

iii). Soient A, B sous-ensembles de Ω .

- a) Décrire la tribu engendrée par A . Justifier votre réponse.
- b) Décrire la tribu engendrée par A et B . Justifier votre réponse.

2

i) On lance simultanément une pièce de monnaie et un dé et on observe les faces supérieures présentées après le lancer. En désignant les faces de la pièce par Π (pile) et F (face) respectivement et celles du dé par 1, 2, 3, 4, 5, 6, déterminer l'espace échantillon (espace des états ou ensemble fondamental) associé à cette expérience aléatoire.

ii) Même question que précédemment pour l'expérience suivante : On lance un dé jusqu'à ce que l'on obtienne 6 pour la troisième fois et l'on observe le nombre de lancers nécessaires pour atteindre ce but.

iii) Même question que précédemment pour l'expérience suivante : Pendant une période de temps donnée, on compte le nombre d'automobiles traversant le poste de péage d'un pont.

iv) Pour l'expérience du ii) décrire les sous-ensembles de Ω correspondant aux événements suivants :

- a) Le troisième 6 apparaît au septième lancer.
- b) Le troisième 6 est obtenu après le septième lancer mais avant le douzième.
- c) Le troisième 6 n'est pas obtenu durant les cinq premiers lancers.

3

On lance deux dés et on observe le nombre de points sur la face supérieure de chaque dé. Représenter les événements suivants par les sous ensembles de l'espace échantillon.

- i) Le nombre de points sur chaque face est supérieur à 3.
- ii) Le nombre total de points est 8.
- iii) Le nombre total de points est supérieur à 9.
- iv) Sur chaque face, il y a un nombre pair de points.
- v) Sur l'une des faces, il y a un nombre pair de points et, sur l'autre il y a plus de cinq points.

4

En utilisant les opérations de réunion d'intersection et de complément, représenter les événements suivants.

- i) Au moins un des événements A, B se réalise.
- ii) Les événements A, B se réalisent.
- iii) Exactement un des événements A, B se réalise.
- iv) Aucun des événements A, B ne se réalise.
- v) Au moins un des événements A, B, C se réalise.
- vi) Au moins deux des événements A, B, C se réalisent.
- vii) Exactement un des événements A, B, C ne se réalise pas.
- viii) Exactement un des événements A, B, C se réalise .
- ix) Aucun des événements A, B, C ne se réalise .
- x) A ne se réalise pas mais au moins un des événements B, C se réalise.
- xi) Les événements A, B, C se réalisent.

5

Pour un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) ,

$$\text{si : } P[A] = 0,3, \quad P[B] = 0,2 \quad \text{et} \quad P[A \cap B] = 0,1$$

déterminer les probabilités des événements suivants :

- i) Au moins un des événements A, B se réalise.
- ii) Aucun des événements A, B ne se réalise.
- iii) A ne se réalise pas mais B se réalise .
- iv) Exactement un des événements A, B se réalise.

6

Supposons que pour un espace de probabilité (Ω, \mathcal{A}, P) on a :

$$P[A] = \frac{1}{2}, \quad P[B] = P[C] = \frac{1}{6},$$

où $A, B,$ et C sont mutuellement exclusifs.

Evaluer les probabilités suivantes :

- a) $P[A^c \cap B^c]$;
- b) $P[A^c \cap B^c \cap C^c]$;
- c) $P[A^c \cap B^c \cap C]$;
- d) $P[B - A]$;
- e) La probabilité qu' exactement un des événements A, B et C se réalise.

7

Pour un espace de probabilité (Ω, \mathcal{A}, P) , si $\{A_1, A_2, \dots\}$ est une suite finie ou dénombrable d'événements appartenant à \mathcal{A} ,

- i) Montrer l'inégalité de Boole :

$$P\left[\bigcup_i A_i\right] \leq \sum_i P[A_i]$$

ii) Montrer l'inégalité :

$$P\left[\bigcap_i A_i\right] \geq 1 - \sum_i P[A_i^c]$$

8

Supposons que pour un espace de probabilité (Ω, \mathcal{A}, P) on a :

$$P[A] = \frac{1}{2}, \quad P[B] = 0,1, \quad P[C] = 0,3.$$

Si possible trouver la valeur exacte des probabilités suivantes.

Sinon, à partir de l'information disponible, déterminer les meilleures bornes inférieures et supérieures possibles et justifier vos conclusions.

- a) $P[B^c]$;
- b) $P[B \cup C]$;
- c) $P[A^c \cup B^c]$;
- d) $P[B \cap C] + P[B^c \cap C]$;
- e) $P[A \cap B^c]$

E.I.S.T.I. - Département Mathématiques**1re Année Ingénieurs****PROBABILITES T.D.2**

le 18 octobre 2011

1

- i) On s'intéresse au nombre de clients passants à une station de service durant une période de temps indéterminée.

Pour cette expérience aléatoire construire un espace probabilisé en définissant :

$$\forall \text{ événement élémentaire } \omega \in \Omega, \quad P[\{\omega\}] = \frac{e^{-1}}{\omega!}.$$

(Vérifier que P est une mesure de probabilité).

Calculer la probabilité de l'événement A suivant :

$A = \{\text{" au plus un client"}\}$

ii)

Pour la même expérience définir la "probabilité élémentaire" par :

$$\forall \text{ événement élémentaire } \omega \in \Omega, \quad P[\{\omega\}] = \frac{e^{-\lambda} \lambda^\omega}{\omega!},$$

où λ est un nombre réel positif.

Vérifier si P est vraiment une mesure de probabilité.

2

Pour chacune des expériences aléatoires suivantes déterminer un espace échantillon permettant l'utilisation du modèle uniforme.

- i) La répartition du sexe dans les familles comptant n enfants.
- ii) Le lancer d'un dé équilibré n fois.
- iii) Une main de k cartes distinctes d'un jeu de 52 cartes :
($1 \leq k \leq 52$).
- iv) La répartition de 6 erreurs de frappe dans un texte de 7000 mots.
- v) On analyse la répartition des accidents d'automobiles sur les ponts de la Seine au centre de Paris entre 10 heures et 11 heures chaque jour de la semaine.
On supposera que durant cette heure 3 accidents se produisent chaque jour de la semaine et qu'il n'arrive jamais plus d'un accident dans la même seconde.

3

Supposons que le modèle uniforme régit l'expérience aléatoire consistant à engendrer les nombres

00, 01, ..., 99.

(On interprétera le nombre $0X$ comme étant X). Déterminer la probabilité des événements suivants :

- i) Le nombre est supérieur à 81.
- ii) Le nombre est inférieur à 31 et impair .
- iii) Le nombre est divisible par 7 .

4

- i) On lance un dé non truqué 12 fois. Quelle est la probabilité pour l'événement A défini par :
- $$A = \{\text{"chaque face du dé se présente exactement deux fois"}\}$$
- ii) Dans une urne contenant n boules distinctes, on choisit p boules au hasard et avec remise. Quelle est la probabilité pour l'événement A défini par :
- $$A = \{\text{"toutes les boules choisies sont distinctes"}\}.$$

5

Soient (Ω, \mathcal{A}, P) un espace de probabilité et B_1, B_2, \dots, B_n d'éléments de la tribu \mathcal{A} telle que : $P[B_1 \cap B_2 \dots \cap B_{n-1}] > 0$.

Montrer que :

$$P\left[\bigcap_{i=1}^n B_i\right] = P[B_n | \bigcap_{i=1}^{n-1} B_i] P[B_{n-1} | \bigcap_{i=1}^{n-2} B_i] \dots P[B_2 | B_1] P[B_1]$$

6

On considère M cellules distinctes.

On distribue au hasard N boules dans les cellules ($N \leq M$) et on s'intéresse à l'événement A :

$$A = \{\text{"les } N \text{ premières cellules sont occupées"}\}.$$

Calculer (d'après le modèle uniforme) la probabilité $P[A]$ dans les cas suivants :

- a.1) Les N boules sont distinctes et on accepte plus d'une boule dans une même cellule.
- a.2) Les N boules sont distinctes et on n'accepte pas plus d'une boule dans une même cellule.
- b.1) Les N boules sont identiques et on accepte plus d'une boule dans une même cellule.
- b.2) Les N boules sont identiques mais on ne permet pas la répétition des boules dans une cellule.

7

On choisit au hasard 3 jockeys parmi 10 afin de participer aux trois premières courses d'un programme.

Déterminer la probabilité :

- a) que les trois jockeys soient différents,
- b) qu'un jockey participe à exactement deux courses,
- c) que le même jockey participe aux trois courses.

8

On choisit au hasard et avec remise 4 chiffres parmi $\{0, 1, \dots, 9\}$.

Trouver la probabilité qu'un résultat contienne :

- a) aucune répétition (4 chiffres différents),
- b) une répétition (une paire et deux chiffres distincts),

6

- c) deux répétitions (trois chiffres identiques ou deux paires),
- d) trois répétitions (le même chiffre répété quatre fois).

9

a.) Un professeur distribue au hasard à ses 5 élèves leurs copies de devoirs.

Déterminer la probabilité pour que :

- i) chacun des 5 élèves reçoive la copie portant son nom.
- ii) l'élève Pierre reçoive sa copie.
- iii) l'élève Pierre et l'élève Paul reçoivent leur copie respective.
- iv) l'élève Pierre ou l'élève Paul reçoive sa copie.

b.) Dans un bureau le photocopieur tombe en panne 6 fois durant une semaine de 5 jours.

On s'intéresse à la répartition des pannes parmi les jours de la semaine en supposant que celles-ci se produisent au hasard.

En utilisant le modèle uniforme, calculer la probabilité de l'événement :

$$A = \text{“On a au moins une panne chaque jour”}$$

10

On lance un dé et on associe à cette expérience aléatoire l'espace de probabilité (Ω, \mathcal{A}, P) avec la mesure de probabilité P définie par :

ω	1	2	3	4	5	6
$P[\{\omega\}]$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Considérer les événements A et B définis par :

$A = \{ \text{“un résultat inférieur à 5”} \}$;

$B = \{ \text{“un résultat pair”} \}$ Déterminer l'espace de probabilité conditionnelle par rapport à B , $(\Omega, \mathcal{A}, P_B)$, et calculer la probabilité conditionnelle $P[A|B]$.

E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs
PROBABILITES T.D.3
 le 25 octobre 2011

1

– i)

Soient : (Ω, \mathcal{A}, P) un espace de probabilité, X une variable aléatoire sur (Ω, \mathcal{A}) et F_X, p_x , la fonction de répartition et la fonction de masse correspondantes. Montrer les propriétés suivantes :

- a) $0 \leq F_X(x) \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$
- b) F_X est non décroissante.
- c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0, \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$
- d) F_X est continue à droite.
- e) $\lim_{y \rightarrow x, y < x} F_X(y) = F_X(x) - p_X(x).$

– ii)

Soient : (Ω, \mathcal{A}, P) un espace de probabilité, X une variable aléatoire sur (Ω, \mathcal{A}) et F_X, p_x , la fonction de répartition et la fonction de masse correspondantes. Montrer les propriétés suivantes (calcul de la probabilité pour que X prenne une valeur dans un intervalle quelconque à l'aide de F_X et de p_x) pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$:

- a) $P_X[]a, b] = F_X(b) - F_X(a);$
- b) $P_X[]a, b [= F_X(b) - F_X(a) - p_X(b)$
- c) $P_X[]a, b [= F_X(b) - F_X(a) + p_X(a) - p_X(b)$
- d) $P_X[]a, b] = F_X(b) - F_X(a) + p_X(a)$
- e) $P_X[]a, \infty [= 1 - F_X(a)$
- f) $P_X[]a, \infty [= 1 - F_X(a) + p_X(a)$
- g) $P_X[] - \infty, b [= F_X(b) - p_X(b)$

2

Soit l'expérience aléatoire de l'observation du temps de fonctionnement T (en jours) d'une certaine machine **avant la première panne**. On lui associe l'espace de probabilité (Ω, \mathcal{A}, P) avec :

$$\Omega = [0, +\infty[; \quad \mathcal{A} = \mathcal{R}_{[0, +\infty[}$$

et pour tout $A \in \mathcal{A}$, on définit la probabilité :

$$P[A] = \frac{1}{5} \int_A \exp\left(-\frac{t}{5}\right) dt$$

- i) Soit B l'événement : {"plus de 8 jours de fonctionnement avant la première panne"}. Calculer la probabilité $P[B]$.
Si la machine fonctionne depuis 8 jours sans panne, quelle est la probabilité qu'elle fonctionne entre 10 et 12 jours sans panne ?
- ii) Soit D l'événement : {"plus de 10 jours de fonctionnement avant la première panne"}. Calculer la probabilité $P[D|B]$.

3

i) Soient les événements :

$A = \{\text{“une famille a des enfants des deux sexes”}\}$ et

$B = \{\text{“une famille a au plus un garçon”}\}$

a) Montrer que A et B sont des événements indépendants si une famille a trois enfants.

b) Montrer que A et B sont des événements dépendants si une famille a deux enfants.

ii) On jette trois fois une pièce de monnaie bien équilibrée. Considérons les événements :

$A = \{\text{“le premier jet donne face”}\}$;

$B = \{\text{“le second jet donne face”}\}$;

$C = \{\text{“deux jets consécutifs donnent face”}\}$

Etudier l'indépendance ou dépendance (deux à deux) de ces événements.

4

i) Soit X une variable aléatoire continue définie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{R})$ avec fonction de densité f_X symétrique par rapport à un point $c \in \mathbb{R}$.

Montrer que si l'espérance μ_X existe alors $\mu_X = c$

ii) Soit X une variable aléatoire continue définie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{R})$, et telle que la fonction $h(c) = E[(X - c)^2]$ existe pour tout $c \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction h admet un minimum pour $c = \mu_x$.

iii)

– a) Soit X la variable aléatoire qui représente la note des étudiants à un examen. Si la moyenne et l'écart type sont 74 et 12 respectivement, calculer les résultats en unités centrées réduites des étudiants ayant obtenu les notes : 65; 74; 86; 92.

– b) Reprendre l'expérience précédente, et calculer les notes correspondantes aux résultats centrés réduits suivants : -1 ; $0,5$; $1,25$; $1,75$.

5

On a volé la Joconde. Deux ans plus tard en perquisitionnant chez un collectionneur, la police retrouve Mona Lisa. Un doute plane sur l'authenticité de la toile retrouvée. On estime à 80% la probabilité pour que ça soit celle que Léonard a peinte. On consulte alors deux experts en peinture de la Renaissance.

Le premier qui se trompe une fois sur cinq, déclare que le tableau est authentique.

Le deuxième qui se trompe deux fois sur onze, annonce que c'est une copie. Les conclusions des experts sont indépendantes.

Calculer la probabilité d'avoir retrouvé la Joconde authentique.

6

On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer deux fois une pièce de monnaie bien équilibrée et définissons la variable aléatoire X comme étant le nombre de piles obtenues.

a) Déterminer l'espace image de la variable aléatoire X .

b) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

c) Donner la fonction de répartition F_X et la fonction de masse p_X et tracer leur graphiques.

E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs
PROBABILITES T.D.4
le 31 octobre 2011

1

On choisit au hasard et sans remise trois boules d'une urne contenant 4 boules rouges et 6 boules noires.

Si X représente le nombre de boules rouges dans l'échantillon choisi, vérifier que X est bien une variable aléatoire. Décrire la loi de probabilité de X . Donner la fonction de répartition, la fonction de masse et tracer leurs graphiques. Calculer la moyenne et la variance de cette variable aléatoire.

2

- i) Un joueur lance un dé équilibré et gagne 10 euros si le résultat est pair, il perd 10 euros si le résultat est "1", ou "3" et ne perd ou ne gagne rien si le résultat est "5". Décrire la variable aléatoire représentant le gain du joueur ainsi que sa loi de probabilité. Donner la fonction de répartition, la fonction de masse et tracer leurs graphiques. Calculer la moyenne et la variance de cette variable aléatoire.
- ii) On considère un système équipé d'un détecteur de panne. On établit les constatations suivantes, de façon empirique :
 - S'il y a panne, elle est détectée avec 95% de réussite .
 - S'il n'y a pas de panne, l'alerte de détection fonctionne avec une probabilité de 6%.
 - Une panne apparaît avec une probabilité de 2%. Si l'alerte est donnée, avec quelle probabilité peut-on affirmer qu'elle ne correspond pas à une panne ? Commenter votre résultat.

3

Soient deux boîtes A et B qui contiennent respectivement 8 transistors dont 3 sont défectueux et 5 transistors dont 2 sont défectueux. Un transistor est tiré aléatoirement de chaque boîte.

- a) Quelle est la probabilité pour que l'un des deux transistors soit en bon état et l'autre défectueux ?
- b) Dans le cas étudié en a) quelle est la probabilité pour que le transistor défectueux soit tiré de la boîte A ?

4

Soit l'expérience aléatoire de l'observation du **temps d'attente** (en min.) pour l'arrivée d'un autobus à une intersection.

On associe à ce phénomène aléatoire l'espace de probabilité (Ω, \mathcal{A}, P) avec :

$$\Omega = [0, 8]; \quad \mathcal{A} = \mathcal{R}_{[0,8]}$$

Vérifier que l'application suivante P définie pour tout $A \in \mathcal{A}$, est une mesure de probabilité sur Ω :

$$P[A] = \int_A f(t) dt \quad \text{où} \quad f(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{t}{16} & \text{si } 0 \leq t \leq 4 \\ \frac{1}{2} - \frac{t}{16} & \text{si } 4 < t \leq 8 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{array} \right\}$$

Un individu attend l'autobus depuis déjà deux minutes.

- i) Déterminer l'espace de probabilité conditionnelle pour le temps que cet individu devra encore attendre.
- ii) Trouver la probabilité qu'il doive attendre encore moins de 5 minutes.

5

Le 14 juillet à Saint Troupaize, il fait beau sept fois sur dix.

Le comité des fêtes dispose de deux sources de prévisions météorologiques indépendantes :

- La météo nationale, qui se trompe deux fois sur cent.
- Une grenouille verte, qui se trompe une fois sur vingt.

La météo annonce de la pluie, alors que le comportement de la grenouille laisse prévoir du beau temps. **Quel est le temps le plus probable ?**

E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs
PROBABILITES T.D.5
le 7 novembre 2011

1

Soit X une variable aléatoire continue définie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{R})$ qui représente la durée de service d'une pièce d'équipement ; vérifier que f_X définie ci-dessous est une bonne fonction de densité de probabilité qu'on associera à X :

$$f_X(x) = \left\{ \begin{array}{ll} (0,001)e^{-(0,001)x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{array} \right\}$$

- i) Déterminer la fonction de répartition, la moyenne et la variance.
iii) Déterminer la probabilité que la pièce d'équipement dure :
a) plus de 1000 heures, b) exactement 1000 heures, c) entre 800 et 1200 heures,
d) moins de 100 heures.

2

Soit X une variable aléatoire définie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{R})$ avec fonction de densité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$$

Déterminer le support, la fonction de répartition, la moyenne et la variance de X .

Calculer :

$$P\{|X| > 2\}, P\{|X| < 1\}, P\{X < -3\}$$

3

1. Déterminer la **moyenne** et la **variance** d'une variable aléatoire Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.
2. La probabilité pour qu'un tireur atteigne une cible est $\frac{1}{4}$.
 - i) En supposant qu'il tire 7 fois quelle est la probabilité P pour qu'il atteigne la cible au moins deux fois ?
 - ii) Combien de fois doit-il tirer, pour que la probabilité qu'il atteigne la cible au moins 1 fois, soit plus grande que $\frac{2}{3}$?

4

Dans une école d'ingénieurs, on suppose que le résultat (sur 100) à un examen de probabilités est aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(60, 169)$.

On désire diviser en quatre classes les résultats des étudiants qui se présentent au prochain examen, en supposant que les nombres réels positifs C_1, C_2, C_3 , vérifient, $C_1 > C_2 > C_3$:

$$A = \{ \text{“Un résultat supérieur ou égal à } C_1 \text{”} \}$$

$$B = \{ \text{“Un résultat inférieur à } C_1, \text{ mais supérieur ou égal à } C_2 \text{”} \}$$

$$C = \{ \text{“Un résultat inférieur à } C_2, \text{ mais supérieur ou égal à } C_3 \text{”} \}$$

$$D = \{ \text{“Un résultat inférieur à } C_3 \text{”} \}$$

Déterminer les constantes C_1, C_2, C_3 afin que les classes A, B, C, D contiennent respectivement 10%, 30%, 45%, 15% des étudiants respectivement.

5

Les professeurs de l'EISTI ont souvent remarqué des pannes concernant les projections aux écrans du Grand Amphi. Habituellement on constate 3 principales raisons : dans 60% des cas la panne provient d'un des projecteurs alors que celle qui est due à un faux contact des câbles survient dans 20% des cas ; le reste de ces problèmes est dû à la lampe du rétroprojecteur. Ces pannes s'expriment par l'extinction de l'image sur la partie gauche ou sur la partie droite de l'écran.

Les nombreuses observations donnent probabilité de 0,3 pour la disparition de l'image à droite si la panne provient du projecteur, alors que la disparition de l'image sur la partie gauche de l'écran survient avec probabilité 0.8 si la panne provient du rétroprojecteur, et une probabilité 0,9 si le problème est dû aux câbles.

Si pendant le cours de Probabilités l'image disparaît sur la partie gauche de l'écran quelle est la probabilité pour que la panne provienne d'un mauvais contact des câbles ?

E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs
PROBABILITES T.D.6
 le 24 novembre 2011

1

Une salle de spectacle propose pour cette saison 2011-12, des abonnements à 4, 5 ou 6 spectacles. Dans la population des abonnés la répartition est la suivante :

- 45% ont choisi l'abonnement à 4 spectacles ;
- 30% ont choisi l'abonnement à 5 spectacles ;
- le reste a choisi l'abonnement à 6 spectacles.

D'autre part, 65% des abonnés sont des jeunes de moins de 25 ans, et dans cette population, la répartition est différente :

- 40% ont choisi l'abonnement à 4 spectacles ;
- 40% ont choisi l'abonnement à 5 spectacles ;
- le reste a choisi l'abonnement à 6 spectacles.

On interroge un abonné au hasard.

On note A l'événement : "l'abonné interrogé a moins de 25 ans".

On note B_k l'événement : " l'abonné interrogé a choisi l'abonnement à k spectacles", $k = 4, 5$ ou 6 .

- a) Sachant que l'abonné interrogé a moins de 25 ans, quelle est la probabilité qu'il ait choisi l'abonnement à 5 spectacles ?
- b) Décrire l'événement $A \cap B_5$ et calculer sa probabilité.
- c) Calculer la probabilité pour que l'abonnement choisi soit celui à 5 spectacles sachant que l'abonné a 25 ans ou plus.

2

Sur un espace de probabilité (Ω, \mathcal{A}, P) on définit une variable aléatoire X à valeurs dans \mathbb{R} qui suit une loi continue. On associe à X la fonction de densité suivante :

$$f(x) = \frac{c}{x^2 + 1}$$

où c est un paramètre inconnu.

- 1) Pour quelle valeur de c , f est une **bonne fonction de densité de probabilité** ?
- 2) Etablir la fonction de répartition de X .
- 3) Calculer la probabilité pour que :

$$X \in \left\{ \left[-1, -\frac{\sqrt{3}}{3} \right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, 1 \right] \right\}$$

(Donnée : $\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$)

3

Dans une démarche marketing, un agent doit chercher à entrer en communication téléphonique avec n personnes présélectionnées dans une liste. On admet que la probabilité de joindre une personne donnée sur la liste est de 0, 1.

Soit X la variable aléatoire qui représente le nombre de personnes répondant aux n appels.

- Quelle est la loi de probabilité de X ?
- Si l'agent téléphone à 10 personnes, quelle est la probabilité pour qu' au moins une personne réponde à son appel ?
- Combien d' appels faut-il donner pour qu' en **moyenne** 20 personnes répondent ? Dans ce cas, peut-on approcher la loi de X par une autre loi discrète ? Calculer alors la probabilité pour que 10 personnes répondent aux appels.

4

- i) Soit X une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle.
Déterminer :
- a) sa moyenne μ (Espérance)
 - b) sa variance σ^2 .
 - c) sa fonction de répartition.
- ii) Un appareil fonctionne au moins deux heures sans panne. Après deux heures de fonctionnement, sa fonction de fiabilité est donnée par :

$$\phi(t) = e^{-(0,1)t}$$

- a) Donner la fonction de densité de la variable aléatoire T qui représente le temps de fonctionnement de l'appareil avant la première panne.
- b) En appliquant les résultats du i) trouver la fonction de répartition la moyenne et la variance de T .
- c) Quelle est la relation entre la fonction de répartition et la fiabilité de l'appareil ?

E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs
PROBABILITES T.D.7
 le 23 janvier 2012

1

Soient : (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé et A, B deux événements tels que :

$$P(A) = P(B) = \frac{3}{4}$$

1. Trouver un encadrement de $P(A \cap B)$.
2. Trouver pour quelle condition sur $P(A \cup B)$, la probabilité $P(A \cap B)$ atteint sa valeur minimale.
3. Trouver pour quelle condition sur $P(A \cup B)$, la probabilité $P(A \cap B)$ atteint sa valeur maximale.

2

Toto a l'estomac fragile mais il aime malgré tout dîner chez MacDo deux fois sur trois où il s'expose à une gastrite avec une probabilité de 0,10. Le reste du temps il dîne chez Hamburger-Prince et par la suite, il souffre encore de sa gastrite avec une probabilité de 0,15.

Sachant qu'aujourd'hui Toto a une gastrite calculer la probabilité d'avoir mangé chez MacDo.

3

- i) Pour chacune des variables aléatoires suivantes indiquer la loi usuelle suivie (avec les valeurs précises de ses paramètres). Préciser son support, sa fonction de masse ou fonction de densité, son espérance et sa variance.
 1. Le nombre annuel d'accidents à un carrefour donné sachant qu'il y a en moyenne 1,5 accidents par mois.
 2. Le nombre d'accidentés à un carrefour donné pour l'année 2011 sachant que 1000 personnes ont traversé ce carrefour et que la probabilité d'avoir un accident est de 0,01.
 3. Le temps (en heures) qui sépare deux accidents à un carrefour donné sachant que la probabilité pour qu'il y ait deux accidents en moins de deux heures est de 0,1
- ii) Trouver la fonction Caractéristique et la fonction Génératrice d'une loi Binômiale $\mathcal{B}(n, p)$ et d'une loi de Poisson P_λ
- iii) Montrer que pour n suffisamment grand et p suffisamment petit la loi Binômiale admet comme limite la loi de Poisson.

4

- i) Déterminer la fonction Caractéristique et la fonction Génératrice des lois Normales $\mathcal{N}(0, 1)$ et $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
- ii) Sur un grand nombre de personnes on a constaté que la répartition du taux de cholestérol suit une loi Normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec les résultats suivants :
 - 56% ont un taux inférieur à 165 cg.

- 34% ont un taux compris entre 165 cg et 180 cg.
- 10% ont un taux supérieur à 180 cg.

1. Déterminer les paramètres de la loi normale.
2. Combien de personnes faut-il prévoir de soigner dans une population de 10000 personnes si le taux maximum toléré sans traitement est de 182 cg ?

5

Soit X une variable aléatoire de support $D_X = \mathbf{N}$ et telle que :

$$\forall n \geq 1, \quad P[X = n] = \frac{3}{n} P[X = n - 1]$$

1. Déterminer $p_n = P[X = n]$ en fonction de n et de p_0 .
2. En déduire la valeur de p_0 .
3. Quelle loi usuelle la variable aléatoire suit-elle ?

E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs
PROBABILITES T.D.8
le 30 janvier 2011

1

- i) Soit X une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle.
- Donner la définition générale du support C_X , de la fonction de densité f_X et calculer la fonction de répartition F_X .
Donner l'expression de la fonction de fiabilité $\phi_X(x_0)$ en termes de la fonction de répartition.
Déterminer la fonction génératrice et la fonction caractéristique de cette loi.
 - Une entreprise produit des batteries de voiture. Le temps de fonctionnement de ces batteries s'exprime en kilomètres parcourus et est modélisé par une variable aléatoire T . La fonction de fiabilité de ce temps de fonctionnement est donnée par :

$$\phi_T(t) = \exp(-10^{-5}t).$$

Sachant que la batterie a déjà parcouru 8.000 km, quelle est la probabilité de faire un voyage de 1000 km sans défaillance ?

- ii) Le nombre moyen d'accidents de voitures sur un tronçon, d'autoroute au cours d'une journée est de 3.
- Modéliser ce problème par une variable aléatoire discrète, donner son support, sa fonction de masse et calculer la probabilité pour qu'il y ait strictement moins de 3 accidents.

2

Un système de communication comporte n composants. Chacun d'entre eux fonctionne indépendamment des autres avec une probabilité p de tomber en panne.

Le système tombe en panne si la moitié ou plus de la moitié de ses composants sont défectueux.

Soit X la variable aléatoire qui représente le nombre de composants défectueux du système.

1. Quelle est la loi de probabilité de X ?
2. Supposons que la probabilité pour un composant d'être défectueux est $p = 0,1$.
Un système comprenant 2 composants, a-t-il plus de chances de tomber en panne qu'un système à 4 composants ?
3. Quelle devrait être la valeur de la probabilité p pour qu'un système à 2 composants et un système à 4 composants aient la même probabilité de tomber en panne ?

On considère maintenant un système à $n = 100$ composants avec une probabilité $p = 0,1$.

Un système d'alerte se déclenche lorsque plus de 5% des composants sont défectueux.

4. Par quelle loi discrète peut-on approcher la loi de X ? Quelle est la probabilité, pour que le système d'alerte se déclenche ?

5. Par quelle loi continue peut-on approcher la loi de X ? Evaluer à nouveau la probabilité pour que le système d'alerte se déclenche ?
6. En utilisant la même loi, qu'à la question 5, pour combien doit-on fixer le seuil d'alerte pour que la probabilité d'alerte descende à 0,551 ?

On considère maintenant que le seuil d'alerte sera donné si la variable aléatoire transformée de X

$$\frac{e^X}{10^5}$$

est supérieure à 10 (avec X la variable aléatoire que vous avez utilisée à la question 5).

7. Quel est le support de Y ?
8. Déterminer la fonction de densité et la fonction de répartition de Y .
9. Donner une expression de la fonction de répartition de Y , en termes de la fonction de répartition d'une loi Normale centrée réduite : $\mathcal{N}(0, 1)$.
10. Quelle est la probabilité pour que l'alerte soit donnée ?

(Indication : $\ln(10^6) = 13,8$)

3

1. Le cours d'une action à la bourse de Paris est une variable aléatoire X qui suit une loi Log-normale de paramètres $\mu = 8$ et $\sigma^2 = 4$.
 - (a) Déterminer le support et la densité de probabilité de X .
 - (b) Etablir une relation entre la fonction de répartition de X et celle d'une loi normale centrée réduite.
 - (c) Calculer la probabilité que le cours de cette action soit supérieur à 148. (On donne $\ln(148) \approx 5$).
2. En période de crise financière, le cours de cette action Y suit une loi exponentielle de paramètres : $\nu = 0, \theta = \frac{1}{150}$.
 - (a) Rappeler le support et la densité de probabilité de Y .
 - (b) Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$.
 - (c) Un détenteur de cette action ne vend que si le cours dépasse 200. Quelle est la probabilité qu'il vende à un prix supérieur à 350.

4

1. (a) Déterminer l'expression $\Phi_X(t)$ de la fonction génératrice d'une variable aléatoire X qui suit une loi binômiale $\mathcal{B}(n, p)$.
 - (b) En déduire la moyenne et la variance de X .
2. La probabilité qu'une feuille de papier bloque une photocopieuse de l'EISTI est de $p = 0,01$. On note Y la variable aléatoire indiquant le nombre de blocages dans une série de 600 pages photocopiées.

Un document de 15 pages est photocopié en 40 exemplaires.

 - (a) Calculer la probabilité qu'il n'y ait aucun blocage.
 - (b) Calculer la probabilité qu'il y ait au moins 3 blocages.
 - (c) Proposer une autre loi approximant la précédente. Utiliser cette dernière pour refaire les deux calculs (a) et (b).

E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs
PROBABILITES T.D.9
 le 13 février 2012

1

Une machine fabrique des vis ayant comme diamètre une variable aléatoire normale de moyenne 10 *mm* et d'écart type de 1 *mm*.

Une autre machine fabrique des écrous ayant comme diamètre une variable aléatoire normale de moyenne 11 *mm* et d'écart type de 0,5 *mm*.

En choisissant au hasard une vis et un écrou, quelle est la probabilité pour que la vis rentre dans l'écrou.

2

Dans un lot d'objets le poids d'un objet suit une loi normale avec moyenne 120 et variance 100. Trouver la fonction caractéristique et la fonctionnelle génératrice de cette variable aléatoire (poids).

- a) Si un groupe de 25 objets est choisi au hasard quelle est la probabilité pour que le poids moyen du groupe soit supérieur à 125 ?
- b) Si deux groupes de 25 objets chacun sont choisis au hasard, quelle est la probabilité que la moyenne des poids pour les deux groupes diffère plus que de 5 ?

3

Considérons n mesures indépendantes X_1, X_2, \dots, X_n de l'énergie moyenne μ d'un faisceau de particules à l'intérieur d'un accélérateur.

On utilise la moyenne empirique \bar{X} de ces mesures comme une estimation de μ .

Supposons que $\forall i, X_i$ suit une loi de probabilité de moyenne μ et d'écart type 1. Quel est le nombre minimal n de mesures à effectuer, afin que l'erreur de l'estimation soit au plus égale à 0,095, avec une probabilité de 0,9 ?

4

Dans le cadre d'une enquête hospitalière on suppose connaître pour chaque sujet la cause de son décès :

- 1) décès lié au cancer des bronches,
- 2) décès lié à toute autre cause (accident, autre maladie, etc,...)

Pour les sujets de la première catégorie, on admet que la distribution du délai de survie X (exprimé en mois) suit une loi Lognormale d'espérance μ_X et de variance σ_X^2 , c'est à dire que l'on peut trouver des constantes a, x_0, b , telles que la variable :

$$Y = a \ln(X - x_0) + b$$

suive une loi normale d'espérance μ_Y et de variance σ_Y^2 .

- a) Calculer μ_X en fonction de $a, x_0, b, \mu_Y, \sigma_Y$.
- b) Pour étudier la moyenne des délais de survie sur un groupe de n sujets, revient-il au même de considérer les variables \bar{X} et \bar{Y} ?
- c) On admet maintenant que la transformation $Y = \ln X$ est telle que Y suit la loi $\mathcal{N}(1, 8; 1)$.

Avant la fin de l'enquête on désire étudier le délai moyen de survie observé sur les 16 premiers sujets, tous décédés.

Quelle est la probabilité pour que $\bar{Y} > 2,8$?

5

Les demi-finales de cet hiver au championnat du ski alpin sur les deux parcours A et B des Hautes Alpes sont organisés d'après les résultats statistiques des cinq dernières années.

Les skieurs choisissent au hasard (équiprobabilité) entre les deux parcours qui comportent chacun deux étapes en tenant compte des informations suivantes : Sur la première étape du parcours A il y a une probabilité de 0,80 de faire une chute, alors que sur la première étape du parcours B il y a une probabilité de 0,70 de tomber.

Sur la deuxième étape du parcours A il y a une probabilité de 0,30 de ne pas tomber, si le skieur n'est pas tombé à la première étape et une chance de 0,10 de ne pas tomber, si il a déjà fait une chute durant la première étape.

Sur la deuxième étape du parcours B le skieur a aussi une chance de 0,10 de ne pas tomber si il a déjà fait une chute durant la première étape, et une probabilité de 0,70 de tomber si il n'a pas fait une chute pendant la première étape du parcours. Les candidats sont éliminés, si ils font au moins deux chutes sur le parcours choisi. Pour un skieur pris au hasard :

- a) Quelle est la probabilité qu'un candidat soit éliminé ?
- b) Si le skieur a été éliminé quelle est la probabilité qu'il ait emprunté le parcours B ?

6

Pénélope essuie les verres au fond du café et dans ce décor elle a remarqué qu'un client sur quatre laissait un pourboire au comptoir.

a) Soit X la variable aléatoire représentant le pourcentage de consommateurs qui laissent un pourboire au comptoir. Etablir la loi de la variable aléatoire X . Déterminer la moyenne et la variance de X . Calculer la fonction caractéristique et la fonction génératrice correspondantes.

b) Pour 1000 clients, soit Y la var. aléatoire qui représente le nombre de clients qui laissent un pourboire.

Etablir la loi de la variable aléatoire Y . Pour quelles lois discrètes et par quelle loi continue peut-on modéliser ou approcher la loi de Y ?

Calculer par deux de ces trois lois la probabilité :

$$P(245 < Y < 255).$$

E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1^{re} Année Ingénieurs
PROBABILITES T.D.10
 le 12 mars 2012

1

- i) Soit X une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle. Déterminer :
- a) La fonction génératrice et la fonction caractéristique.
 - b) la moyenne μ ,
 - c) la variance σ^2
- ii) Un sous-marin nucléaire voyage en plongée (lorsqu'il joue à la bataille navale !). Il doit néanmoins faire surface pour renouveler l'atmosphère . La durée d'une plongée en jours suit une loi exponentielle de paramètre θ . En dépouillant tous les livres de bord, on constate que 0,88 des plongées ont duré plus de six jours.
- a) Définir la fonction de répartition de la variable aléatoire qui représente la durée de la plongée en jours et donner une estimation du paramètre θ .
 - b) Calculer la probabilité pour qu'une plongée dépasse une semaine.
 - c) Sachant que le sous marin évolue immergé depuis une semaine, calculer la probabilité pour que la durée de la plongée dépasse dix jours.

2

Soit l'espace de probabilité (Ω, \mathcal{A}, P) . Sur cet espace on définit le vecteur de probabilité (X, Y) à 2 dimensions. Démontrer les propositions (1.1.), (1.2.) et (1.3) du cours :

$$\int f_X[x|y]dx = 1 \quad (0.0.1)$$

$$\int f_X[x|y]f_Y(y)dy = f_X(x) \quad (0.0.2)$$

$$E_Y[E_X[h(X)|Y]] = E_X[h[X]] \quad (0.0.3)$$

3

Soit l'espace de probabilité (Ω, \mathcal{A}, P) . Sur cet espace on définit le vecteur de probabilité (X, Y) , tel que sa densité de probabilité conjointe est de la forme :

$$f(x, y) = f(x^2 + y^2), \quad \text{avec} \quad P[\mathbb{R}^2] = \int_{\mathbb{R}^2} f(x^2 + y^2)dx dy = 1$$

En s'appuyant sur un argument de parité montrer que les variables aléatoires X et Y sont non corrélées mais pas forcément indépendantes.

4

- i) Le budget d'une entreprise (durant une année) exprimé en millions d' Euros, est modélisé d'après une variable aléatoire normale X de moyenne 2,5 et d'écart type égal à 1 .
- Quelle est la probabilité pour que le budget de l'entreprise à la fin de l'année soit supérieur à 5,1 (millions)d'euros ?

- ii) La direction de la gestion financière de la même entreprise a envie de changer la modélisation du budget pour l'année 2005 en définissant une nouvelle variable, transformée de X :

$$B(X) = \exp(X)$$

Trouver le support, la fonction de densité de la nouvelle variable aléatoire B qui représente le budget, ainsi que sa fonction de répartition (en termes d'une fonction de répartition d'une variable aléatoire normale centrée réduite).

Quelle est la probabilité pour que ce budget soit inférieur à 15 millions ?

(Donnée numérique $\ln 15 = 2,708$)

5

- a) On considère l'espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) et le vecteur de probabilité (X, Y) défini sur cet espace ayant comme densité de probabilité conjointe : (joint density function)

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \exp[-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)], & \forall x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Evaluer la probabilité conditionnelle, et l'espérance conditionnelle de la variable X par rapport à Y . Généraliser votre résultat.

- b) Pour n'importe quel couple de variables aléatoires conjointes définies sur (Ω, \mathcal{F}, P) , trouver une méthode pour évaluer les moments d'ordre k de X , $E[X^k]$, en termes d'espérances conditionnelles

6

Les statistiques récentes de certains vétérinaires passionnés ont montré que parmi les beaux chats d'Angora le pourcentage moyen d'avoir un oeil bleu et l'autre vert est de 0,01.

Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de chats aux yeux bicolores dans un échantillon de 200 chats d'Angora choisis au hasard.

- a) En formalisant le problème d'après une variable aléatoire discrète, calculer la probabilité pour qu'il y ait moins de quatre chats aux yeux bicolores dans l'échantillon.
- b) Une formalisation d'après une variable aléatoire différente (approximation de la précédente) serait-elle possible ? Si oui, calculer de nouveau la probabilité demandée en a) et comparer vos deux résultats.
- c) Donner la moyenne et la variance de X d'après la loi de b).
- d) Pourriez-vous calculer la même probabilité par une loi continue qui serait approximation des précédentes ?

7

- i) Par application du théorème du cours concernant la transformation des vecteurs aléatoires, montrer que : Si X_1, X_2 , sont deux variables aléatoires conjointement continues de fonction de densité conjointe f_{x_1, x_2} donnée, et si on définit un vecteur aléatoire Y "transformée" par ses composantes

$$Y_1 = X_1 + X_2, \quad \text{et} \quad Y_2 = X_1 - X_2.$$

⇒ la fonction de densité conjointe est de la forme :

$$f_{Y_1 Y_2}(y_1 y_2) = \frac{1}{2} f_{X_1 X_2} \left(\frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{y_1 - y_2}{2} \right)$$

Appliquer ce résultat dans les cas particuliers suivants :

- a) X_1, X_2 indépendantes uniformes.
 - b) X_1, X_2 indépendantes exponentielles (de paramètres λ_1, λ_2 respectivement)
 - c) X_1, X_2 indépendantes et normales centrées réduites.
- ii) Soit (Ω, \mathcal{F}, P) un espace de probabilité et soit $(X, Y) : (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow \mathbb{R}^2$, un vecteur aléatoire ayant comme densité de probabilité conjointe :

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} C(x^2 - y^2) \exp[-y], & \text{si } -y \leq x \leq y \text{ et } y \in \mathbb{R}^+ \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

1. Déterminer la valeur de la constante C .
2. X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Calculer $E[XY]$. En déduire $Cov(X, Y)$. Que constate-t-on ?
4. On pose :

$$S = X + Y; \quad U = X - Y$$

- Déterminer la loi du couple (S, U) .
- S et U sont-elles indépendantes ?

8

- 1.

Dans une grande commune on suppose que le pourcentage moyen de myopes est de 0,01. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de myopes dans un échantillon de 200 personnes choisies au hasard.

- a) En formalisant le problème d'après une variable aléatoire discrète, calculer la probabilité pour qu'il y ait moins de quatre myopes dans l'échantillon.
- b) Une formalisation d'après une autre variable aléatoire discrète (approximation de la précédente) serait-elle possible ? Si oui, calculer de nouveau la probabilité demandée en a) et comparer vos deux résultats (si possible...).
- c) Obtenir la moyenne et la variance de X d'après la loi de b). Donner la fonction de répartition correspondante.
- d) Quelle serait cette probabilité si vous aviez modélisé le problème par une loi continue approximation des deux lois discrètes précédentes ?

- 2.

Le petit éléphant champion du cirque de Moscou fait des tours de piste formidables sur ses patins à roulettes avec probabilité 0,20 de tomber. Quel devrait être le nombre total minimal de tours de ce champion patineur pour que la probabilité de faire "au moins 1 chute" serait supérieure à 0,90 ?

1 Tables

Variable Aléatoire centrée réduite

$$\mathcal{F}(x) = P\{N(0, 1) \leq x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du$$

Table B_1

¹ Table B_1 donne la valeur de x dont la valeur correspondante de $\mathcal{F}(x)$ est la somme de la colonne et ligne correspondante .

Percentile de la var.normale centrée réduite.

F	.000	.010	.020	.030	.040	.050	.060	.070	.080	.090
.5	.000	.025	.050	.075	.100	.126	.151	.176	.202	.228
.6	.253	.279	.305	.332	.358	.385	.412	.440	.468	.496
.7	.524	.553	.583	.613	.643	.674	.706	.739	.772	.806
.8	.842	.878	.915	.954	.994	1.036	1.080	1.126	1.175	1.227
.9	1.282	1.341	1.405	1.476	1.555	1.645	1.751	1.881	2.054	2.326

x	1.960	2.576	3.090	3.291	3.891	4.417	4.892
F	.975	.995	.999	.9995	.99995	.999995	.9999995
2(1-F)	.050	.010	.002	.001	.0001	.00001	.000001

Table B_2

² Table B_2 donne $\mathcal{F}(x)$, où x est donné par la somme de la colonne et de la ligne correspondante.

Exemple 0.1 Pour la valeur 0.36 on a $\mathcal{F}(0.36) = 0.6406$ (par la ligne .3 et la colonne .06 de la table B_2)

¹Source R.A. Fisher and F.Yates. *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research*, Table 1 ; publié par Longman Group Ltd., London (précédemment publié par Olivier and Boyd, Edinburgh) ; avec la permission des auteurs et éditeurs.

²Source : A. Hald, *Statistical Tables and Formulas* (1952), Table II : reimprimée avec la permission de John Wiley

Fonction de répartition de la var.aléatoire normale centrée réduite.

x	.000000	.010000	.020000	.030000	.040000	.050000	.060000	.070000	.080000	.090000
.0	.500000	.504000	.508000	.512000	.516000	.519900	.523900	.527900	.531900	.535900
.1	.539800	.543800	.547800	.551700	.555700	.559600	.563600	.567500	.571400	.575300
.2	.579300	.583200	.587100	.591000	.594800	.598700	.602600	.606400	.610300	.614100
.3	.617900	.621700	.625500	.629300	.633100	.636800	.640600	.644300	.648000	.651700
.4	.655400	.659100	.662800	.666400	.670000	.673600	.677200	.680800	.684400	.687900
.5	.691500	.695000	.698500	.701900	.705400	.708800	.712300	.715700	.719000	.722400
.6	.725700	.729100	.732400	.735700	.738900	.742200	.745400	.748600	.751700	.754900
.7	.758000	.761100	.764200	.767300	.770300	.773400	.776400	.779400	.782300	.785200
.8	.788100	.791000	.793900	.796700	.799500	.802300	.805100	.807800	.810600	.813300
.9	.815900	.818600	.821200	.823800	.826400	.828900	.831500	.834000	.836500	.838900
1.0	.841300	.843800	.846100	.848500	.850800	.853100	.855400	.857700	.859900	.866100
1.1	.864300	.866500	.868600	.870800	.872900	.874900	.877000	.879000	.881000	.883000
1.2	.884900	.886900	.888800	.890700	.892500	.894400	.896200	.898000	.899700	.901470
1.3	.903200	.904900	.906580	.908240	.909880	.911490	.913090	.914660	.916210	.917740
1.4	.919240	.920730	.922200	.923640	.925070	.926470	.927850	.929220	.930560	.931890
1.5	.933190	.934480	.935740	.936690	.938220	.939430	.940620	.941790	.942950	.944080
1.6	.945200	.946300	.947380	.948450	.949500	.950530	.951540	.952540	.953520	.954490
1.7	.955430	.956370	.957280	.958180	.959070	.959940	.960800	.961640	.962460	.963270
1.8	.964070	.964850	.965620	.966380	.967120	.967840	.968560	.969260	.969950	.970620
1.9	.971280	.971930	.972570	.973200	.973810	.974410	.975000	.975580	.976150	.976700
2.0	.977250	.977780	.978310	.978820	.979320	.979820	.980300	.980770	.981240	.981690
2.1	.982140	.982570	.983000	.983410	.983820	.984220	.984610	.985000	.985370	.985740
2.2	.986100	.986450	.986790	.987130	.987450	.987780	.988090	.988400	.988700	.988990
2.3	.989280	.989560	.989830	.990097	.990358	.990613	.990863	.991106	.991344	.991576
2.4	.991802	.992024	.992240	.992451	.992656	.992857	.993053	.993244	.993431	.993613
2.5	.993790	.993963	.994132	.994297	.994457	.994614	.994766	.994915	.995060	.995201
2.6	.995339	.995473	.995604	.995731	.995855	.995975	.996093	.996207	.996319	.996427
2.7	.996533	.996636	.996736	.996833	.996928	.997020	.997110	.997197	.997282	.997365
2.8	.997445	.997523	.997599	.997673	.997744	.997814	.997882	.997948	.998012	.998074
2.9	.998134	.998193	.998250	.998305	.998359	.998411	.998462	.998511	.998559	.998605
3.0	.998650	.998694	.998736	.998777	.998817	.998856	.998893	.998930	.998965	.998999